

两种蠕滑理论黏滑分界线的解析推导及其应用*

程 畅¹, 王垚韡², 陆晨旭², 陈迪来²

(1. 常州工业职业技术学院, 江苏 常州 213164;

2. 上海应用技术大学, 上海 201418)

摘要: 解析模型可以更好地理解蠕滑、自旋对黏滑区分布的影响,并快速确定接触斑黏滑分布.为此,推导了 Kalker 简化理论和 Polach 理论的黏滑边界线解析表达式,并将其应用于轮轨磨耗计算.计算结果表明:蠕滑率及接触斑长短轴比值较小时,两种理论得到的黏滑分区及应力分布一致性较好,随着蠕滑率和长短轴比值增加,结果逐渐出现差异.轨面湿滑状态下,滑动区比例会明显增加,但是磨耗速率降低了 20%~30%;制动等级对磨耗速率有显著影响,与常用制动相比,紧急制动使得磨耗大幅增加;列车速度提高使得轮轨滑动速度增加,加剧了磨耗速率.

关键词: Polach 理论; Hertz 接触; 黏滑分区; 轮轨蠕滑; 轮轨磨耗

中图分类号: TH212; TH213.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450317

Derivations and Applications of Stick-Slip Boundaries for 2 Creep Theories

CHENG Chang¹, WANG Yaowei², LU Chenxu², CHEN Dilai²

(1. *Changzhou Vocational Institute of Industry Technology,*

Changzhou, Jiangsu 213164, P.R.China;

2. *Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, P.R.China*)

Abstract: The analytical solution helps better understand the effects of creep and spin on the stick-slip zone distributions and quickly determine the stick-slip distributions of contact patches. Therefore, the analytical expressions of stick-slip boundaries of the Kalker simplified theory and the Polach theory were derived and applied to the wheel-rail wear calculation. The calculation results show that, with small creepages and major axis-to-minor axis ratios of the contact patches, the stick-slip divisions and stress distributions obtained by the 2 theories are consistent. With the increases of the creepage and the major axis-to-minor axis ratio, the results gradually differ. For the wet rail surface, the slip zone proportion will increase significantly, but the wear rate will decrease by 20%~30%. The braking level has a significant effect on the wear rate, and the emergency braking causes a significant increase in wear compared to the normal braking. The increase of the train speed raises the wheel-rail sliding speed and aggravates the wear rate.

Key words: Polach theory; Hertz contact; stick-slip division; wheel-rail creep; wheel-rail wear

* 收稿日期: 2024-11-20; 修订日期: 2025-03-24

基金项目: 上海科技创新行动计划(21210750300);上海启明星计划(22YF1447600)

作者简介: 程畅(1970—),男,教授(E-mail: chengnabc@163.com);

陆晨旭(1994—),男,讲师,博士(通讯作者. E-mail: 18810327668@163.com).

引用格式: 程畅,王垚韡,陆晨旭,陈迪来.两种蠕滑理论黏滑分界线的解析推导及其应用[J].应用数学和力学,2025,46(8):1050-1063.

0 引 言

截止 2024 年底,国家高速铁路运营里程已突破 4.8 万 km,高铁正逐渐成为民众出行的首选方式.然而,由于其高速运行、发车间隔紧凑以及车流密集的特点,车轮与轨道之间的碰撞变得频繁,轮轨相互作用显著增强,进而加剧了车轮与钢轨的磨损程度及接触疲劳问题.影响轮轨磨损及滚动接触疲劳的关键因素为轮轨界面力学行为:整体运动(法向和切向的蠕滑)、局部运动(两个物体的弹性变形)和摩擦过程(表面颗粒的相互作用).需要注意的是,合理的轮轨蠕滑理论是分析这些轮轨间界面力学行为的基础,因此,国内外众多专家投入了大量精力开展轮轨关系系列研究.最早的轮轨接触理论可以追溯到 1882 年的 Hertz 理论^[1],Hertz 计算了两个曲面弹性体接触应力分布问题^[2].在此基础上,研究人员进一步形成了多种轮轨滚动接触理论.Carter^[3]提出了经典的二维滚动接触蠕滑率-力模型,该模型主要用于求解轮轨间的纵向蠕滑力,但是其研究思路为后续三维滚动研究提供了有效手段.Vermeulen 和 Johnson^[4]提出了无自旋三维轮轨滚动接触理论,即 Vermeulen-Johnson 模型,该模型在车辆动力学领域得到了广泛应用.1967 年,Kalker^[5]基于 Galin 定理给出了三维形式的线性蠕滑力-率模型,该理论只能适用小蠕滑和小自旋情形.1979 年,Kalker^[6]以 Duvaut-Lions 变分原理为基础发展了三维滚动接触完全理论,该理论是目前为止世界上最为完善的轮轨接触理论,但计算效率极低不适合车辆动力学在线仿真.为了寻找适合工程计算的蠕滑力快速求解模型,1982 年,Kalker^[7]提出了一种滚动接触简化理论,其配套数值程序计算效率很高.1983 年,Shen 与 Hedrick 等^[8]改进 Vermeulen-Johnson 的三次曲线型蠕滑率/力计算模型,提出了 Shen 理论,该理论考虑了自旋作用的影响.1999 年,Polach^[9]采用解析法推导出了一种轮轨力快速求解算法,与 FastSIM 算法相比,该算法在提高计算效率的同时又保持了计算精度.目前,Kalker 简化理论与 Polach 理论在车辆动力学仿真中得到了广泛应用.罗仁等^[10]构建了车辆多体动力学与车轮磨耗的耦合模型,并通过对比分析 Archard 磨耗模型、基于摩擦功的磨耗模型以及基于磨耗指数的磨耗模型,探讨了这些模型在预测高铁车轮型面磨耗发展和分布方面的差异.另一方面,丁军君等^[11]以 C80 货车为研究实例,依据 Pearce、Zobory、Jendel 和 Braghin 四种磨耗模型,深入分析了轴重、速度、曲线半径以及车轮硬度对车轮踏面磨耗的影响.此外,朱文良等^[12]在 Polach 黏着模型的基础上,结合滑动功率和滑动能进行了改进,该改进模型能更准确地模拟轮轨间的低黏着状态,并可直接应用制动防滑控制的实时仿真.安博洋等^[13]基于 Polach 方法,详细调查了衰减因子、函数型摩擦因数、轮轨接触几何、轴重和车辆运行速度对轮轨蠕滑曲线的影响规律.王平等^[14-15]利用实测数据对 Polach 模型进行了修正.陈爽等^[16]基于 FastSIM 算法和 TRIAL 算法提出了一种新的非 Hertz 切向算法.Yang 等^[17]建立了地铁车辆弹性车轮模型,分别研究了弹性车轮在低速驱动、低黏着高速行驶、惰行工况下纵向振动规律及影响因素.鲁昌霖等^[18]研究了制动工况下,轮轨蠕滑对高速列车非线性振动的影响.Zirek 等^[19]提出了一种基于滑模控制的防滑控制算法,可以控制轮对滑移量和改善车辆牵引能力.Qi 等^[20]采用 FastSIM 法计算磨损参数,分析了直线和曲线条件下电机谐波转矩对高速列车磨损参数和磨损深度的影响.王志强等^[21]、李可等^[22]采用多体动力学模型,研究了谐波磨耗作用下轮轨蠕滑特性及车辆振动响应.Xiao 等^[23]和 Lu 等^[24]分析了低黏着条件下轮轨黏滑冲击作用.

上述研究主要利用 FastSIM 算法及 Polach 快速算法进行车辆动力学性能仿真及轮轨界面伤损研究,很少从解析角度分析这两种蠕滑理论中黏滑区的分布情况.值得指出的是,采用黏滑分布解析解来计算轮轨磨耗是省时的.因此,本文首先推导了 Kalker 简化理论及 Polach 蠕滑理论中黏滑区分界线的数学解析式.接着,详细对比了两种蠕滑理论在黏滑区分布、应力分布及蠕滑力/率曲线特性等方面的差异.最后,将它们应用到轮轨磨耗计算中,分析了制动等级、轨面状态、运行速度对轮轨磨耗速率的影响,以期对轮轨磨耗研究提供一些指导.

1 接触斑黏滑区划分解析解

1.1 简化理论

为提升计算效率,Kalker 提出了一种简化理论.该理论基于以下假设:接触区内任意位置的弹性位移仅依赖于该点所受的力,且某一方向上的位移仅由该方向上的力决定.此外,为确保接触点处力与变形的协调

性,理论中将法向压力分布由椭圆分布调整为抛物线分布.接触区的应力分布具体如式(1)所示.为实现数值求解, Kalker 开发了 FastSIM 程序,用于计算切向力与滑动量:

$$\begin{cases} p_x(x, y) = -\frac{\xi_x(a_L - x)}{L_1} + y\frac{\xi_{sp}}{L_3}(a_L - x), \\ p_y(x, y) = -\frac{\xi_y(a_L - x)}{L_2} - \frac{\xi_{sp}}{2L_3}(a_L^2 - x^2), \\ p_z(x, y) = -p_0\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right], p_0 = \frac{2N}{\pi ab}, \end{cases} \quad (1)$$

式中, p_0 为法向应力峰值; N 为法向轮轨力; L_1, L_2, L_3 分别为沿 x 和 y 轴, 绕 z 轴方向的柔度系数; a, b 为接触斑长短轴之半; a_L 为接触斑前沿横坐标; ξ_x, ξ_y, ξ_{sp} 分别代表纵向、横向及自旋蠕滑率.

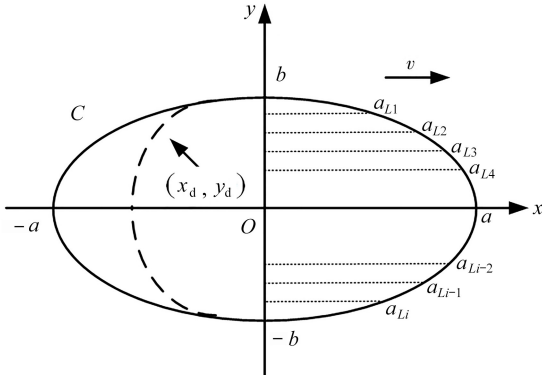


图1 椭圆接触斑

Fig. 1 The elliptical contact patch

为了满足无限大弹性半空间的假定,对上述柔度系数进行修正,采用加权平均的方式,即取

$$L = \frac{|\xi_x|L_1 + |\xi_y|L_2 + \sqrt{ab}|\xi_{sp}|L_3}{(\xi_x^2 + \xi_y^2 + ab\xi_{sp}^2)^{1/2}}. \quad (2)$$

设一般 Hertz 滚动接触问题的接触斑形状如图 1 所示,约定蠕滑方向与坐标轴方向一致,自旋方向符合右手螺旋定则,即沿着 x 正方向转向 y 正方向.椭圆接触区用方程式表示为

$$C: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1. \quad (3)$$

设 (x_d, y_d) 为 C 中黏滑区的分界线,由 Coulomb 定律知

$$|p| = (p_x^2(x_d, y_d) + p_y^2(x_d, y_d))^{1/2} = fp_z(x_d, y_d), \quad (4)$$

式中, f 为摩擦因数.将式(1)中的应力表达代入上式得

$$\frac{(a_L - x)^2}{L^2} (\xi_x - y\xi_{sp})^2 + \frac{(a_L - x)^2}{L^2} \left(\xi_y + \frac{(a_L + x)}{2}\xi_{sp}\right)^2 = f^2 p_0^2 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right)^2. \quad (5)$$

又因为 a_L 为接触区前沿横坐标,即

$$\left(\frac{a_L}{a}\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2\right). \quad (6)$$

代入式(5)得

$$\frac{(a_L - x)^2}{L^2} (\xi_x - y\xi_{sp})^2 + \frac{(a_L - x)^2}{L^2} \left(\xi_y + \frac{(a_L + x)}{2}\xi_{sp}\right)^2 = f^2 \frac{p_0^2}{a^4} (a_L - x)^2 (a_L + x)^2, \quad (7)$$

式中,当 $x = a_L$, 等式恒成立,无讨论意义;若 $x \neq a_L$, 则式(7)可写成

$$(\xi_x - y\xi_{sp})^2 + \left(\xi_y + \frac{(a_L + x)}{2}\xi_{sp}\right)^2 = L^2 f^2 \frac{p_0^2}{a^4} (a_L + x)^2, \quad (8)$$

化简得

$$\left(\frac{L^2 f^2 p_0^2}{a^4} - \left(\frac{\xi_{sp}}{2}\right)^2\right) (a_L + x)^2 - \xi_y \xi_{sp} (a_L + x) - (\xi_x - y\xi_{sp})^2 - \xi_y^2 = 0. \quad (9)$$

式(9)即为黏滑分界线的数学解析式,其为关于 x 的一元二次方程,根据求根公式计算出 (x, y) , 即为一般情况黏滑分界线坐标.

若 $\xi_{sp} = 0$, 即纯蠕滑情况:

$$x = -a_L + \frac{a^2}{Lf p_0} (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2}, \quad |x| \leq a, \quad (10)$$

$$(\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2} < \frac{Lfp_0}{a}. \quad (11)$$

对于纯蠕滑工况,当满足式(11)时,黏着区与滑动区在接触斑内共存,其分界线曲率与接触斑左半边界一致.可以看出,当应力峰值、摩擦因数及 $a \times b$ 乘积保持恒定时,接触斑进入饱和状态的临界蠕滑率与 a 成反比,即 a 越大,接触斑越易进入滑动状态.

若 $\xi_x = \xi_y = 0$, 即纯自旋情况:

$$x = -a_L + \frac{y\xi_{sp}}{\sqrt{\left(\frac{L^2 f^2 p_0^2}{a^4} - \frac{\xi_{sp}^2}{4}\right)}}, \quad |x| \leq a, \quad (12)$$

$$\xi_{sp} < \frac{2Lfp_0}{a^2}. \quad (13)$$

对于纯自旋工况,当满足式(13)时,黏着区和滑动区在接触斑共存.分析可知,当应力峰值、摩擦因数及 $a \times b$ 乘积保持不变时,接触斑进入饱和状态的蠕滑率极限与 a^2 成反比,即 a 越大,接触斑越容易进入滑动状态.

1.2 Polach 理论

20 世纪末,Polach 提出了一种高效蠕滑模型.该模型假设接触斑呈椭圆分布,其法向接触严格遵循 Hertz 理论.模型中,切向应力与蠕滑率成正比,且其大小随应力点距接触斑前沿的距离线性增大;比例系数记为 C_s , 其表征两接触物体的弹性特性,即两物体的切向接触刚度.切向力分布满足 Coulomb 摩擦定律,应力在滑动区达到极限值,即滑动摩擦力最大值.

根据 Polach 假定,黏着区应力可以表达如下:

$$\begin{cases} \tau_x(x, y) = -C_s \frac{\xi_x}{s} (a_L - x), \\ \tau_y(x, y) = -C_s \frac{\xi_y}{s} (a_L - x), \\ \sigma(x, y) = -q_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \end{cases} \quad (14)$$

$$a_L = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad q_0 = \frac{3N}{2\pi ab}, \quad s = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}. \quad (15)$$

设 (x_d, y_d) 为黏滑区的分界线,由 Coulomb 定律知

$$|\tau| = (\tau_x^2 + \tau_y^2)^{1/2} = f\sigma. \quad (16)$$

将式(15)代入上式得

$$C_s s (a_L - x) = f q_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (17)$$

整理得到

$$(a_L - x)^2 = \left(\frac{f q_0}{C_s a s}\right)^2 (a_L - x)(a_L + x). \quad (18)$$

当 $x = a_L$, 等式恒成立,无讨论意义;若 $x \neq a_L$, 则可解得

$$x = a_L \frac{\left(1 - \left(\frac{f q_0}{C_s a s}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{f q_0}{C_s a s}\right)^2\right)}. \quad (19)$$

式(19)为分界线的数学表达式,分析可知,分界线的上下端点分别为椭圆的上下边界点 $(0, b)$, $(0,$

- b)。当蠕滑率趋近于0时,分界线趋近于接触斑后边界形状;当 $s = fq_0/(C_s a)$ 时,分界线 y 轴平行;当蠕滑率趋近于1时,分界线趋近于接触斑前边界形状。值得注意的是,当压力峰值、摩擦因数及 $a \times b$ 乘积保持恒定时,接触斑进入饱和状态的临界蠕滑率与 a^2 成反比,即 a 越大,接触斑越易进入滑动状态。

1.3 模型验证

为了验证理论分析的正确性,分别采用数值算法(FastSIM)和基于简化理论的解析方法计算接触斑黏滑区划分。接触几何参数、材料参数如表1所示。

表1 接触参数

Table 1 Parameters of wheel/rail contact

material parameters and axle weight	major and minor axes/mm	Kalker coefficient
$f = 0.3, N = 100 \text{ kN}, G = 8.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$	$a = 12, b = 6$	$C_{11} = 5.10, C_{22} = 4.90, C_{23} = 2.62$
	$a = 8.5, b = 8.5$	$C_{11} = 4.12, C_{22} = 3.67, C_{23} = 1.47$
	$a = 6, b = 12$	$C_{11} = 3.62, C_{22} = 3.01, C_{23} = 0.93$

图2中给出了纯蠕滑、纯自旋和蠕滑+自旋3种典型工况的黏滑分布情况。由图可知,解析法计算得到的分布图与数值法吻合度非常高。

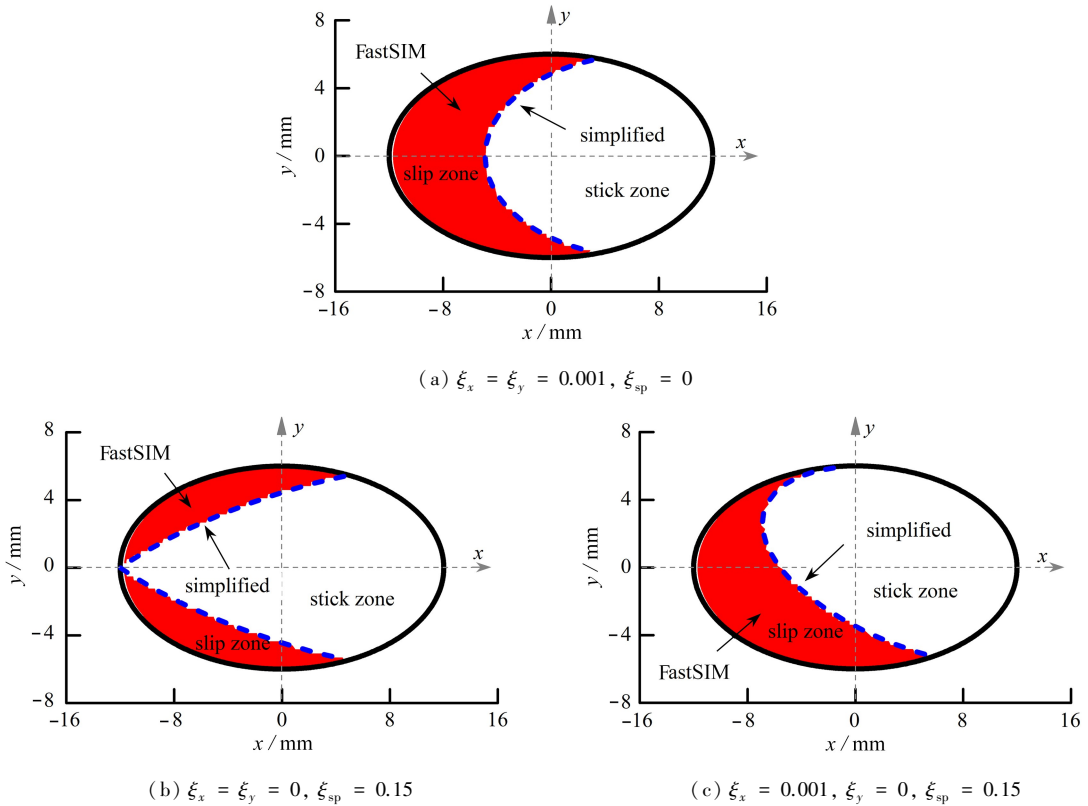


图2 黏滑区划分

Fig. 2 Stick-slip zone divisions

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

图2(a)所示为中等纯蠕滑的情形,滑动区沿 x 轴对称分布,位于车轮滚动方向接触斑后端位置,黏滑区分界线为一段椭圆弧。需要指出的是,随着蠕滑率增加,左边边界将向右侧移动,直至黏着区消失。图2(b)所示为中等自旋的情形,滑动区主要分布于接触斑后端两侧位置,黏着区呈现典型的“尖型”,从前沿延伸到后沿 $(-a, 0)$ 点处。值得指出的是,当自旋增加时,滑动区面积将增加,分界线曲率变小,逐渐趋近于 x 轴。图2(c)所示为纵向蠕滑与自旋组合的情形,滑动区呈现上小下大的非对称分布,这是因为 x 轴上方自旋和蠕滑引起的纵向蠕滑力方向相反,互相抵消造成滑动区减小;而 x 轴下方两者引起的纵向蠕滑力方向相同,相互叠加导致滑动区增加。

2 两种蠕滑理论对比

为分析不同蠕滑率下简化模型与 Polach 理论计算结果的差异,设定横向与纵向蠕滑率分别为 0.000 5, 0.001,0.002,且 $a/b = 2$,分别采用两种方法进行计算。

图 3 展示了不同蠕滑率下的黏着-滑动分布情况.结果表明,随着蠕滑率增大,接触斑的滑动区面积逐步扩大.以简化模型计算结果为例,三种蠕滑率对应的滑动区面积占比分别为 19.1%,37.0%和 70.8%.当蠕滑率较小时,Polach 理论与 Kalker 方法所得的黏着-滑动分布一致性较高;随着蠕滑率增加,二者差异逐渐显著。

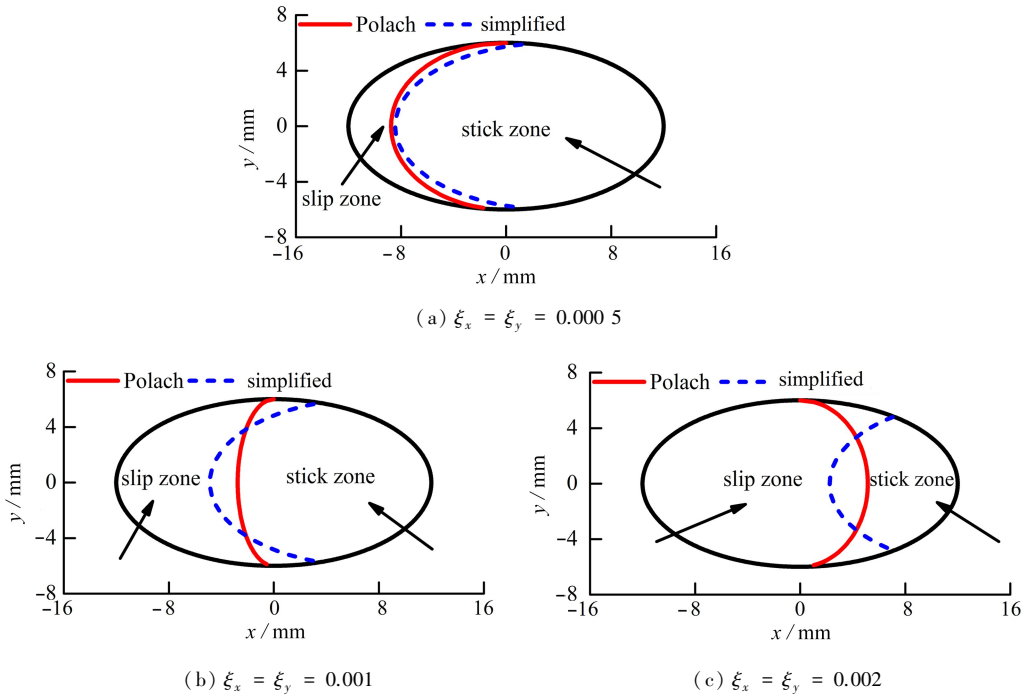


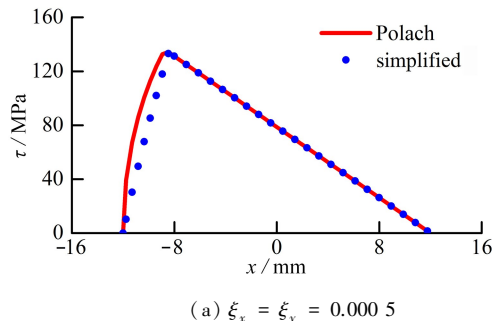
图 3 不同蠕滑率条件下的黏滑区划分

Fig. 3 Stick-slip zone divisions under various creepages

图 4 展示了接触斑 $Y = 0$ 截面处切向应力的分布规律.由图可见,在黏着区内,两种方法计算的切向应力高度吻合.该区域内,切向力从接触斑前沿开始线性增加,其斜率随蠕滑率的增大而增大;而在滑动区内,应力分布差异显著,且蠕滑率越大,差异越明显.这一现象源于理论模型的本质差异:Polach 理论假设切向应力呈椭圆分布,而简化理论给出的应力则遵循抛物线分布。

图 5 中给出了不同蠕滑率下接触斑切向应力分布情况.由图可见,蠕滑率较小时,两种方法计算的轮轨切向接触应力分布吻合很好;随着蠕滑率增加,应力分布逐渐出现差异,以简化理论为基准计算应力相对误差 ($\epsilon_{err} = |\tau_{sim} - \tau_{Polach}| / \tau_{sim}$); 3 种蠕滑率下,应力峰值的相对误差分别为 0.8%,11.8%,25%。

为了分析不同长短轴之比条件下简化理论与 Polach 理论计算结果的差异,设置 $a/b = 0.5, 1, 2$, 并且横向与纵向蠕滑率为 0.001,分别采用两种方法进行计算。



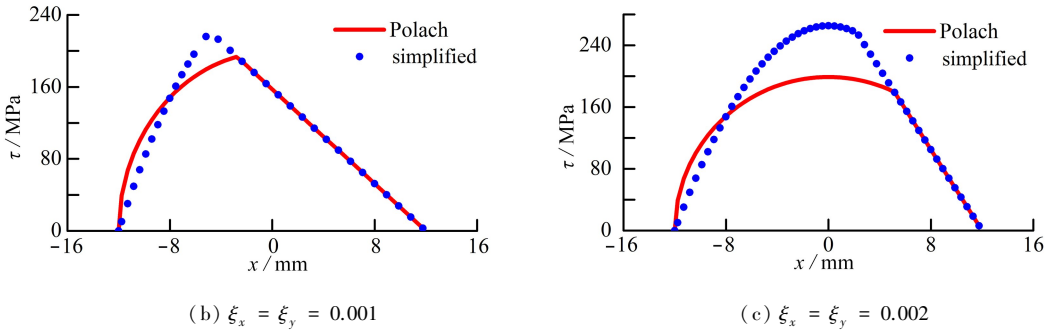


图4 切向应力分布 ($Y = 0$)

Fig. 4 Distributions of tangential stresses

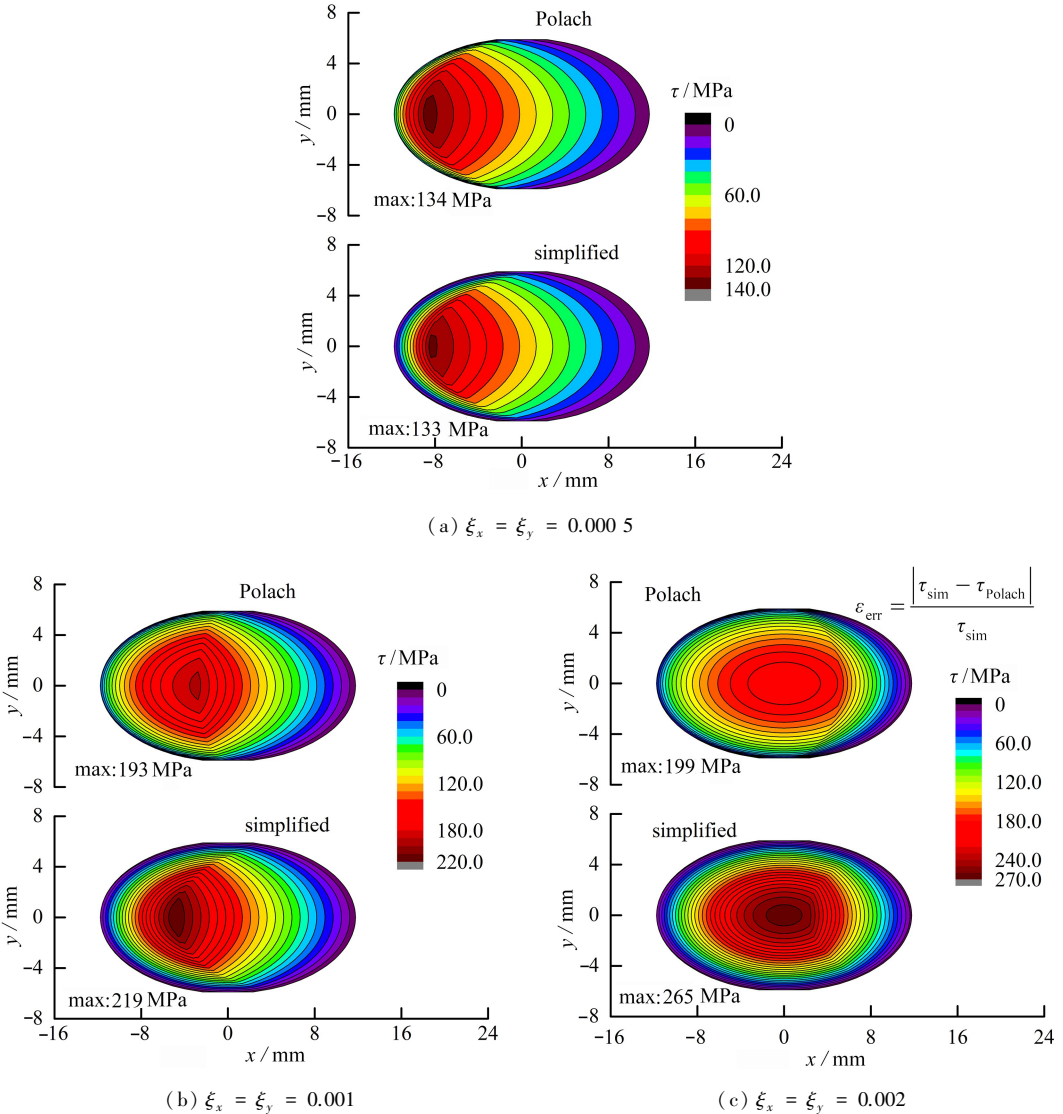


图5 不同蠕滑率条件下的应力分布

Fig. 5 Distributions of tangential stresses under various creepages

图6中给出了黏滑分布随长短轴比变化的情况,分析发现,相同蠕滑率下,随着 a 增加,接触斑滑动区比例逐步增加.以Polach计算结果为例,3种长轴对应的滑动区比例分别为21.3%,27.5%和38.5%.由此可知,其他条件相同时, a 越大,则接触斑越容易进入滑动状态.长短半轴比较小时,Polach和Kalker计算方法得到的黏滑分布较为一致;随着 a/b 增加,黏滑分布逐渐出现差异.

图7给出了不同长短半轴比条件下接触斑切向应力分布情况.由图可见,长短半轴比值较小时,两种方

法计算的轮轨切向接触应力分布吻合很好;随着长短半轴比增加,应力分布逐渐出现差异,主要体现在滑动区;不同 a/b 下,应力峰值的相对误差分别为 0.6%,4.4%,11.9%.

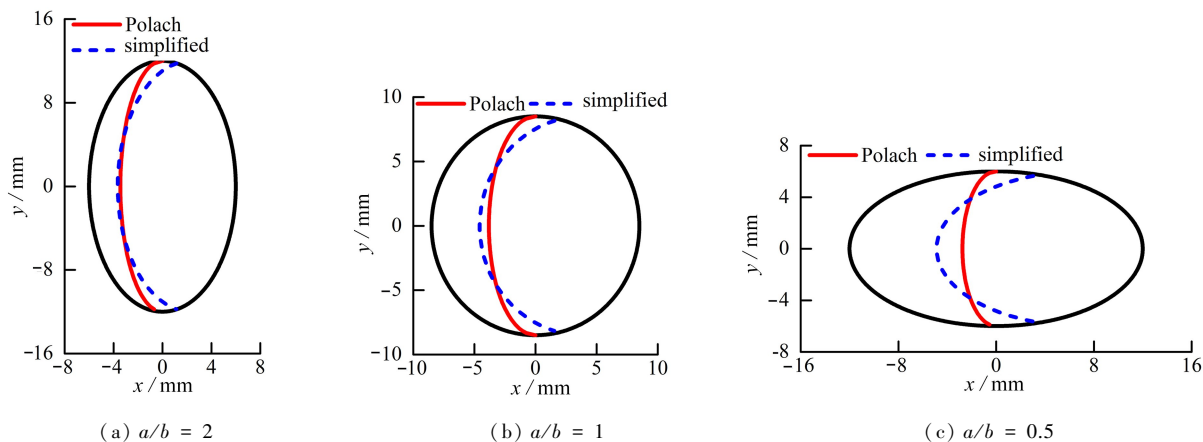


图 6 不同长短半轴比条件下的黏滑区分

Fig. 6 Stick-slip zone divisions under various ratios of major semi-axes to minor semi-axes

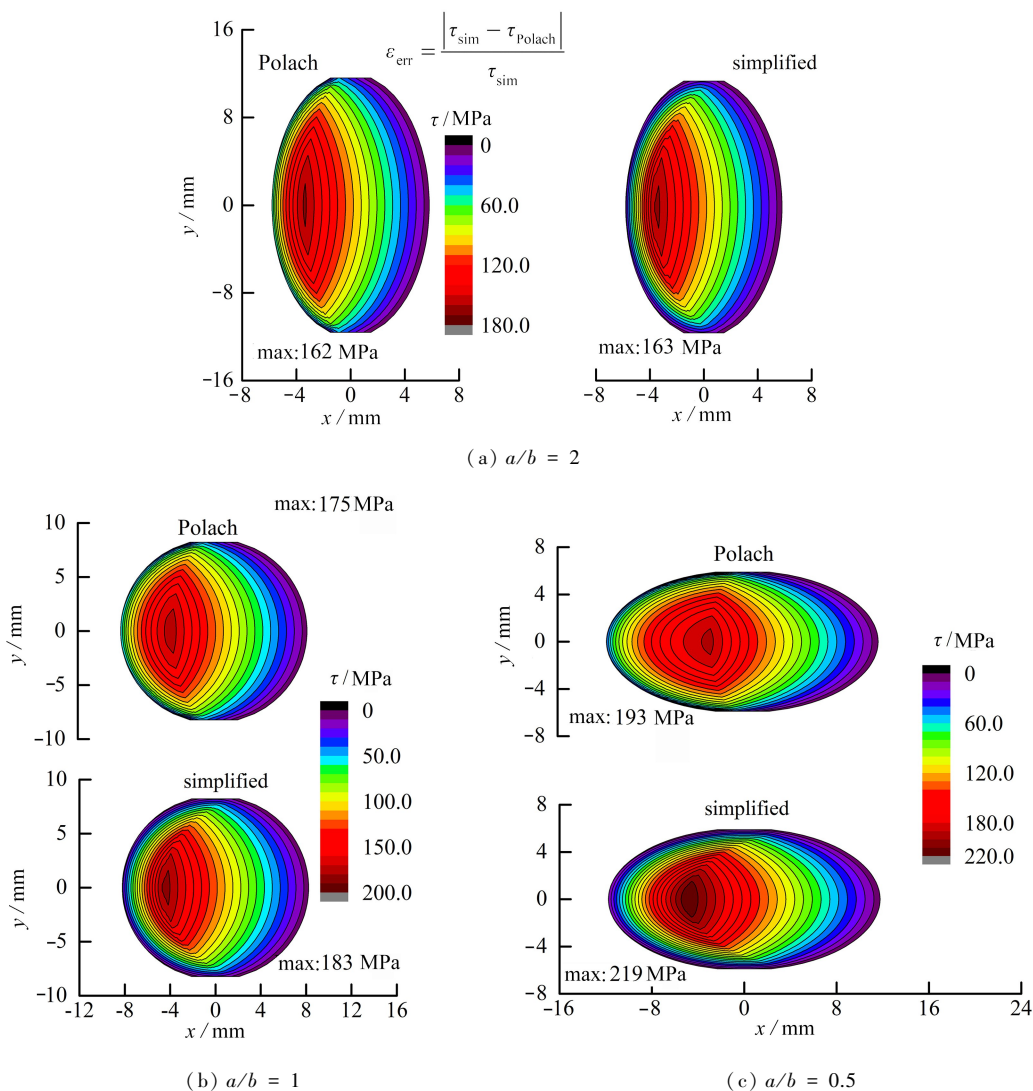


图 7 不同长短半轴比条件下的切向应力分布

Fig. 7 Distributions of tangential stresses under various ratios of major semi-axes to minor semi-axes

前述分析主要集中在黏滑区分布及应力分布方面的对比研究,接下来将进一步对比两种理论在法向行

为及蠕滑力-率特性曲线方面的差异.分别采用前述两种方法来计算轮轨法向力及切向力.

图8给出了Kalker、Polach两种蠕滑理论法向力分布对比情况.由图可知,采用简化理论计算的法向应力符合椭球形分布,最大法向应力为884 MPa;采用Polach理论计算的法向应力符合抛物面分布,最大法向应力为663 MPa.前者在接触斑中心区域变化更剧烈,而后者在接触斑边缘区域变化更剧烈.

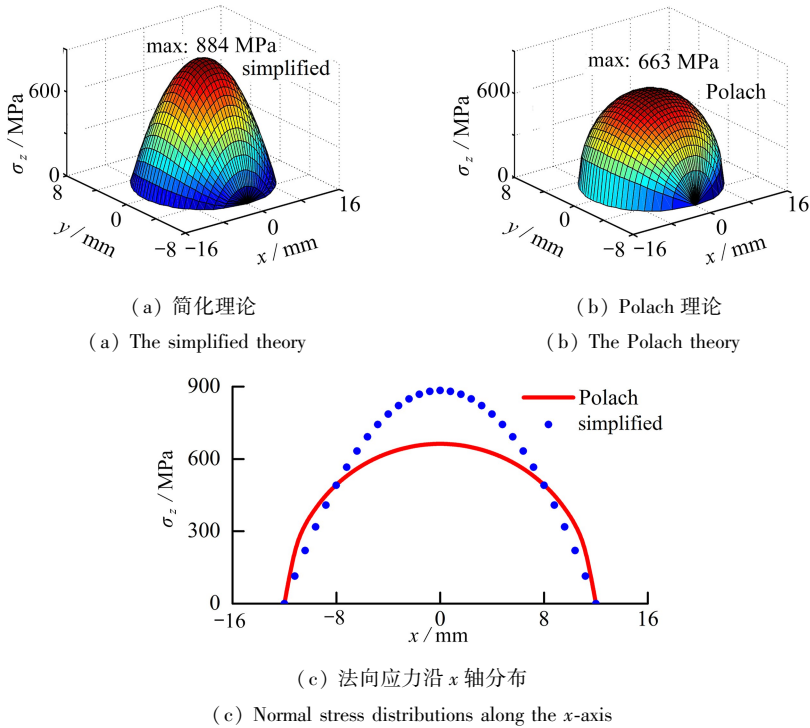


图8 法向应力分布

Fig. 8 Distributions of normal stresses

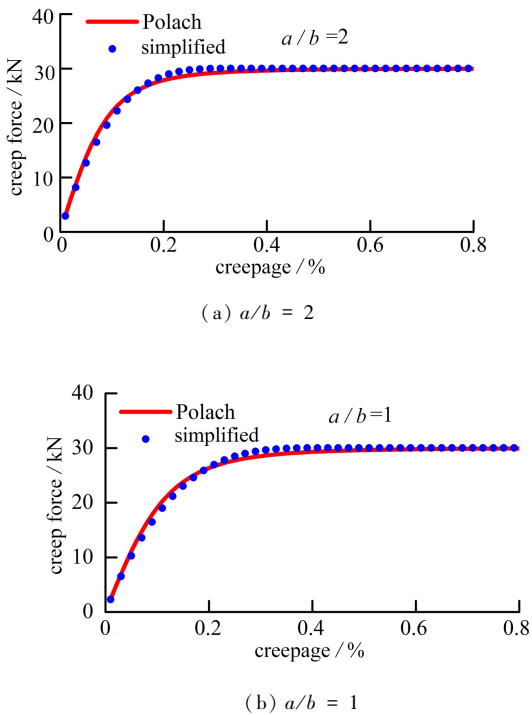


图9 纯蠕滑条件下的蠕滑力-率特性曲线

Fig. 9 Creep force-creepage characteristic curves under pure creep

图9给出了轮轨纯蠕滑情况下的蠕滑曲线,纯蠕滑工况指纵向蠕滑率和横向蠕滑率相等,且没有自旋蠕滑.由图可见,Polach、FastSIM两种方法得到的蠕滑力随蠕滑率的变化规律基本相同,当接触斑内未发生全滑动时,蠕滑力随着蠕滑率增加而逐渐增加,其中小蠕滑状态下基本呈线性关系;当接触斑内发生全滑动后,蠕滑力呈现饱和,并且随着长短轴之比减小,蠕滑力饱和点对应蠕滑率有所增加.

总体来看,两种方法得到的蠕滑力-蠕滑率曲线吻合良好。

图 10 展示了轮轨纯自旋蠕滑工况下蠕滑力随自旋蠕滑率的变化规律。由图可知,两种模型计算的蠕滑力-自旋蠕滑率曲线趋势一致:当自旋蠕滑率较低时,两种模型的蠕滑力均随自旋蠕滑率增大而增大,且数值偏差较小;当自旋蠕滑率超过临界饱和蠕滑率后,蠕滑力随自旋蠕滑率增大而减小,同时相对误差显著增大。随着长半轴与短半轴比值 a/b 减小,蠕滑力峰值对应的临界饱和自旋蠕滑率均增大。以 Polach 理论为例,三种长短半轴比值对应的临界饱和自旋蠕滑率分别为 0.30,0.42 和 0.50。总体而言,当 $a/b = 1$ 时,两种方法的计算结果吻合度最高。

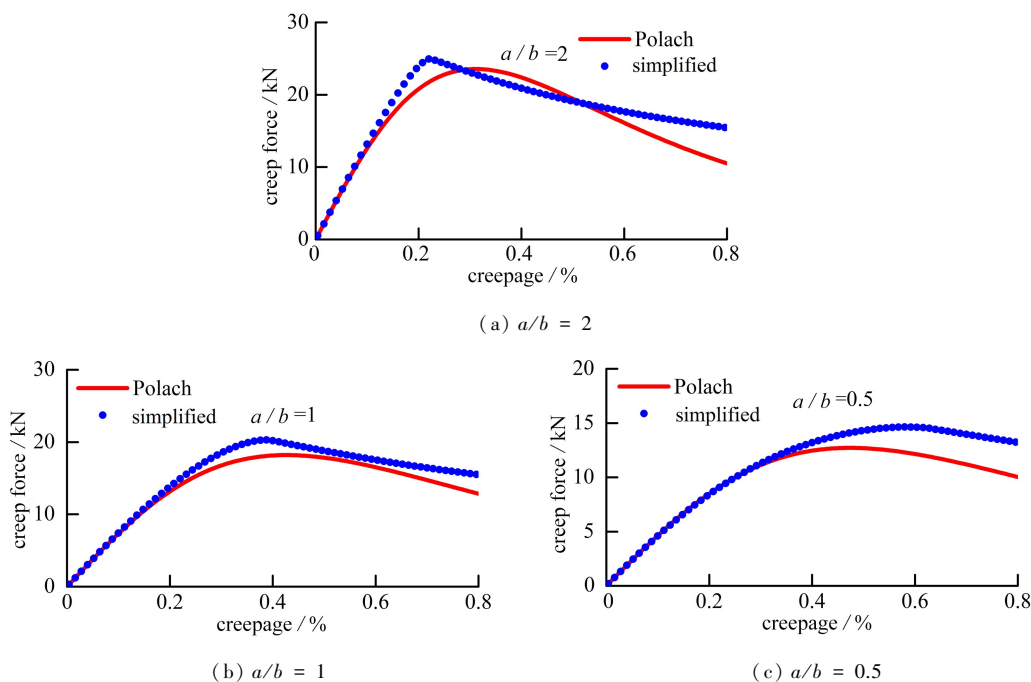


图 10 纯自旋条件下的蠕滑力-率特性曲线

Fig. 10 Creep force-creepage characteristic curves under pure spin

3 蠕滑理论在轮轨磨耗中的应用

3.1 磨耗计算模型

根据台架试验,研究者们提出了多种磨耗预测模型,其中较为常用的有 Archard 模型和 Zobory 模型。Archard 磨损模型在高速列车轮轨磨耗仿真中取得了良好效果,因此本文选用 Archard 模型来计算滑动区离散单元的材料损失,如图 11 所示。

Archard 模型的表达式如下:

$$V_{\text{wear}} = k_w \frac{Nd}{H}, \tag{20}$$

式中, V_{wear} 为材料磨耗体积, d 为滑动距离, N 为法向力, H 为两相接触物体中较软的材料硬度, 磨耗系数 k_w 取决于法向接触压力和滑动速度, 可以根据实验获得具体参数^[25]。图 12 为根据实验数据进行二维线性插值得到的磨耗系数图, 仿真时根据接触压力与滑动速度插值获取磨耗系数。

根据简化理论和 Polach 蠕滑理论, 轮轨接触斑滑动区内任意单元的材料磨耗深度可表达如下:

简化理论

$$\Delta z(x, y) = \frac{2Nk_w}{\pi abH} \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right) \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \frac{\Delta x}{v_c}; \tag{21}$$

Polach 理论

$$\Delta z(x, y) = \frac{3Nk_w}{2\pi abH} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \frac{\Delta x}{v_c}, \quad (22)$$

式中, v_x, v_y 代表滑动速度, v_c 表示质点通过接触斑的速度, Δx 代表接触斑单元长度。

通过以上计算可以得到接触斑内每个离散单元上的磨耗深度, 然后沿着车轮滚动方向将滑动区离散单元的磨耗深度叠加并投影到轮轨型面上, 即可得到车轮滚动一圈产生的磨耗深度分布。

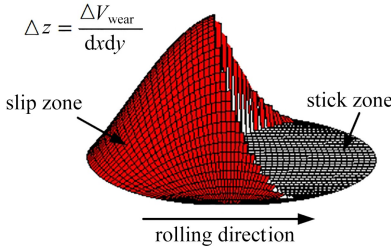


图 11 磨耗计算示意图

Fig. 11 The schematic diagram of wear calculation

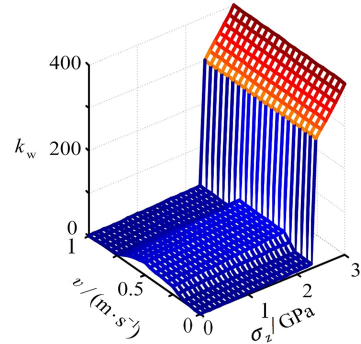
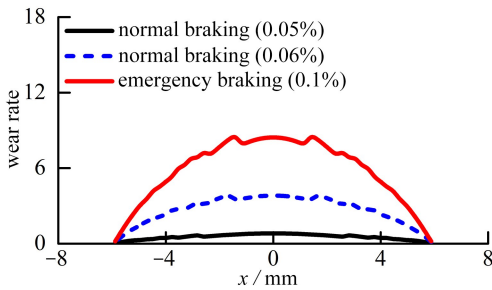


图 12 磨耗系数

Fig. 12 The coefficient of wear

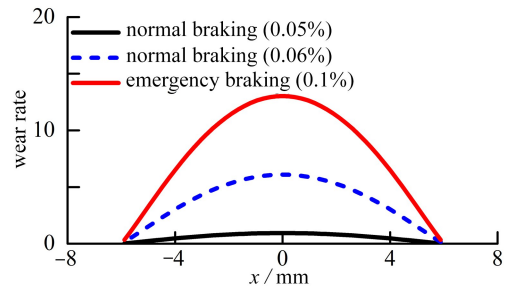
3.2 不同制动等级

列车在坡道运行过程中需频繁制动减速, 不同制动工况通常对应不同的纵向蠕滑率, 本文选取三种典型制动工况, 其纵向蠕滑率分别为 0.05%, 0.06% 与 0.10%。图 13、14 给出了轮轨磨耗率及黏着-滑动区分布随制动工况的变化规律。



(a) 简化理论

(a) The simplified theory



(b) Polach 理论

(b) The Polach theory

图 13 不同制动等级下的轮轨磨耗速率

Fig. 13 The wheel/rail wear rates under various braking levels

结果表明, Polach 理论预测的轮轨磨耗率显著高于简化理论计算结果, 且该差异在高制动工况下更为显著。但两种理论均表明, 提高制动等级会加剧轮轨磨耗, 其机理在于高制动工况下接触斑滑动区面积显著扩展, 导致磨耗能量耗散增加。因此, 相较于平直轨道, 坡道地段因轮轨切向力交互作用增强, 轮轨磨耗问题更为突出。

3.3 不同轨面状态

为研究不同轨面状态对列车运行过程中轮轨磨耗率的影响规律, 本小节设定列车以 250 km/h 速度运行, 并采用摩擦因数 0.3 (干燥轨面) 与 0.1 (湿润轨面) 表征轨面特性差异。图 15、16 对比了轮轨磨耗率及黏着-滑动区分布随轨面状态的变化规律。分析结果表明, 车轮磨耗率随摩擦因数降低而减小, 湿润轨面状态下磨耗率较干燥轨面降低约 20%~30%。虽然摩擦因数减小, 接触区单元更容易发生滑动; 但是摩擦因数降低导致磨耗能量耗散减弱, 从而抑制了轮轨材料剥离速率。

3.4 不同速度

为了研究不同运行速度对轮轨磨耗的影响, 考虑列车分别以 250 km/h, 300 km/h, 350 km/h 在线路上运行, 轮轨蠕滑率按 0.05% 考虑, 计算结果如图 17 所示。分析可知, 轮轨磨耗率随运行速度升高而显著增大, 速

度从 250 km/h 提升至 350 km/h 时,磨损率增幅约为 15%.运行速度提升会同步增大轮轨滑动速度与接触界面能量输入速率,进而导致磨损能量密度显著升高,最终加剧轮轨材料损伤累积.

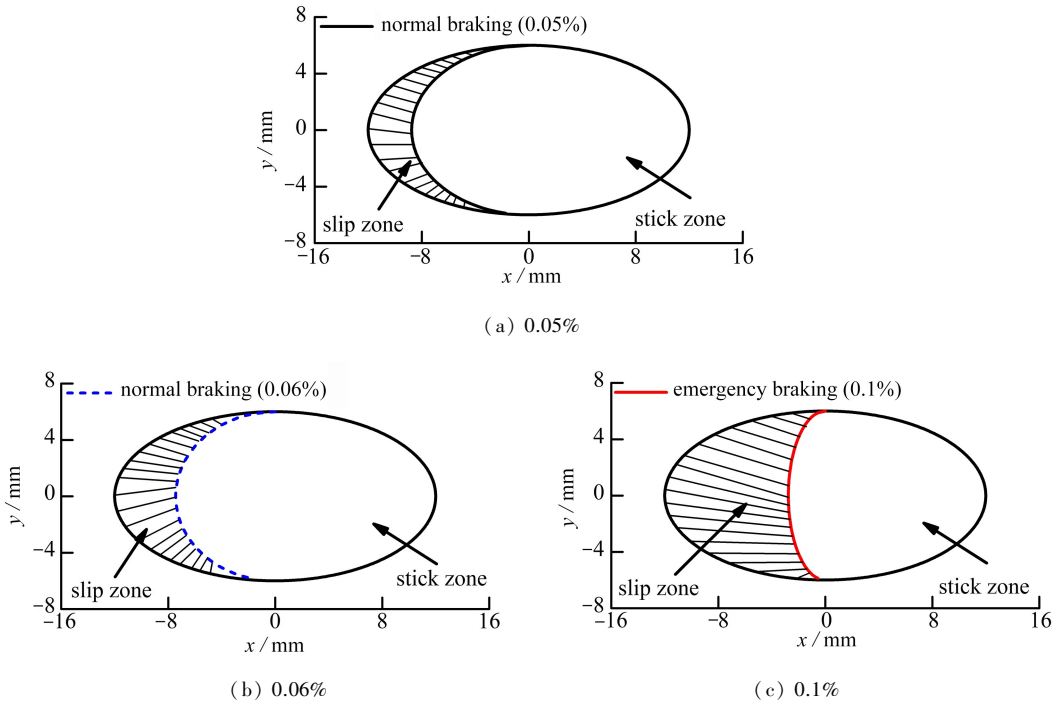


图 14 不同制动条件下的黏滑分布(Polach 理论)

Fig. 14 Stick-slip zone divisions under various braking levels (Polach theory)

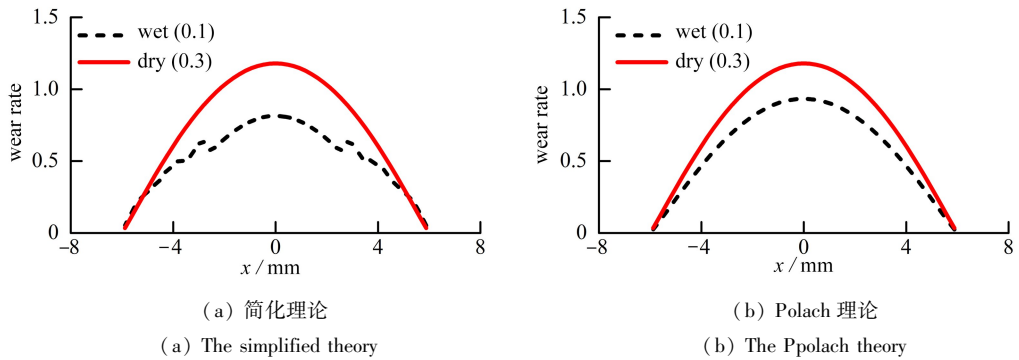


图 15 不同摩擦因数条件下轮轨磨损速率

Fig. 15 The wheel/rail wear rates under various friction coefficients

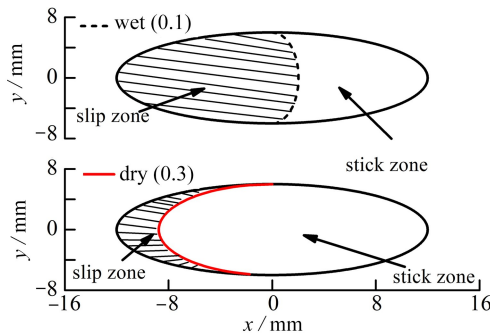


图 16 不同摩擦因数条件下的黏滑分布(Polach 理论)

Fig. 16 Stick-slip zone divisions under various friction coefficients (Polach theory)

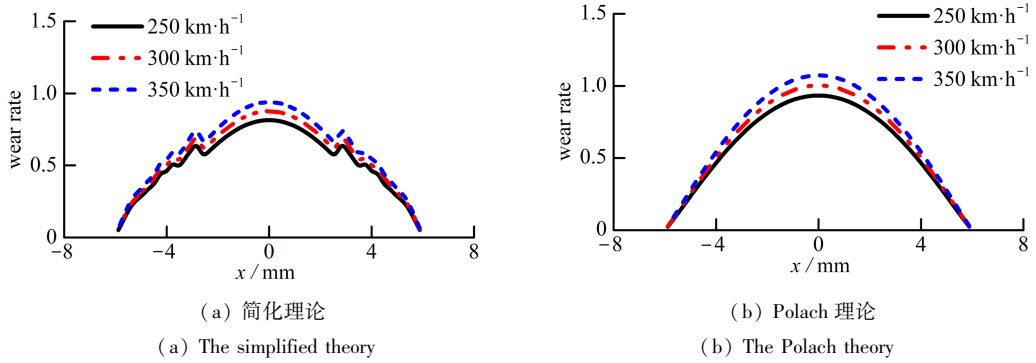


图 17 不同速度条件下的轮轨磨损速率

Fig. 17 The wheel/rail wear rates under various running speeds

4 结 论

本文通过解析方法分别推导了简化理论与 Polach 蠕滑理论中黏-滑区分界线的数学表达式,系统对比了两种理论在黏-滑区分、接触斑应力分布及蠕滑力-蠕滑率曲线方面的差异,并进一步将两种理论应用于轮轨磨损计算中.研究结论如下:

- 1) 本文解析模型可以更好地理解蠕滑、自旋对黏滑区分布的影响,并快速确定黏-滑动区分。
- 2) 当纵向蠕滑率与长短轴之比较小时,两种理论的黏-滑分区及应力分布一致性较高;随着蠕滑率与轴长比增大,计算结果逐渐偏离。
- 3) 纯纵向蠕滑工况下,两种理论的蠕滑力-蠕滑率曲线吻合度良好;纯自旋工况中,低自旋条件下曲线一致性较好,而高自旋时差异凸显。
- 4) 高制动工况会显著加剧轮轨磨损率,频繁制动区段需加强磨损监测;运行速度从 250 km/h 提升至 350 km/h 时,磨损率增幅约 15%。

致谢 本文作者衷心感谢上海应用技术大学协同创新基金(XTCX2024-07)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] HERTZ H. Über die berührung fester elastischer körper[J]. *Journal für Die Reine und Angewandte Mathematik*, 1882, **92**: 156-171.
- [2] 程亚平, 李志刚, 张强. 钢绞线丝间变形与感应加热效果数学模型的研究[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(9): 915-923. (CHENG Yaping, LI Zhigang, ZHANG Qiang. Mathematical models for deformation between steel strand wires and induction heating effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(9): 915-923. (in Chinese))
- [3] CARTER F W. On the action of a locomotive driving wheel[J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1926, **112**(760): 151-157.
- [4] VERMEULEN P J, JOHNSON K L. Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential forces[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, **31**(2): 338-340.
- [5] KALKER J J. On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction[R]. 1967.
- [6] KALKER J J. The computation of three-dimensional rolling contact with dry friction[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, **14**(9): 1293-1307.
- [7] KALKER J J. A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1982, **11**(1): 1-13.
- [8] SHEN Z Y, HEDRICK J K, ELKINS J A. A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamic analysis [J]. *Vehicle System Dynamics*, 1983, **12**(1/3): 79-83.
- [9] POLACH O. A fast wheel-rail forces calculation computer code[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1999, **33**: 728-739.

- [10] 罗仁, 曾京, 戴焕云, 等. 高速列车车轮磨耗预测仿真[J]. 摩擦学学报, 2009, **29**(6): 551-558. (LUO Ren, ZENG Jing, DAI Huanyun, et al. Simulation on wheel wear prediction of high-speed train[J]. *Tribology*, 2009, **29**(6): 551-558. (in Chinese))
- [11] 丁军君, 李芾, 黄运华. 基于蠕滑机理的车轮磨耗模型分析[J]. 中国铁道科学, 2010, **31**(5): 66-72. (DING Junjun, LI Fu, HUANG Yunhua. Analysis of the wheel wear model based on the creep mechanism[J]. *China Railway Science*, 2010, **31**(5): 66-72. (in Chinese))
- [12] 朱文良, 郑树彬, 吴娜, 等. 适用于制动工况下的轮轨低黏着改进模型[J]. 铁道学报, 2021, **43**(3): 34-41. (ZHU Wenliang, ZHENG Shubin, WU Na, et al. Improved model for degraded wheel-rail adhesion under braking conditions[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2021, **43**(3): 34-41. (in Chinese))
- [13] 安博洋, 王平, 徐义新, 等. 基于POLACH方法的轮轨蠕滑曲线研究[J]. 机械工程学报, 2018, **54**(4): 124-131. (AN Boyang, WANG Ping, XU Yixin, et al. Study on wheel/rail creep curve based on POLACH's method[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, **54**(4): 124-131. (in Chinese))
- [14] 王平, 宋娟, 杨春凯, 等. 实测轮轨蠕滑曲线对钢轨磨耗影响分析[J]. 西南交通大学学报, 2024, **59**(5): 1034-1042. (WANG Ping, SONG Juan, YANG Chunkai, et al. Effect of measured wheel-rail creep curves on rail wear[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2024, **59**(5): 1034-1042. (in Chinese))
- [15] 宋娟, 王平, 陈雨, 等. 实测轮轨蠕滑曲线对车辆-轨道动态相互作用的影响分析[J]. 铁道标准设计, 2023, **67**(6): 45-52. (SONG Juan, WANG Ping, CHEN Yu, et al. Influence of measured wheel-rail creep curves on vehicle-track dynamic interaction[J]. *Railway Standard Design*, 2023, **67**(6): 45-52. (in Chinese))
- [16] 陈爽, 陈雨, 潘自立, 等. 基于FASTSIM和TRIAL算法的轮轨切向接触模型研究[J]. 高速铁路技术, 2023, **14**(6): 62-67. (CHEN Shuang, CHEN Yu, PAN Zili, et al. A study on tangential wheel-rail contact model based on FASTSIM and TRIAL algorithms[J]. *High Speed Railway Technology*, 2023, **14**(6): 62-67. (in Chinese))
- [17] YANG Y, DING J T, LI F, et al. Longitudinal vibration of a resilient wheel under the adhesion limit [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (Part F): Journal of Rail and Rapid Transit*, 2019, **233**(4): 370-381.
- [18] 鲁昌霖, 王志伟, 王权, 等. 考虑轮轨蠕滑的高速列车制动非线性振动行为研究[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2023, **37**(6): 10-19. (LU Changlin, WANG Zhiwei, WANG Quan, et al. Research on nonlinear braking vibration of high-speed trains considering wheel-rail creep[J]. *Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)*, 2023, **37**(6): 10-19. (in Chinese))
- [19] ZIREK A, VOLTR P, LATA M, et al. An adaptive sliding mode control to stabilize wheel slip and improve traction performance[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (Part F): Journal of Rail and Rapid Transit*, 2018, **232**(10): 2392-2405.
- [20] QI Y, DAI H. Influence of motor harmonic torque on wheel wear in high-speed trains[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (Part F): Journal of Rail and Rapid Transit*, 2020, **234**(1): 32-42.
- [21] 王志强, 雷震宇. 谐波型波磨激励下轮轨系统接触蠕滑特性[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(6): 735-742. (WANG Zhiqiang, LEI Zhenyu. Contact and creep characteristics of wheelrail system under harmonic corrugation excitation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(6): 735-742. (in Chinese))
- [22] 李可, 刘学文, 张经纬, 等. 低阶谐波磨耗轮对引起的轮轨及等效人体动态响应分析[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(1): 42-47. (LI Ke, LIU Xuewen, ZHANG Jingwei, et al. Analysis of wheel-rail and equivalent human dynamic response due to low-order harmonic wear wheel-sets[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(1): 42-47. (in Chinese))
- [23] XIAO G W, WU B, YAO L Q, et al. The traction behaviour of high-speed train under low adhesion condition [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2022, **131**: 105858.
- [24] LU C X, CHEN D L, SHI J, et al. Research on wheel-rail dynamic interaction of high-speed railway under low adhesion condition[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2024, **157**: 107935.
- [25] JENDEL T. Prediction of wheel profile wear: comparisons with field measurements[J]. *Wear*, 2002, **253**(1/2): 89-99.