

# 基于裂尖塑性区矢径的结构断裂韧度预测方法\*

黄兴玲

(滇池学院 土木工程系, 昆明 650228)

**摘要:** 由于约束效应,平面应变断裂韧性无法准确地表征工程结构的断裂韧度,二者之间的转换方法值得深入研究.基于裂尖塑性区矢径,建立了材料断裂韧性的修正模型,从理论上将面内约束和面外约束的影响纳入到修正模型中,并提出了结构断裂韧度的预测方法.利用该修正模型,对单边裂纹加筋板的断裂韧度和许用载荷进行了分析.结果表明,面内约束和面外约束都对加筋板的断裂韧度、许用载荷有着重要影响;与平面应变断裂韧性和基于面内 $T$ 应力的修正模型相比,基于塑性区矢径的修正模型更准确、更合理,并能综合地反映面内和面外的约束效应.

**关键词:** 断裂韧性; 裂尖塑性区; 约束效应; 加筋板;  $T$ 应力

**中图分类号:** O346.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450136

## A Fracture Toughness Prediction Method for Structural Components Based on Crack Tip Plastic Zone Radius Vectors

HUANG Xingling

(Department of Civil Engineering, Dianchi College,  
Kunming 650228, P.R.China)

**Abstract:** It is significant to study the transformation of fracture toughness data from plane strain conditions to engineering structures, since the plane strain fracture toughness cannot accurately characterize the fracture toughness of structural components due to constraint effects. Based on the plastic zone radius vectors of crack tips, a correction model for fracture toughness was proposed with the combined effects of in-plane and out-of-plane constraints incorporated theoretically, and a fracture toughness prediction method was developed for engineering structures. With the correction model, the fracture toughness and allowable loads were analyzed for the single edge-cracked stiffened plate. The results show that, both in-plane and out-of-plane constraints have important influences on fracture toughnesses and allowable loads of stiffened plates. Compared with the plane strain fracture toughness and the correction method based on the in-plane  $T$ -stress, the correction model based on plastic zone radius vectors is more accurate and reasonable, and can reflect the effects of in-plane and out-of-plane constraints comprehensively.

**Key words:** fracture toughness; crack tip plastic zone; constraint effect; stiffened plate;  $T$ -stress

## 0 引言

由于强度高、质量轻,加筋板在工程结构中大量使用;一旦出现裂纹,往往会失稳扩展导致结构失效<sup>[1-3]</sup>.

\* 收稿日期: 2024-05-13; 修订日期: 2024-06-23

作者简介: 黄兴玲(1980—),男,教授,博士(E-mail: xinglinghuang@yeah.net).

引用格式: 黄兴玲. 基于裂尖塑性区矢径的结构断裂韧度预测方法[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(8): 1073-1082.

在线弹性断裂力学中,应力强度因子和断裂韧性是判断裂纹是否扩展的两个重要参数.一般采用标准试样测量材料的断裂韧性,在小范围屈服条件下用平面应变断裂韧性  $K_{IC}$  来表征.然而,试样的几何尺寸与厚度、裂纹的类型与深度、加载方式等因素的不同,都会引起裂纹尖端应力场的差异,这种现象被称为约束效应<sup>[4]</sup>.约束效应导致一些材料即使采用标准试样,其断裂韧性的测量值也会出现较大的波动.另外,在低约束的非标准试样中测量得到的断裂韧度,与标准试样中测量的平面应变断裂韧性  $K_{IC}$  之间,通常存在很大差异,这主要也是约束效应造成的.在这些情况下,平面应变断裂韧性  $K_{IC}$  无法描述实际的断裂过程.因此,如何将标准试样中测量的材料断裂韧性  $K_{IC}$ , 转换到低约束的非标准试样或者工程结构中,以反映实际的断裂行为,是一项重要的工作.

为了研究约束效应,发展了一系列的约束参数,例如  $T, Q, A_2, k_2, T_z, h, \phi, A_p, A_d, r_{p0}^{1/2}, \chi_p$  等<sup>[5-10]</sup>.在这些参数中,  $T$  和  $Q$  被一些标准和规范(R6、BS 7910、SINTAP 等)采纳,其中  $T$  适用于线弹性断裂力学,  $Q$  用于弹塑性断裂力学<sup>[10-11]</sup>.采用  $T$  参数(即面内  $T$  应力)来修正断裂韧性时,仅考虑了面内约束效应,忽视了面外约束的影响.在一些工程结构中,面内和面外约束效应同时存在,如果仍然采用基于  $T$  参数的修正模型,评估结果会有很大的误差,所以,发展一个能综合反映面内和面外约束效应的断裂韧性修正模型,显得尤为必要.

以前的研究<sup>[4-6,8,12]</sup>表明,裂尖塑性区能综合表征面内和面外的约束效应.本文将运用裂尖塑性区矢径,从理论上探索断裂韧性的修正模型和结构断裂韧度的预测方法;并以单边裂纹加筋板为例,分析该模型的合理性和可行性.

## 1 断裂韧性的约束修正理论

在各向同性、均匀的材料中,通常用渐近展开式来描述 I 型裂纹的裂尖应力场.当考虑奇异项和常数项时, I 型裂纹的三维裂尖应力场可表示为<sup>[13-14]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ 2\nu \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_{11} \\ 0 \\ T_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

式中,  $r$  和  $\theta$  为裂尖处的极坐标,  $\sigma_{ij}$  为应力分量,  $\nu$  为 Poisson 比,  $K_I$  为 I 型裂纹的应力强度因子,  $T_{11}$  为面内  $T$  应力,  $T_{33}$  为面外  $T$  应力.在小范围屈服条件下,分别用面内  $T$  应力  $T_{11}$  和面外  $T$  应力  $T_{33}$  来表征面内约束和面外约束.面内  $T$  应力  $T_{11}$  和面外  $T$  应力  $T_{33}$  的关系可表示为<sup>[14]</sup>

$$T_{33} = E\varepsilon_{33} + \nu T_{11}, \quad (2)$$

式中,  $E$  为弹性模量,  $\varepsilon_{33}$  为裂尖处面外方向上的应变.

### 1.1 基于面内 $T$ 应力的断裂韧性修正模型

考虑到约束效应对断裂韧性的影响,在一些标准和规范(如 R6、BS 7910、SINTAP 等)中,普遍采用面内  $T$  应力  $T_{11}$  对平面应变断裂韧性进行修正,即<sup>[11]</sup>

$$K_{IC}^T = \begin{cases} K_{IC}, & T_{11}/\sigma_Y \geq 0, \\ K_{IC} [1 + \alpha(-T_{11}/\sigma_Y)^k], & T_{11}/\sigma_Y < 0, \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $K_{IC}^T$  为面内  $T$  应力  $T_{11}$  修正后的断裂韧性,  $K_{IC}$  为平面应变断裂韧性,  $\sigma_Y$  为材料的屈服强度,  $\alpha$  和  $k$  为与材料相关的拟合系数.

采用面内  $T$  应力修正断裂韧性时,仅考虑了面内约束效应,而忽视了面外约束  $T_{33}$  的影响.

### 1.2 基于塑性区矢径的断裂韧性修正模型

工程结构中, 面内和面外约束效应往往是同时存在的, 裂尖塑性区能综合反映面内和面外的约束效应。对 I 型裂纹而言, 裂纹延长线方向上 ( $\theta = 0$ ) 的塑性区矢径, 即  $r_{p0}$ , 是表征约束效应的重要指标。

在先前的工作中, 考虑三维  $T$  应力时, 已经得到了改进的裂尖塑性区解析解<sup>[14]</sup>。根据该解析解,  $r_{p0}$  的正平方根(即  $r_{p0}^{1/2}$ ) 可以表示为<sup>[4-5]</sup>

$$r_{p0}^{1/2} = \psi_r \cdot K_I, \tag{4}$$

$$\psi_r = D_a |_{\theta=0}, \tag{5}$$

$$D_a^2 = \frac{1}{2\pi(1 + \delta_c(\theta))} \cdot \left[ \text{positive} \left( \frac{-D_1 + \sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0}}{2D_0}, \frac{-D_1 - \sqrt{D_1^2 - 4D_2D_0}}{2D_0} \right) \right]^2, \tag{6}$$

$$D_0 = 2(T_{11}^2 - T_{11}T_{33} + T_{33}^2) - 2\sigma_Y^2, \tag{7}$$

$$D_1 = \cos \frac{\theta}{2} [ -3T_{11}(\cos \theta - \cos(2\theta)) + 2(1 - 2\nu)(T_{11} - 2T_{33}) ], \tag{8}$$

$$D_2 = \frac{3}{4}(1 - \cos(2\theta)) + (1 - 2\nu)^2(1 + \cos \theta), \tag{9}$$

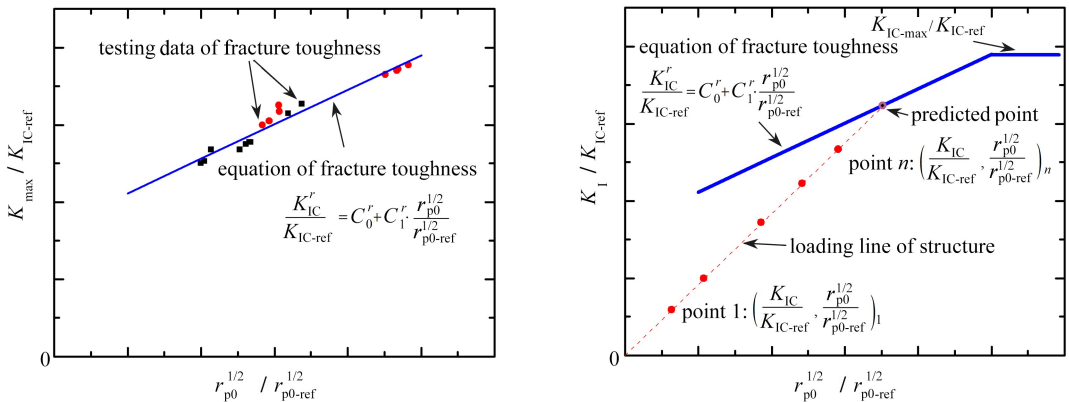
$$D_1^2 - 4D_2D_0 \geq 0, \quad D_0 \neq 0, \tag{10}$$

式中,  $D_a > 0, \delta_c(\theta)$  为修正因子。从上述表达式中可以看出, 塑性区矢径  $r_{p0}$  是  $T_{11}$  和  $T_{33}$  的函数。因此, 理论上塑性区矢径  $r_{p0}$  能综合反映面内和面外的约束效应。

对于一些金属材料(例如碳钢 34XH3MA、铝合金 2024-T351 和反应堆容器钢), 试样测得的断裂韧性值  $K_{max}$  与约束参数  $r_{p0}^{1/2}$  之间成近似的线性关系<sup>[4,6]</sup>。利用断裂韧性试验数据, 如图 1(a) 所示, 得出材料的断裂韧性方程为

$$\frac{K_{IC}^r}{K_{IC-ref}^r} = C_0^r + C_1^r \cdot \frac{r_{p0}^{1/2}}{r_{p0-ref}^{1/2}}, \tag{11}$$

式中,  $K_{IC}^r$  为约束参数  $r_{p0}^{1/2}$  修正后的断裂韧性,  $K_{IC-ref}^r$  为参考试样中测得的断裂韧性,  $r_{p0-ref}^{1/2}$  为参考试样对应的  $r_{p0}^{1/2}$  的值,  $C_i^r$  为多项式系数。



(a) 试验数据拟合的断裂韧性方程  
(a) The equation of fracture toughness fitted with testing data  
(b) 断裂韧度的预测模型  
(b) The prediction model for fracture toughness

图 1 基于塑性区矢径  $r_{p0}$  的断裂韧度修正模型

Fig. 1 The fracture toughness correction model based on plastic zone sizes  $r_{p0}$

### 1.3 基于 $r_{p0}$ 的结构断裂韧度预测方法

在塑性区矢径  $r_{p0}$  的基础上, 建立材料的断裂韧性方程后, 便可预测工程结构的断裂韧度。对于受载荷作用的含 I 型裂纹的结构, 通过有限元方法计算  $K_I, T_{11}$  和  $T_{33}$ , 并利用式(4)求出  $r_{p0}^{1/2}$ ; 改变载荷的大小, 便可得到一系列的坐标点  $(K_I/K_{IC-ref}, r_{p0}^{1/2}/r_{p0-ref}^{1/2})$ , 这些点的连线形成了结构的加载线, 如图 1(b) 所示。在小范围

屈服条件下,结构的加载线近似为一条直线,其可表示为<sup>[5]</sup>

$$\frac{K_I}{K_{IC-ref}} = k_r \cdot \frac{r_{p0}^{1/2}}{r_{p0-ref}^{1/2}}, \quad (12)$$

其中  $k_r$  为结构加载线的斜率,其可用下式计算:

$$k_r = \frac{r_{p0-ref}^{1/2}}{K_{IC-ref}} \cdot \frac{1}{\psi_r}. \quad (13)$$

定义结构的加载线与材料断裂韧性曲线的交点为预测点,如图 1(b) 所示,预测点对应的断裂韧度即为结构的断裂韧度.联立方程 (11) 和 (12),可得到预测点的断裂韧度为

$$K_{IC}^r = \left( C_0^r + \frac{C_0^r \cdot C_1^r}{k_r - C_1^r} \right) \cdot K_{IC-ref}. \quad (14)$$

在小范围屈服条件下,材料的断裂韧性有一个上限,其可通过试验测得.考虑材料断裂韧性的上限值  $K_{IC-max}$ ,则含 I 型裂纹结构的断裂韧度修正值  $K_{IC}^r$  可表示为

$$K_{IC}^r = \min \left\{ \left( C_0^r + \frac{C_0^r \cdot C_1^r}{k_r - C_1^r} \right) \cdot K_{IC-ref}, K_{IC-max} \right\}. \quad (15)$$

利用塑性区矢径  $r_{p0}$  预测结构的断裂韧度,是建立在断裂韧性试验数据的基础上,同时也从理论上将面内约束  $T_{11}$  和面外约束  $T_{33}$  的影响纳入到修正模型中.

## 2 裂纹结构、材料及有限元模型

### 2.1 单边裂纹加筋板

加筋板由平板和加强筋组成,如图 2 所示.平板长为  $H$ ,宽为  $W$ ,板厚为  $t$ ;加强筋长为  $H$ ,高为  $h_s$ ,筋厚度为  $t_s$ .平板两端受均布载荷  $\sigma_0$ ,加强筋两端为自由端.平板上含有长度为  $a$  的单边贯穿裂纹,加强筋没有破损.加筋板的几何参数如下:

$$W = 400 \text{ mm}, H/W = 2.00, t/H = 0.02, t_s/t = 1.00, h_s/t = 10.00, a/W = 0.10 \sim 0.90,$$

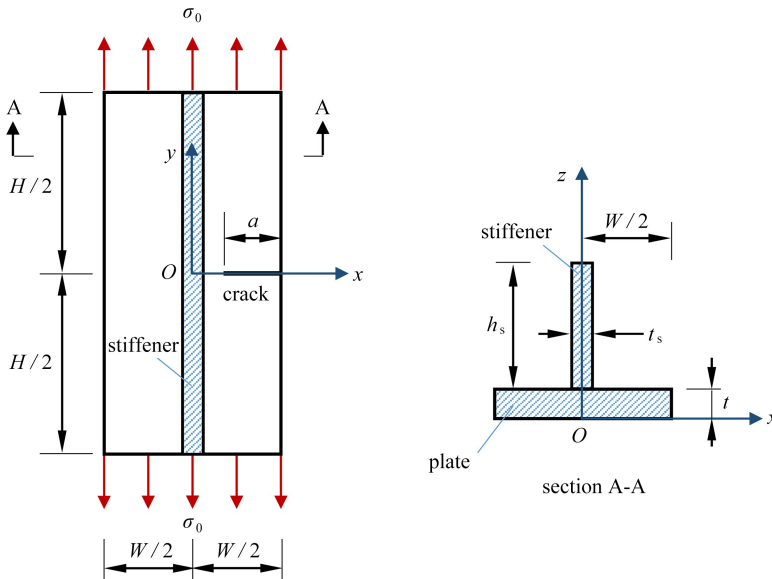


图 2 单边裂纹加筋板结构示意图

Fig. 2 The configuration of a single edge-cracked stiffened plate

### 2.2 材料

加筋板的材料为碳钢 34XH3MA<sup>[7]</sup>,其室温下的力学性能指标为:弹性模量  $E = 196.4 \text{ GPa}$ , Poisson 比  $\nu = 0.30$ , 屈服强度  $\sigma_Y = 790 \text{ MPa}$ , 极限强度  $\sigma_u = 992 \text{ MPa}$ . Shlyannikov 等<sup>[7]</sup>采用 SEN(B) 试样和 C(T) 试样测量了碳钢 34XH3MA 的断裂韧性, Huang 等<sup>[6]</sup>计算分析了试样的三维  $T$  应力和裂尖塑性区, 试样的试验数据及

相应的断裂参数如表 1 所示,断裂韧性测量值绘制在图 3 中.SEN(B) 和 C(T) 试样的尺寸均在 ASTM E399 推荐的标准试样范围之内,虽然试验结果满足小范围屈服条件 ( $r_{p0} \ll a$ ),然而断裂韧性测量值的差别却较大,如图 3 所示,测得的断裂韧性最大值是最小值的 1.5 倍以上,这说明约束效应对断裂韧性的影响是不容忽视的.另外,当试样的类型、裂纹长度和试样厚度都不同时,即面内和面外约束效应同时存在的情况下,材料的断裂韧性与相对厚度 ( $B/W$ ) 之间的相关性是较为离散的。

分析碳钢 34XH3MA 断裂韧性的试验数据,得出其平面应变断裂韧性  $K_{IC} = 55.28 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ ,小范围屈服条件下材料断裂韧性的上限值  $K_{IC-\text{max}} = 83.55 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ 。

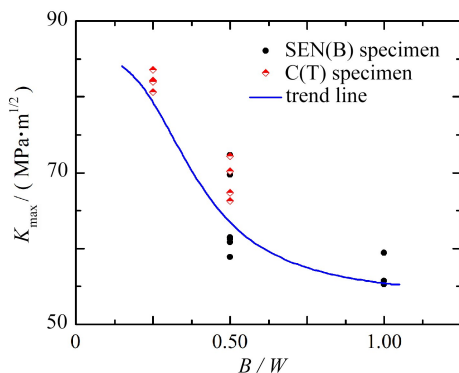


图 3 碳钢 34XH3MA 在各种相对厚度 ( $B/W$ ) 下的断裂韧性

Fig. 3 Fracture toughnesses of carbon steel 34XH3MA under various relative thicknesses ( $B/W$ )

表 1 碳钢 34XH3MA 断裂韧性的试验数据及相应的断裂参数<sup>[6-7]</sup>

Table 1 Measured fracture toughnesses and corresponding fracture parameters of carbon steel 34XH3MA<sup>[6-7]</sup>

specimen	$W/\text{mm}$	$B/W$	$a/W$	$K_{\text{max}} / (\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2})$	$T_{11} / \text{MPa}$	$T_{33} / \text{MPa}$	$r_{p0}^{1/2} / \text{mm}^{1/2}$	$r_{p0}/a$
SEN(B)-S-01	20	1.000	0.300	55.72	-31.70	-90.38	0.440 05	0.032
SEN(B)-S-02	20	1.000	0.605	55.28	94.05	-21.21	0.417 42	0.014
SEN(B)-S-03	20	1.000	0.620	59.42	105.90	-18.68	0.446 74	0.016
SEN(B)-S-04	20	0.500	0.245	72.35	-73.61	-221.50	0.723 29	0.107
SEN(B)-S-05	20	0.500	0.250	60.84	-58.97	-185.44	0.560 03	0.063
SEN(B)-S-06	20	0.500	0.445	61.44	45.28	-155.45	0.559 19	0.035
SEN(B)-S-07	20	0.500	0.445	69.70	51.40	-176.38	0.662 87	0.049
SEN(B)-S-08	20	0.500	0.610	58.91	108.88	-116.87	0.517 36	0.022
SEN(B)-S-09	20	0.500	0.615	61.25	115.75	-120.05	0.542 05	0.024
C(T)-S-01	40	0.500	0.350	67.36	125.35	-123.23	0.612 02	0.027
C(T)-S-02	40	0.500	0.350	70.17	130.67	-128.41	0.641 17	0.029
C(T)-S-03	40	0.500	0.625	66.28	151.25	-93.81	0.591 30	0.014
C(T)-S-04	40	0.500	0.645	72.13	163.25	-98.13	0.639 30	0.016
C(T)-S-05	40	0.250	0.380	82.12	169.98	-248.60	0.977 62	0.063
C(T)-S-06	40	0.250	0.425	83.55	187.50	-249.03	1.006 96	0.060
C(T)-S-07	40	0.250	0.490	80.67	192.03	-236.13	0.941 30	0.045
C(T)-S-08	40	0.250	0.475	82.00	194.25	-240.77	0.975 05	0.050

### 2.3 有限元模型

利用 ABAQUS 6.13 进行有限元分析,采用 C3D8R 单元建立单边裂纹加筋板的三维模型,在裂纹尖端设置奇异单元.在平板厚度和加强筋厚度方向上,都平均设置了 20 个单元,整个加筋板模型共有 231 920 个有限元单元.通过线弹性有限元分析,得到加筋板在不同裂纹长度下的应力强度因子  $K_I$  和三维  $T$  应力 ( $T_{11}$  和  $T_{33}$ )。

### 3 断裂分析的结果和讨论

#### 3.1 碳钢 34XH3MA 的断裂韧性方程

##### 3.1.1 面内 $T$ 应力 $T_{11}$ 修正的材料断裂韧性方程

碳钢 34XH3MA 断裂韧性的测量值,与试样厚度、裂纹长度等约束因素密切相关.从图 3 中可以发现,平面应变断裂韧性  $K_{IC} = 55.28 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ,是一个非常保守的值.当试样或结构的裂纹尖端不满足平面应变高约束条件时, $K_{IC}$  不能表征材料的断裂韧性.因此,利用约束理论对  $K_{IC}$  进行修正是十分必要的.在 R6、BS 7910 等标准中广泛运用面内  $T$  应力  $T_{11}$  来修正断裂韧性,即式(3).

根据文献[11]中的方法,可求出与材料相关的拟合系数,  $\alpha = 3.696$  和  $k = 1.385$ ; 将其代入式(3)中,可得到基于  $T_{11}$  应力修正的断裂韧性方程为

$$\frac{K_{IC}^T}{K_{IC}} = \begin{cases} 1, & T_{11}/\sigma_Y \geq 0, \\ 1 + 3.696 \times (-T_{11}/\sigma_Y)^{1.385}, & T_{11}/\sigma_Y < 0. \end{cases} \quad (16)$$

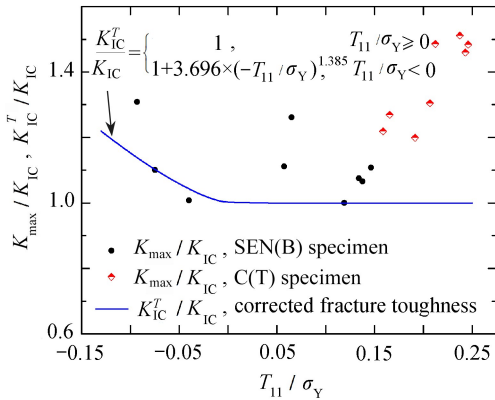
经  $T_{11}$  应力修正后的碳钢 34XH3MA 的断裂韧性,即  $K_{IC}^T$ ,如图 4(a)所示.由于该模型只修正了  $T_{11} < 0$  的情形,同时又忽视了  $T_{33}$  应力对断裂韧性的影响,所以修正后的断裂韧性  $K_{IC}^T$  与试验数据的差距很大.

##### 3.1.2 塑性区矢径 $r_{p0}$ 修正的材料断裂韧性方程

在碳钢 34XH3MA 断裂韧性试验数据(见表 1)的基础上,取 SEN(B)-S-02 为参考试样,即  $K_{IC-ref} = K_{IC} = 55.28 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ,  $r_{p0-ref}^{1/2} = 0.41742 \text{ mm}^{1/2}$ .根据图 1(a)中的方法,得出基于塑性区矢径  $r_{p0}$  修正的断裂韧性方程为

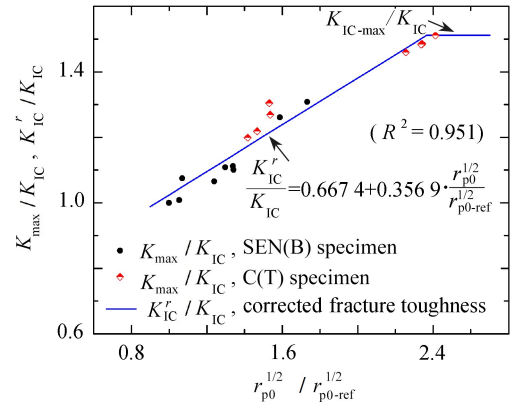
$$\frac{K_{IC}^r}{K_{IC}} = 0.6674 + 0.3569 \cdot \frac{r_{p0}^{1/2}}{r_{p0-ref}^{1/2}}. \quad (17)$$

在小范围屈服条件下,修正后的断裂韧性  $K_{IC}^r$  的最大值不超过  $K_{IC-max}$ ,即为  $83.55 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ .经塑性区矢径  $r_{p0}$  修正后的碳钢 34XH3MA 的断裂韧性  $K_{IC}^r$ ,如图 4(b)所示.显然,修正后的断裂韧性  $K_{IC}^r$  与试验数据吻合得非常好.这说明塑性区矢径  $r_{p0}$  能很好地表征面内和面外的约束效应,也体现了基于塑性区矢径  $r_{p0}$  的修正模型的优越性.



(a) 面内  $T$  应力  $T_{11}$  修正

(a) Corrected by the in-plane  $T$ -stress ( $T_{11}$ )



(b) 塑性区矢径  $r_{p0}$  修正

(b) Corrected by the plastic zone size ( $r_{p0}$ )

图 4 修正的碳钢 34XH3MA 断裂韧性与试验数据对比

Fig. 4 Comparisons of corrected fracture toughnesses and testing data on carbon steel 34XH3MA

材料的断裂韧性方程与试验数据的对比表明,基于面内  $T$  应力  $T_{11}$  修正的断裂韧性  $K_{IC}^T$ ,不能很好地反映碳钢 34XH3MA 的断裂韧性;而基于塑性区矢径  $r_{p0}$  修正的断裂韧性  $K_{IC}^r$ ,能准确地表征碳钢 34XH3MA 的断裂韧性.主要原因在于,前者忽视了面外约束  $T_{33}$  的作用,而后者则通过裂纹尖塑性区综合地考虑了面内约束  $T_{11}$  和面外约束  $T_{33}$  的效应.

### 3.2 单边裂纹加筋板的断裂分析

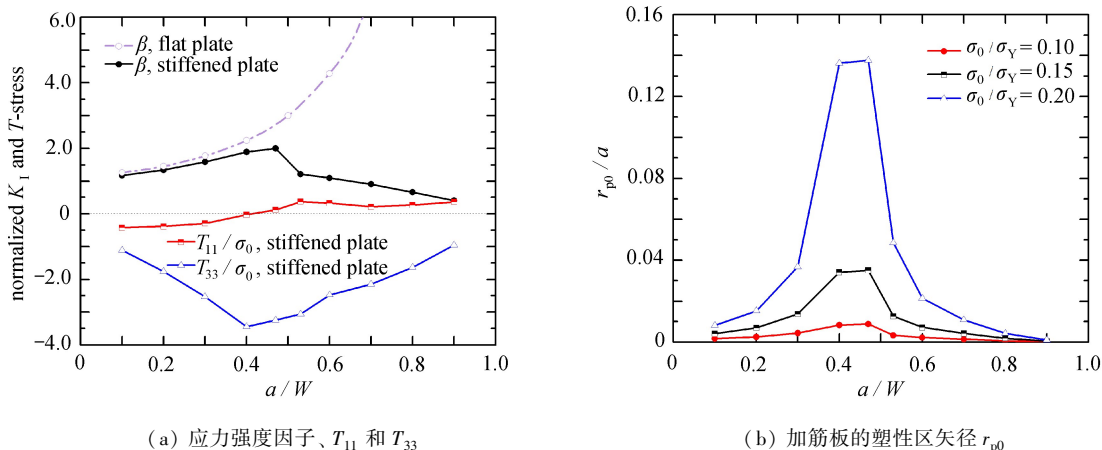
#### 3.2.1 塑性区矢径修正的加筋板断裂韧度

加筋板的应力强度因子  $K_I$ , 通常用无量纲形状系数  $\beta$  表示, 其定义为

$$\beta = K_I / (\sigma_0 \sqrt{\pi a}). \tag{18}$$

对单边裂纹加筋板的三维模型, 进行线弹性有限元分析, 得到中面的  $K_I$ ,  $T_{11}$  和  $T_{33}$ , 其无量纲参数如图 5(a) 所示. 另一方面, 对相应的单边裂纹平板 (不含加强筋), 也进行了三维有限元分析, 计算中面的  $K_I$  和  $\beta$ , 并将其  $\beta$  曲线绘制在图 5(a) 中. 通过对比分析发现, 完整的加强筋能有效地降低加筋板的应力强度因子. 这是因为完整的加强筋能承受部分应力, 对于改善裂尖应力场是有利的. 当裂尖靠近加强筋或者裂纹较长 ( $a/W \geq 0.50$ ) 时, 加强筋的作用尤为明显.

将  $K_I$ ,  $T_{11}$  和  $T_{33}$  的值代入式 (4) 中, 计算得出约束参数  $r_{p0}^{1/2}$  和塑性区矢径  $r_{p0}$ . 在典型的载荷水平 ( $\sigma_0/\sigma_Y$ ) 下, 加筋板裂尖塑性区矢径  $r_{p0}$  的特征如图 5(b) 所示. 当  $\sigma_0/\sigma_Y \leq 0.20$  时,  $r_{p0} \ll a$ , 即小范围屈服条件成立.



(a) The stress intensity factor,  $T_{11}$ -stress and  $T_{33}$ -stress (b) The plastic zone size ( $r_{p0}$ ) in the stiffened plate

图 5 加筋板的裂尖应力场及塑性区特征

Fig. 5 Characteristics of crack tip stress fields and plastic zones in the stiffened plate

在塑性区矢径  $r_{p0}$  的基础上, 利用断裂韧度的预测模型, 即图 1(b) 所示的方法, 可求出不同裂纹长度下加筋板的断裂韧度  $K_{IC}^r$ , 如图 6(a) 所示. 为了便于比较, 将平面应变断裂韧性  $K_{IC}$  和面内  $T$  应力  $T_{11}$  修正的断裂韧度  $K_{IC}^T$  绘制在图 6(a) 中. 值得一提的是,  $T_{11}$  修正的加筋板断裂韧度  $K_{IC}^T$ , 可通过数值迭代方法求取<sup>[5,15]</sup>.

从图 6(a) 中可以看出, 平面应变断裂韧性  $K_{IC}$  过于保守, 不能表征加筋板的断裂韧度.  $T_{11}$  修正模型只修正  $T_{11} < 0$  时的断裂韧度, 如式 (3)、(16) 所示; 当  $T_{11} > 0$  时,  $K_{IC}^T$  与平面应变断裂韧性  $K_{IC}$  重合. 因此,  $T_{11}$  修正的断裂韧度  $K_{IC}^T$  无法准确地预测加筋板的韧性. 基于塑性区矢径的断裂韧度  $K_{IC}^r$ , 是建立在试验数据的基础上, 综合考虑了面内和面外约束的影响, 能准确地预测加筋板的断裂韧度. 与平面应变断裂韧性  $K_{IC}$  相比, 修正后的加筋板的断裂韧度  $K_{IC}^r$  明显升高, 绝大多数情况下上升了 10% 以上, 升高的最大幅度约为 37%.

#### 3.2.2 加筋板的许用载荷分析

在传统的断裂分析中, 根据平面应变断裂韧性  $K_{IC}$ , 计算得到加筋板的许用载荷; 考虑约束效应后, 加筋板的许用载荷也可相应的求出.

$$\sigma_{\max} = K_{IC} / (\beta \sqrt{\pi a}), \tag{19}$$

$$\sigma_{\max}^T = K_{IC}^T / (\beta \sqrt{\pi a}), \tag{20}$$

$$\sigma_{\max}^r = K_{IC}^r / (\beta \sqrt{\pi a}), \tag{21}$$

式中,  $\sigma_{\max}$  为传统断裂分析中加筋板的许用载荷,  $\sigma_{\max}^T$  为  $T_{11}$  修正模型得到的许用载荷,  $\sigma_{\max}^r$  为塑性区矢径  $r_{p0}$  修正模型得到的许用载荷.

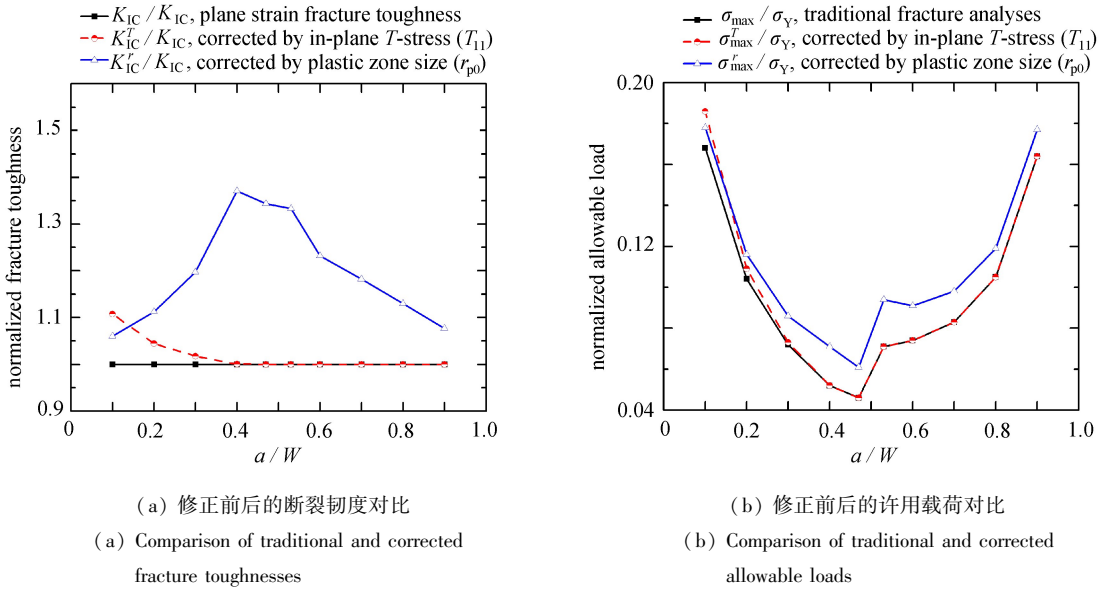


图6 加筋板的断裂韧度和许用载荷

Fig. 6 Fracture toughnesses and allowable loads in the stiffened plate

在3种情况下,分别计算加筋板的许用载荷  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{max}^T$  和  $\sigma_{max}^r$ ,其结果如图6(b)所示.许用载荷都在  $0.20\sigma_Y$  以内,显然满足小范围屈服条件.在传统的断裂分析中, $\sigma_{max}$  低估了加筋板的许用载荷.当裂纹很短时,面内  $T$  应力  $T_{11}$  修正模型的评估值  $\sigma_{max}^T$  高估了加筋板的许用载荷;随着裂纹长度的增加,其计算值与传统断裂分析的结果  $\sigma_{max}$  一致.当采用基于塑性区矢径  $r_{p0}$  的修正模型时,其计算结果  $\sigma_{max}^r$  总体上明显大于前两者.与传统断裂分析的结果  $\sigma_{max}$  相比,大多数情况下  $\sigma_{max}^r$  的增幅都在10%以上,最大增幅超过37%.这说明加筋板的实际承载能力比传统断裂分析中的计算结果要大得多.

### 3.3 面内和面外约束效应对断裂参数的影响

传统的断裂分析采用平面应变断裂韧性  $K_{IC}$ ,没有考虑约束效应,应力强度因子起主导作用<sup>[16]</sup>;基于面内  $T$  应力  $T_{11}$  的修正模型,仅仅考虑了面内约束效应;基于塑性区矢径  $r_{p0}$  的修正模型,综合考虑了面内和面外约束效应.这3种情况下,计算得到的断裂韧度和许用载荷如图6所示.从图中可以看出,不仅面内约束  $T_{11}$  对断裂参数有影响,面外约束  $T_{33}$  对加筋板的断裂韧度和许用载荷的影响也是不容忽视的.另一方面,碳钢34XH3MA断裂韧性的试验数据,如图3和图4所示,也证实了面内约束  $T_{11}$  和面外约束  $T_{33}$  均对断裂韧度有着重要影响.

在面内约束  $T_{11}$  占主导的试样或结构中,采用面内  $T$  应力  $T_{11}$  来修正断裂韧度和许用载荷是合理的,这是该方法被R6、BS 7910、SINTAP等标准或规范普遍采纳的原因.然而,在一些面内约束效应和面外约束效应都比较突出的工程结构中,面内  $T$  应力  $T_{11}$  修正模型的评估结果就不太准确.例如单边裂纹加筋板,其  $T_{11}$  的变化较小,且大部分为正值,而  $T_{33}$  的变化十分显著,如图5(a)所示;在这种情况下,面内  $T$  应力  $T_{11}$  修正模型只修正了  $T_{11} < 0$  时的情况,而忽视了  $T_{11} > 0$  的情况和  $T_{33}$  变化的影响,必然会造成评估结果的不准确性.另外,在碳钢34XH3MA的试样中,  $T_{11}$  正值的变化幅度也非常大,如图4(a)所示,而面内  $T$  应力  $T_{11}$  修正方程中没有考虑正  $T_{11}$  应力的影响,这是该模型评估结果不准确的原因所在.

鉴于面内和面外约束共同作用的重要性,以塑性区矢径  $r_{p0}$  为桥梁,综合考虑二者的影响,建立基于塑性区矢径  $r_{p0}$  的修正模型,其与碳钢34XH3MA的试验结果吻合得非常好,为准确地评估结构的断裂行为奠定了基础.

## 4 结 论

工程结构的断裂韧度,普遍受到约束效应的影响.本文从裂尖塑性区的角度,在小范围屈服条件下,发展

了结构断裂韧度的预测方法,并对单边裂纹加筋板的断裂韧度和许用载荷进行了分析.通过理论推导、试验数据验证和有限元计算分析,得出了如下结论:

1) 以塑性区矢径  $r_{p0}$  为基础,从理论上建立了材料断裂韧性的修正模型,提出了结构断裂韧度的预测方法.该模型从理论上将面内约束  $T_{11}$  和面外约束  $T_{33}$  的影响纳入到修正模型中.碳钢 34XH3MA 的试验数据表明,与面内  $T$  应力  $T_{11}$  的修正模型相比,基于塑性区矢径  $r_{p0}$  的修正模型更准确、更合理,能综合地反映面内和面外的约束效应.

2) 面内约束  $T_{11}$  和面外约束  $T_{33}$  对加筋板断裂参数(断裂韧度、许用载荷等)的影响都十分重要,均不能忽视.

3) 采用平面应变断裂韧性  $K_{Ic}$  来分析加筋板等工程结构的断裂行为时,过于保守.在  $T_{33}$  或正的  $T_{11}$  变化幅度较大的工程构件中,采用基于面内  $T$  应力  $T_{11}$  的修正模型来计算断裂韧度和许用载荷,是不准确的,也是不合理的.

一般而言,在设计过程中,为了保证足够的安全储备,采用保守的设计参数(平面应变断裂韧性  $K_{Ic}$ ) 是合理的.在现有结构的断裂分析和安全评估中,为了得到较准确的断裂韧度,宜采用本文的断裂韧度的预测方法.

**致谢** 本文作者衷心感谢云南大学滇池学院校级科学研究基金(2024XJ25)对本文的资助.

#### 参考文献(References):

- [1] 刘葳,蔡庆港,金腾龙,等. 极端循环载荷下加筋板失效机理与极限强度[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2023, **44**(8): 1275-1282. (LIU Wei, CAI Qinggang, JIN Tenglong, et al. Failure mechanism and ultimate strength of stiffened plates under extreme cyclic load[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2023, **44**(8): 1275-1282. (in Chinese))
- [2] 刘宸宇, 骆烜赫, 刘康翔, 等. 基于平铺刚度法的弧形加筋板的轻量化设计[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(8): 953-964. (LIU Chenyu, LUO Xuanhe, LIU Kangxiang, et al. Lightweight design of arc rib stiffened plates based on the smeared stiffener method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(8): 953-964. (in Chinese))
- [3] HUANG X L, LIU Y H, HUANG X B, et al. Crack arrest behavior of central-cracked stiffened plates under uniform tensions[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, **133**: 704-719.
- [4] 黄兴玲. 考虑约束效应的加筋板断裂行为研究[D]. 北京: 清华大学, 2019. (HUANG Xingling. Research on fracture behavior of stiffened plates in consideration of constraint effects[D]. Beijing: Tsinghua University, 2019. (in Chinese))
- [5] HUANG Xingling. Combined effects of in-plane and out-of-plane constraints on fracture behaviors in central-cracked stiffened plates: a model based on plastic zone size[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, **255**: 107958.
- [6] HUANG Xingling, LIU Yinghua, HUANG Xiangbing. New constraint parameters based on crack tip plastic zone: theoretical derivations and effectiveness verification[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, **190**: 129-147.
- [7] SHLYANNIKOV V N, BOYCHENKO N V, TUMANOV A V, et al. The elastic and plastic constraint parameters for three-dimensional problems[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, **127**: 83-96.
- [8] MU M Y, WANG G Z, XUAN F Z, et al. Unified correlation of in-plane and out-of-plane constraints with cleavage fracture toughness[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2015, **80**: 121-132.
- [9] LV J, YU L, DU W, et al. Theoretical approach of characterizing the crack-tip constraint effects associated with material's fracture toughness[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2018, **88**(9): 1637-1656.

- [10] 彭凡, 董世明. 一类非均布载荷下中心裂纹圆盘  $T$  应力分析[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(7): 766-775. (PENG Fan, DONG Shiming.  $T$ -stress in a centrally cracked Brazilian disk under nonuniform pressure load [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(7): 766-775. (in Chinese))
- [11] SEAL C K, SHERRY A H. Predicting the effect of constraint on cleavage and ductile fracture toughness using area contour toughness scaling[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, **186**: 347-367.
- [12] TONGE S M, SIMPSON C A, REINHARD C, et al. Unifying the effects of in and out-of-plane constraint on the fracture of ductile materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, **141**: 103956.
- [13] ANDERSON T L. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*[M]. 3rd ed. New York: CRC Press, 2005: 25-101.
- [14] HUANG Xingling, LIU Yinghua, HUANG Xiangbing. Analytical characterizations of crack tip plastic zone size for central-cracked unstiffened and stiffened plates under biaxial loading[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, **206**: 1-20.
- [15] HUANG Xingling, LIU Yinghua. Effects of  $T$ -stress on fracture behavior of central-cracked stiffened plate[J]. *Key Engineering Materials*, 2019, **795**: 389-394.
- [16] 徐华, 曹政, 邹云鹏, 等. 裂纹面分布加载裂尖 SIFs 分析的广义参数 Williams 单元[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(7): 752-760. (XU Hua, CAO Zheng, ZOU Yunpeng, et al. Williams elements with generalized degrees of freedom for crack tip SIFs analysis under crack surface distributed loading[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(7): 752-760. (in Chinese))