

# 挠曲电声子晶体梁的波动特性分析\*

杨莎莎<sup>1,2</sup>, 孔燚帆<sup>2,3</sup>, 沈承<sup>2,3</sup>

- (1. 南京工业职业技术大学 机械工程学院, 南京 210023;  
2. 南京航空航天大学 航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016;  
3. 南京航空航天大学 多功能轻量化材料与结构工信部重点实验室, 南京 210016)

(我刊编委刘少宝推荐)

**摘要:** 当结构尺度减小到微纳米尺寸时,一种新型的机电耦合效应(即挠曲电效应)愈发重要.建立了在微尺寸下考虑挠曲电效应的声子晶体梁模型,研究了结构的色散曲线以及振动响应.首先基于挠曲电效应的纳米电介质理论,从电学 Gibbs 自由能密度出发,得到了挠曲电材料的本构方程.并基于 Bernoulli-Euler 梁的理论假设和变分原理推导出考虑挠曲电效应、微惯性效应以及动挠曲电效应的梁的振动控制方程.通过传递矩阵法计算考虑了挠曲电效应的声子晶体梁的能带结构,以及有限长悬臂梁的固有频率.研究了挠曲电效应以及结构参数对固有频率和带隙的影响规律.结果表明,挠曲电效应显著提高了固有频率,可通过改变结构参数来获得更宽带隙.仿真结果与理论结果吻合较好,验证了理论方法的有效性.该文工作可为今后考虑挠曲电效应的微纳米声子晶体梁的设计提供理论指导.

**关键词:** 挠曲电效应; 声子晶体梁; 色散曲线; 固有频率; 传递矩阵

**中图分类号:** O32 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460003

## Analysis of Wave Propagation Properties of Flexoelectric Phononic Crystal Beams

YANG Shasha<sup>1,2</sup>, KONG Yifan<sup>2,3</sup>, SHEN Cheng<sup>2,3</sup>

- (1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Industry Technology, Nanjing 210023, P.R.China;  
2. State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China;  
3. MIIT Key Laboratory of Multifunctional Lightweight Materials and Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China)

(Recommended by LIU Shaobao, M.AMM Editorial Board)

**Abstract:** When the structural scale is reduced to the micro and nano sizes, a new type of electromechanical coupling effect (i.e. the flexoelectric effect) becomes increasingly important. A phononic crystal beam model with the flexoelectric effect in micro scale was established. The dispersion curves and vibration responses of the structure were studied. Based on the nanodielectric theory under flexoelectric effects, the constitutive equation

\* 收稿日期: 2025-01-07; 修订日期: 2025-02-15

**基金项目:** 国家自然科学基金(12202183; 12472089); 国家重点研发计划(2023YFB4604800)

**作者简介:** 杨莎莎(1986—),女,校聘副教授,博士(E-mail: 2016100849@niit.edu.cn);

沈承(1986—),男,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: cshen@nuaa.edu.cn).

**引用格式:** 杨莎莎, 孔燚帆, 沈承. 挠曲电声子晶体梁的波动特性分析[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(8): 1037-1049.

for flexoelectric materials was derived from the electrical Gibbs free energy density. Based on the theoretical hypothesis of the Bernoulli-Euler beam and the variational principle, the governing vibration equation for the beam under flexoelectric effects, micro-inertial effects and dynamic flexoelectric effects, was derived. The energy band structure of a phonon crystal beam under flexoelectric effects and the natural frequencies of a finite length cantilever beam were calculated with the transfer matrix method. The flexoelectric effects and the influences of structural parameters on natural frequencies and band gaps were studied. The results show that, the flexoelectric effect significantly increases the natural frequency, and the wider band gap can be obtained by the change of the structural parameters. The simulation results are in good agreement with the theoretical ones, which proves the validity of the theoretical method. The work provides a theoretical guidance for the future design of micro and nano phonon crystal beams under the flexoelectric effects.

**Key words:** flexoelectric effect; phononic crystal beam; dispersion curve; natural frequency; transfer matrix

## 0 引言

压电效应是一种典型的机电耦合效应,已经在工业上得到了广泛的应用.然而,压电效应只存在于非中心对称材料中,且存在污染严重、能转换效率较低(一般10%左右)等诸多缺陷,大大限制了其在微纳系统的发展和應用.挠曲电效应作为一种新型的机电耦合效应,具有很多压电效应不具备的优势,近些年得到了广泛的关注.

1964年,当Kogan<sup>[1]</sup>在研究中心对称的晶体时,首次提出了挠曲电效应的唯象学框架,描述了应变梯度与极化之间的耦合.随后,关于挠曲电效应的理论研究就开始迅速发展起来.1965年,Harris<sup>[2]</sup>提出了挠曲电效应的微观机理.1968年,Mindlin<sup>[3]</sup>在传统的弹性介电能函数中引入了极化梯度,然而由于没有考虑应变梯度,该理论只能在一定程度上解释挠曲电效应的概念.1970年,Askar等<sup>[4]</sup>首次利用点阵动力学法计算出了四种立方离子晶体的挠曲电系数.1981年,Indenbom等<sup>[5]</sup>提出了挠曲电效应的Laudau理论,将挠曲电效应和非局部压电效应<sup>[6]</sup>做了形式上的划分.21世纪初,Maranganti等<sup>[7]</sup>建立了包含应变梯度和极化耦合的数学框架,提出了控制方程的Green函数解,解决了夹杂问题.Hu和Shen<sup>[8-9]</sup>建立了考虑挠曲电效应、表面效应和静电效应的介电变分原理,并推导了相应的控制方程和边界条件.他们的理论不仅适用于纳米介质中复杂的静态机电耦合问题,而且可以通过在介质变分原理中引入动能方便分析响应的动力学问题.

另一方面,波在周期结构(即声子晶体)中的传播特性已成为近些年来学术界的热点问题.早在1946年,Brillouin<sup>[10]</sup>就深入地研究了周期性材料中的传播特性,但是并没有引起很多注意.直到1995年,Martínez-Sala等<sup>[11]</sup>测试了西班牙一个著名雕塑的声学特性,第一次从实验的角度证实了波动带隙的存在,才引起了广泛的关注.在2000年以前,声子晶体的研究基本局限于Bragg散射原理,即晶格常数和带隙频率应在同一数量级<sup>[12-13]</sup>.因此,需要大尺寸的声子晶体来屏蔽低频噪声,这通常是不现实的.2000年,Liu等<sup>[14]</sup>创造性地提出了局域共振超材料,该超材料的晶格常数比带隙对应的波长小两个数量级,实现了小尺寸控制大波长的效果.在声子晶体的带隙研究中,Kushwaha等<sup>[13]</sup>首先计算了声子晶体的完全带,并提出了设计完整的声带隙,为高精度机械系统提供无振动环境.Golub等<sup>[15]</sup>研究了水平横波在带条状裂纹的层状声子晶体中的传播和共振,揭示了波的共振和带隙中的局域性.Benchabane等<sup>[16]</sup>对二维压电声子晶体的全表面声带隙进行了测试,发现全带隙的频率范围与理论预测完全一致.

然而,现有的绝大多数研究局限于宏观结构,较少考虑微纳米尺度,考虑挠曲电效应的微纳米声子晶体的研究就更为有限.举例来说,Liu等<sup>[17]</sup>利用传递矩阵法研究了考虑挠曲电效应的一维无限大声子晶体的波动特性.Yang等<sup>[18-20]</sup>建立了一个模型来分析纳米层状声子晶体中的弹性波、压电纳米复合材料中的Love波和无限纳米板中的Lamb波.Han等<sup>[21]</sup>利用传递矩阵法计算了声子晶体梁的能带结构.Liang等<sup>[22-23]</sup>研究了挠曲电效应对纳米尺度梁力学性能的影响.Shen等<sup>[24]</sup>研究了考虑挠曲电效应失谐声子晶体的波动特性.赵昊阳等<sup>[25]</sup>对多孔挠曲电型超材料板的弯曲波进行了理论计算与分析,他们发现孔洞的尺寸对弯曲波禁带有明显的影响.郝一涵等<sup>[26]</sup>通过配点混合有限元法研究了固体材料中常见缺陷微孔洞间挠曲电场的相互作用.

He 等<sup>[27]</sup>则通过在板结构上引入周期布置的 LC 电路,实现了一种可编程挠曲电超材料板,可以方便地对波动特性进行调控.总的来说,到目前为止,关于挠曲电声子晶体梁的研究还不充分.

总的来说,挠曲电效应最大的不足在于力电耦合效应较小,而声子晶体可以显著放大结构中的波动能量,因此两者的结合有望提升整体结构的力电耦合效应,而且通过结合声子晶体梁和挠曲电效应,未来可进一步设计相关的微纳米力电传感器,这些考量也是本文研究的主要动机.

## 1 理论模型

声子晶体梁如图 1 所示.梁模型由  $N$  个单胞组成,每个单胞包含 A, B 两种材料.每个单胞总长为  $l$ ,其中材料 A 和 B 的长度分别为  $l_A$  和  $l_B$ .由材料的横截面尺寸图可以看出  $h_A, h_B, b_A, b_B$  分别代表材料 A 和材料 B 的高度和宽度(图 2).

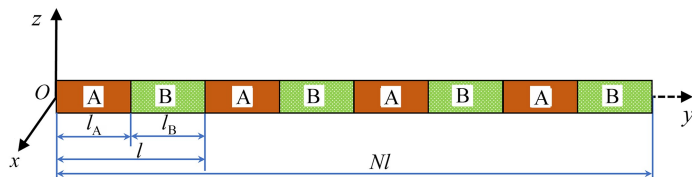


图 1 挠曲电声子晶体梁示意图

Fig. 1 Schematic of the flexoelectric phononic crystal beam

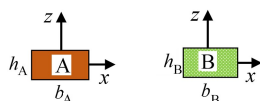


图 2 材料 A 和 B 的横截面尺寸

Fig. 2 Cross sections of materials A and B

### 1.1 挠曲电梁的控制方程

为在压电本构关系中引入挠曲电效应,通过电学 Gibbs 自由能密度函数中增加关于极化与应变梯度的耦合项.对于非中心对称电介质,电学 Gibbs 自由能密度函数可以写成<sup>[8,24]</sup>

$$U_b = -\frac{1}{2} a_{kl} E_k E_l - \frac{1}{2} b_{ijkl} E_{i,j} E_{k,l} + \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - v_{ijk} \varepsilon_{ij} E_k - f_{ijkl} E_i \eta_{jkl}, \quad (1)$$

$a, b, c, e, f$  是材料性质张量,其中  $a$  和  $c$  分别是二阶介电张量和四阶弹性张量,  $b$  是高级介电常数张量,表征电场梯度之间的耦合,  $e$  是三阶压电常数张量,对于非中心对称介质,  $e \equiv \mathbf{0}$ ,  $f$  是四阶挠曲电耦合系数张量,表征正挠曲电效应;  $E$  是电场向量;  $\varepsilon$  是应变向量;  $\eta$  表征应变梯度,分别定义为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad (2)$$

$u$  是位移矢量,  $\varphi$  是静电势.应变梯度可定义为<sup>[25]</sup>

$$\eta_{ijk} = \varepsilon_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{j,ik} + u_{i,jk}). \quad (3)$$

根据定义,应变和应变梯度之间的关系式应该满足  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \eta_{ijk} = \eta_{jik} = \varepsilon_{ij,k}$ .

小变形假设下,考虑挠曲电效应的纳米电介质的本构方程可以写成<sup>[28]</sup>

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad \tau_{ijk} = -f_{ijkl} E_l, \quad D_i = a_{ij} E_j + e_{ijk} \varepsilon_{jk} + f_{ijkl} \eta_{jkl}, \quad (4)$$

式中,  $\sigma_{ij}$  是应力张量分量,等同于经典弹性理论中的应力张量;  $\tau_{ijk}$  是高级应力张量分量;  $D_i$  是电位移向量分量.基于 Bernoulli-Euler 梁的变形假设:

$$u_0(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad v_0(x, y, z, t) = 0, \quad w_0(x, y, z, t) = w(x, t), \quad (5)$$

式中,  $u_0, v_0, w_0$  分别对应  $x, y, z$  方向的位移.进一步,可得到应变和应变梯度为

$$\varepsilon_{11} = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, \quad \eta_{111} = -z \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3}, \quad \eta_{113} = -\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}. \quad (6)$$

对于细长梁,一般来说,梁在长度方向的应变梯度远小于沿厚度方向的应变梯度,即可以忽略  $\eta_{111}$  的影响.类似于压电问题中关于电场的假设,忽略除厚度方向以外的电场分量,此时电位移表达式为

$$D_3 = a_{33}E_3 + e_{311}\varepsilon_{11} + f_{3113}\eta_{113}. \quad (7)$$

在开路电学条件下,表面电位移为零,根据静电学中 Gauss 定义  $D_{3,3} = 0$  可知极化电荷产生的电场为

$$E_3 = -\frac{e_{311}}{a_{33}}\varepsilon_{11} - \frac{f_{3113}}{a_{33}}\eta_{113}. \quad (8)$$

将式(8)代入本构方程(4)可以得到

$$\sigma_{11} = \left( c_{1111} + \frac{e_{311}e_{311}}{a_{33}} \right) \varepsilon_{11} + \frac{e_{311}f_{3113}}{a_{33}} \eta_{113}, \quad (9)$$

$$\tau_{113} = \frac{e_{311}f_{3113}}{a_{33}} \varepsilon_{11} + \frac{f_{3113}f_{3113}}{a_{33}} \eta_{113}. \quad (10)$$

在开路电学条件下,表面电位移为零,此时电学 Gibbs 自由能密度可以表示为<sup>[29]</sup>

$$u_b = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau_{ijk} \eta_{ijk}. \quad (11)$$

若考虑微惯性效应和动挠曲电效应,此时的动能密度可写为

$$k = \frac{1}{2} \rho \dot{w}^2 + M_{ij} \dot{w} \dot{P}_j + \frac{1}{2} \rho L^2 (\dot{w}_{i,j})^2, \quad (12)$$

其中,  $\rho$  为质量密度,  $M_{ij}$  为动态挠曲电系数,  $\dot{P}_j$  为极化对时间的导数,可写成  $\dot{P}_j = f_{ijkl} \dot{\eta}_{ijk}$ ,  $L$  为材料的微惯性特征长度.考虑挠曲电效应、动态挠曲电效应以及微惯性效应的梁的控制方程可通过 Hamilton 原理推导得到

$$\delta \int_0^T (K - U) dt = 0, \quad (13)$$

其中,  $K$  为动能,  $U$  为弹性势能.经过变分推导,最终可得到控制方程:

$$\left( \left( c_{1111} + \frac{e_{311}e_{311}}{a_{33}} \right) I_y + \frac{f_{3113}f_{3113}}{a_{33}} A \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho L^2 A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - 2AM_{31}f_{3113} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (14)$$

其中,  $\rho L^2 A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}$  与  $2AM_{31}f_{3113} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}$  分别代表由于动挠曲电效应以及微惯性效应所导致的关于时间与位移相关的耦合项.若忽略体挠曲电效应、动挠曲电效应以及微惯性效应,上述公式将会退化成

$$\left( c_{1111} + \frac{e_{311}e_{311}}{a_{33}} \right) I_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (15)$$

该公式即为经典的压电梁控制方程.为了忽略压电效应的影响,本文选用中心对称的电介质材料,此时梁结构动力学方程可写成

$$\left( c_{1111} I_y + \frac{f_{3113}f_{3113}}{a_{33}} A \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho L^2 A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - 2AM_{31}f_{3113} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (16)$$

## 1.2 声子晶体梁能带计算

假设声子晶体梁的材料 A 和材料 B 共同组成单胞,长度分别为  $l_A$  和  $l_B$ ,此时声子晶体梁单胞总长度为  $l = l_A + l_B$ .若定义  $i$  代表单胞中各段的编号,比如,  $i = 1$  代表单胞中的第 1 段梁,  $i = 2$  代表单胞中的第 2 段梁.此时,考虑体挠曲电效应、动挠曲电效应以及微惯性效应的第  $i$  段梁的控制方程可写成

$$\left( c_{1111} I_y + \frac{f_{3113}f_{3113}}{a_{33}} A \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho L^2 A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - 2AM_{31}f_{3113} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (17)$$

其中,  $EI_{\text{ieff}} = c_{1111} I_y + \frac{f_{3113}f_{3113}}{a_{33}} A_i$ , 可以理解为考虑挠曲电效应时梁的等效抗弯刚度.对于稳态振动问题,梁的横向位移响应可以表示为

$$w_i(x, t) = \varphi_i(x) e^{j\omega t}. \quad (18)$$

将横向位移通解(18)代入梁的控制方程(17)中,可得到以下条件:

$$\frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^4} - \gamma_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} - \beta_i \varphi_i = 0, \quad (19)$$

其中,  $\gamma_i, \beta_i$  分别满足

$$\gamma_i = \frac{A_i \omega^2 (\rho_i l_i^2 - 2M_{i31} f_{i3113})}{EI_{ieff}}, \beta_i = \frac{\rho_i A_i \omega^2}{EI_{ieff}}. \quad (20)$$

进一步,可写出方程(19)的通解形式:

$$\varphi_i(x) = B_i \sin(\lambda_i^{(1)} x) + C_i \cosh(\lambda_i^{(2)} x) + D_i \sinh(\lambda_i^{(2)} x) + E_i \cos(\lambda_i^{(1)} x), \quad (21)$$

其中,  $B_i, C_i, D_i, E_i$  为待定系数,  $\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}$  为对应特征方程的解,具体表达式为

$$\lambda_i^{(1)} = \sqrt{\sqrt{\beta_i + \frac{\gamma_i^2}{4}} - \frac{\gamma_i}{2}}, \lambda_i^{(2)} = \sqrt{\sqrt{\beta_i + \frac{\gamma_i^2}{4}} + \frac{\gamma_i}{2}}. \quad (22)$$

在声子晶体梁的第  $n$  个单胞的左右两边的边界上,横向位移、转角、弯矩以及剪力四个边界条件应当满足连续性条件:

$$\begin{cases} \varphi_{n2}(0) = \varphi_{n1}(l_1), \varphi'_{n2}(0) = \varphi'_{n1}(l_1), \\ EI_{2eff} \varphi''_{n2}(0) = EI_{ieff} \varphi''_{n1}(l_1), EI_{2eff} \varphi'''_{n2}(0) = EI_{ieff} \varphi'''_{n1}(l_1). \end{cases} \quad (23)$$

为了简便计算,可将上述四个式子写成矩阵形式:

$$\mathbf{K}_2 \boldsymbol{\psi}_{n2} = \mathbf{H}_1 \boldsymbol{\psi}_{n1}. \quad (24)$$

同理,在第  $n$  个单胞的第二段和第  $n+1$  个单胞的第一段的界面处,连续性条件可写成

$$\mathbf{K}_1 \boldsymbol{\psi}_{(n+1)1} = \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\psi}_{n2}, \quad (25)$$

其中

$$\boldsymbol{\psi}_{ni} = [B_{ni} \ C_{ni} \ D_{ni} \ E_{ni}]^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i^{(1)} & 0 & \lambda_i^{(2)} \\ -EI_{ieff}(\lambda_i^{(1)})^2 & 0 & EI_{ieff}(\lambda_i^{(2)})^2 & 0 \\ 0 & -EI_{ieff}(\lambda_i^{(1)})^3 & 0 & EI_{ieff}(\lambda_i^{(2)})^3 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_i^{(1)} l_i) & \sin(\lambda_i^{(1)} l_i) \\ -\lambda_i^{(1)} \sin(\lambda_i^{(1)} l_i) & \lambda_i^{(1)} \cos(\lambda_i^{(1)} l_i) \\ -EI_{ieff}(\lambda_i^{(1)})^2 \cos(\lambda_i^{(1)} l_i) & -EI_{ieff}(\lambda_i^{(1)})^2 \sin(\lambda_i^{(1)} l_i) \\ EI_{ieff}(\lambda_i^{(1)})^3 \sin(\lambda_i^{(1)} l_i) & -EI_{ieff}(\lambda_i^{(1)})^3 \cos(\lambda_i^{(1)} l_i) \\ \cosh(\lambda_i^{(2)} l_i) & \sinh(\lambda_i^{(2)} l_i) \\ \lambda_i^{(2)} \sinh(\lambda_i^{(2)} l_i) & \lambda_i^{(2)} \cosh(\lambda_i^{(2)} l_i) \\ EI_{ieff}(\lambda_i^{(2)})^2 \cosh(\lambda_i^{(2)} l_i) & EI_{ieff}(\lambda_i^{(2)})^2 \sinh(\lambda_i^{(2)} l_i) \\ EI_{ieff}(\lambda_i^{(2)})^3 \sinh(\lambda_i^{(2)} l_i) & EI_{ieff}(\lambda_i^{(2)})^3 \cosh(\lambda_i^{(2)} l_i) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

联立式(24)和(25),得到

$$\boldsymbol{\psi}_{(n+1)} = \mathbf{T} \boldsymbol{\psi}_{n1}, \quad (29)$$

其中,  $\mathbf{T} = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{H}_2 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{H}_1$  为每个单胞的传递矩阵.结合 Bloch 定理,周期系统中的弹性波传播可简化为特征值问题:

$$|\mathbf{T} - e^{ikl} \mathbf{I}| = 0, \quad (30)$$

其中,  $\mathbf{I}$  为四阶单位矩阵,  $k$  为波数,  $l$  代表单胞长度.通过计算不可约 Brillouin 区中所有波数  $k$  对应的频率  $\omega$ , 最终得到挠曲电声子晶体能带结构.

### 1.3 声子晶体悬臂梁的固有频率

对含有  $N$  个单胞的一维声子晶体梁结构,整体的传递矩阵可以写成

$$\mathbf{T}^N = \mathbf{T}_N \cdots \mathbf{T}_r \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1. \quad (31)$$

整体声子晶体梁结构最左侧状态向量  $\mathbf{S}_L$ 、最右侧状态向量  $\mathbf{S}_R$  与总体传递矩阵  $\mathbf{T}^N$  之间的关系式为

$$\mathbf{T}^N \mathbf{S}_L = \mathbf{S}_R. \quad (32)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} T_{11}^N & T_{12}^N & T_{13}^N & T_{14}^N \\ T_{21}^N & T_{22}^N & T_{23}^N & T_{24}^N \\ T_{31}^N & T_{32}^N & T_{33}^N & T_{34}^N \\ T_{41}^N & T_{42}^N & T_{43}^N & T_{44}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_L \\ \theta_L \\ M_L \\ Q_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_R \\ \theta_R \\ M_R \\ Q_R \end{bmatrix}, \quad (33)$$

其中  $w, \theta, M$  以及  $Q$  分别代表位移、转角、弯矩以及剪力,下标 L 和 R 则分别表示左端和右端.为了求解挠曲电声子晶体梁的固有频率,需进一步考虑梁的边界条件.假设结构为悬臂梁,此时的  $\mathbf{S}_L$  和  $\mathbf{S}_R$  分别可以写成  $[0 \ 0 \ M_L \ Q_L]^T$  和  $[w_R \ \theta_R \ 0 \ 0]^T$ ,代入式(33),可以得到

$$\begin{bmatrix} T_{33}^N & T_{34}^N \\ T_{43}^N & T_{44}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_L \\ Q_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

为使方程(34)存在非零解,系数矩阵的行列式必须为零,则频率方程可写成

$$T_{33}^N T_{44}^N - T_{34}^N T_{43}^N = 0. \quad (35)$$

因此,运用 Prohl 法方程则可得到挠曲电声子晶体悬臂梁的固有频率.

## 2 数值结果和讨论

为了忽略压电效应的影响,选取了两种典型的中心对称材料( $\text{BaTiO}_3$  和  $\text{SrTiO}_3$ )开展数值讨论,两种材料分别对应图 1 中材料 A 和材料 B,具体材料和几何参数见表 1.

表 1 声子晶体梁的材料和几何性质

Table 1 Material and geometric properties of phonon crystal beams

parameter	$\text{BaTiO}_3$	$\text{SrTiO}_3$
relative permittivity ( $a$ )	$4 \times 10^3$	$3 \times 10^2$
$\rho / (\text{kg}/\text{m}^3)$	$4.50 \times 10^3$	$4.81 \times 10^3$
$f / (\text{C}/\text{m})$	$5.0 \times 10^{-4}$	$1.0 \times 10^{-4}$
$E / (\text{N}/\text{m}^2)$	$1.62 \times 10^{11}$	$3.50 \times 10^{11}$
$b / \text{m}$	$1 \times 10^{-10}$	$1 \times 10^{-10}$

### 2.1 各种微观效应对色散曲线的影响

图 3 为考虑各种微观效应时声子晶体梁的能带结构,其中黑色正方形点对应经典声子晶体梁的色散曲线,红色圆圈对应考虑了挠曲电效应的情况,蓝色正三角曲线以及紫色倒三角曲线则是在挠曲电效应基础上分别加上了微惯性效应以及动挠曲电效应.在分析中用  $\pi/l$  对波数  $k$  进行了归一化处理.

结果表明,对于微米尺寸的声子晶体梁而言,微惯性效应以及动挠曲电效应对声子晶体梁能带结构的影响不大.定量规律可参考式(22),实际上,挠曲电效应对梁动力学特性的影响主要是改变了材料的等效弹性模量,因此,挠曲电效应具有明显的尺寸效应,对于结构几何参数越小的声子晶体梁模型,挠曲电效应越明显.微惯性效应以及动挠曲电效应是位移与时间的耦合项,对声子晶体梁波动特性的影响较小.

从色散曲线上看,与经典的弹性声子晶体梁模型相比,挠曲电效应显著提高了第一带隙以及第二带隙的中心频率以及宽度.此外,色散曲线的斜率代表了声子群速度,而声子晶体的群速度会影响结构的热传输性质.结果表明,挠曲电效应将引起更大的声子群速度和热导率.总的来看,挠曲电效应显著改变了声子晶体梁的能带结构.若继续缩小声子晶体梁的结构尺寸,挠曲电效应的影响作用会更加明显.下文将着重分析,当结构缩小到何种尺度时,微惯性效应以及动挠曲电效应才有明显的影响作用.

从理论式(17)可以看出,  $\rho L^2 A \partial^4 w / (\partial x^2 \partial t^2)$  与  $2AM_{31} f_{3113} \partial^4 w / (\partial x^2 \partial t^2)$  分别为代表微惯性效应以及动挠曲电效应所引起的耦合项,它们的大小反映了各自对结构动力特性的影响程度.其中,因为动挠曲电效应系数包含了挠曲电系数,因此动挠曲电效应必须与挠曲电效应同时考虑.比较微惯性效应的系数  $\rho L^2 A$  与动挠曲电效应的系数  $2AM_{31} f_{3113}$ ,代入文中参数发现,动挠曲电系数的数值比微惯性效应大 1 000 倍.换句话说,在同一尺寸下,动挠曲电效应比微惯性效应的影响更加显著.

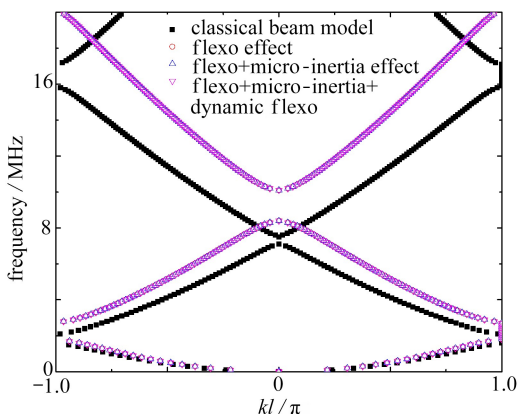
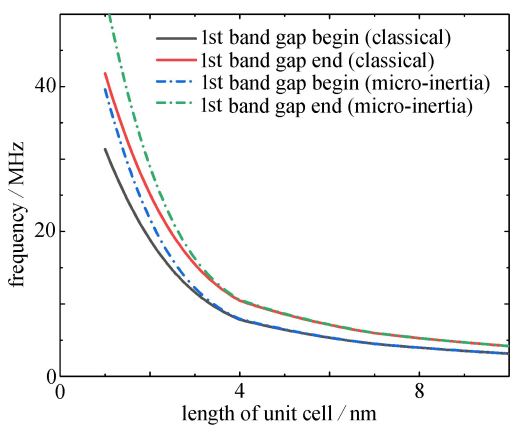


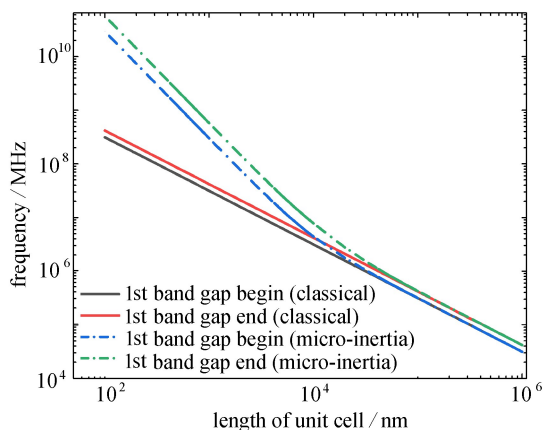
图 3 考虑各种微观效应的声子晶体梁色散曲线

Fig. 3 Dispersion curves of phononic crystal beams under various microscopic effects



(a) 经典弹性和只考虑微惯性效应结果对比

(a) Classical vs. micro-inertial effects



(b) 经典弹性和考虑所有微观效应结果对比

(b) Classical vs. all micro-effects

图 4 第一带隙频率随单胞长度变化曲线

Fig. 4 Variations of the 1st gap frequencies with cell lengths

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

为更清楚地讨论挠曲电效应、微惯性效应以及动挠曲电效应在什么尺寸下对结构动力学特性产生明显的影响,图 4(a)描绘了经典声子晶体梁与仅微惯性效应(此时不含挠曲电效应)的声子晶体梁第一带隙起止频率随单胞尺寸的变化曲线.结果表明,考虑微惯性效应会明显改变声子晶体梁第一带隙的带宽以及中心频率,整体呈现上升的趋势,即第一带隙变得更宽更高.微惯性效应体现了时间与位移的耦合项,因此考虑微惯性本质上增大了结构的动能密度.

进一步绘制经典声子晶体梁与考虑所有微观效应(即挠曲电效应、微惯性效应及动挠曲电效应)的声子晶体梁第一带隙的对比图(图 4(b)).结果发现,当单胞尺寸越小时,挠曲电效应对第一带隙的影响就越大,体现了挠曲电的尺寸效应本质.数值上,结构尺寸大于 100  $\mu\text{m}$  时,挠曲电效应可以忽略.总的来说,当单胞尺寸小于 10 nm 时,微惯性效应不可忽略,单胞尺寸小于 100  $\mu\text{m}$  时,挠曲电效应不可忽略.由方程(20)中各项系数计算可知,当尺寸在微米级别时,挠曲电效应远比动挠曲电效应明显,起主导作用.在后文的计算中,选

取的单胞尺寸为  $40\ \mu\text{m}$ , 此时微惯性效应以及动挠曲电效应可以忽略不计, 后文将着重关注挠曲电效应的影响。

## 2.2 单胞数以及结构尺寸对固有频率的影响

本小节将讨论在有无挠曲电效应下, 声子晶体中结构的厚度比、长度比以及单胞数对声子晶体梁固有频率的影响。定义厚度比为  $\alpha_1 = h_A/h_B$ , 其中单胞中材料 B 的厚度是不变的, 仅改变了单胞中材料 A 的厚度。定义长度比为  $\alpha_2 = l_A/l_B$ , 声子晶体梁总的含有的单胞数为  $N_u$ 。假设声子晶体悬臂梁总长为  $320\ \mu\text{m}$ , 固定不变, 此时每一单胞的长度  $l$  为总长除单胞数。

如图 5 所示, 分析挠曲电效应、厚度比  $\alpha_1$ 、不同的单胞数 (2, 4, 6, 8) 对声子晶体梁固有频率的影响。图上区分开的三组曲线分别对应前三阶频率。结果表明, 无论是否考虑挠曲电效应, 声子晶体梁的固有频率均随厚度比的增加而增大。单胞个数越多, 结构固有频率越小, 但影响幅度不大。

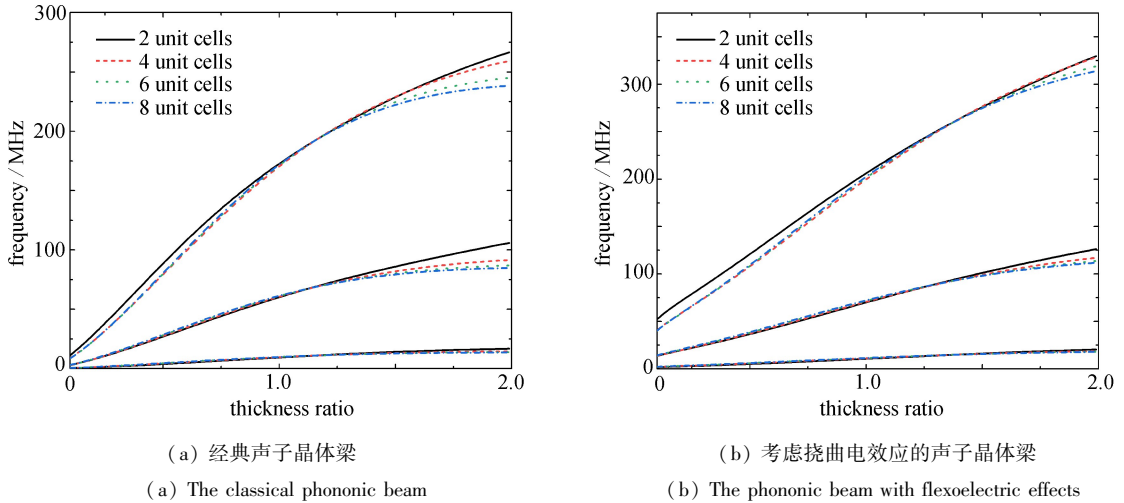


图 5 单胞数以及厚度比对梁固有频率的影响曲线

Fig. 5 Influence curves of cell numbers and thickness ratios on natural frequencies of the beam

比较图 5(a) 和 5(b) 可以发现, 相比于经典声子晶体梁, 单胞个数对考虑挠曲电效应的声子晶体梁固有频率影响更小。为了更清楚地说明挠曲电效应的影响, 图 6 给出了挠曲电效应与厚度比对声子晶体梁固有频率的影响, 此时单胞数为 8。结果表明, 考虑挠曲电效应时结构的固有频率均大于经典弹性理论结果。原因在于, 挠曲电效应本质上增加了声子晶体梁中结构的弹性模量, 具体可以从理论部分方程 (17) 看出。整体来看, 无论挠曲电效应考虑与否, 随着厚度比增大, 声子晶体梁固有频率随之逐渐增大。

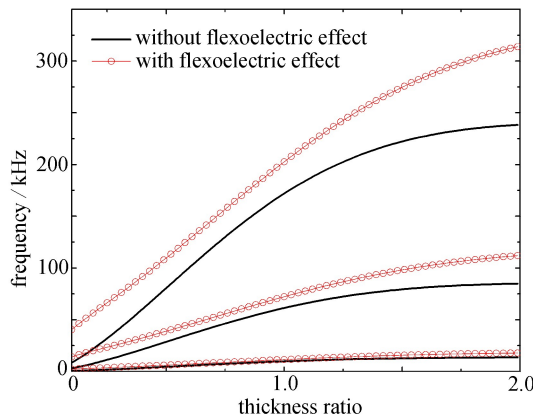


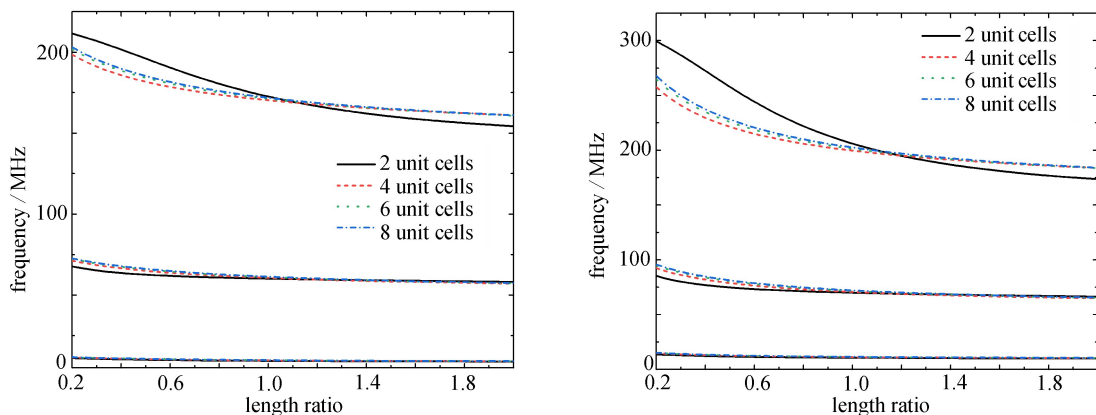
图 6 挠曲电效应与厚度比对声子晶体梁固有频率的影响

Fig. 6 Influences of the flexoelectric effect and thickness ratio on natural frequencies of the phonon crystal beam

图 7(a) 及图 7(b) 分别描述了在总长固定不变的情况下, 不同的单胞数 (2, 4, 6, 8)、长度比以及挠曲电效应对声子晶体梁前三阶固有频率的影响。结果表明, 与厚度比的影响规律不同的是, 随着长度比的增加, 声子晶体梁固有频率呈现减小的趋势, 但是长度比对固有频率的影响不及厚度比那么明显。挠曲电效应的考虑

与否并不影响声子晶体梁固有频率随长度比的变化趋势。单胞数越小,固有频率随着长度比的变化较为明显,当单胞数越多时,固有频率的数值基本重合。

当取单胞数为 8 时,图 8 给出了挠曲电效应与长度比的变化对声子晶体梁固有频率的影响。结果表明,考虑挠曲电效应时,固有频率的数值都是大于经典弹性理论计算得到的固有频率的。随着长度比的增加,声子晶体梁的固有频率呈现下降的趋势,当考虑挠曲电效应时,固有频率下降的幅度就越大。



(a) 经典声子晶体梁 (b) 考虑挠曲电效应的声子晶体梁  
(a) The classical phononic beam (b) The phononic beam with flexoelectric effects

图 7 单胞数以及长度比对梁固有频率的影响曲线

Fig. 7 Influence curves of cell numbers and length ratios on natural frequencies of the beam

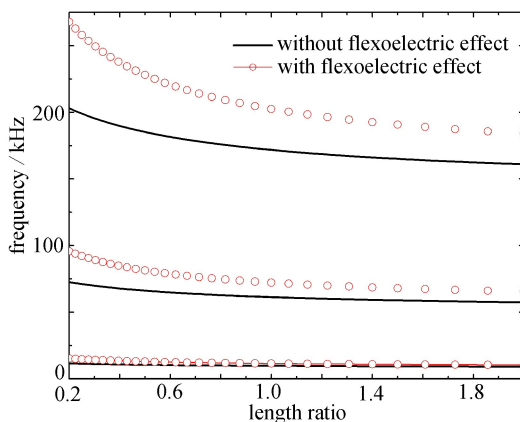


图 8 挠曲电效应与长度比对声子晶体梁固有频率的影响

Fig. 8 Influences of the flexoelectric effect and the length ratio on natural frequencies of the phonon crystal beam

### 2.3 结构尺寸对色散曲线的影响

带隙宽度以及中心频率是声子晶体梁设计的核心指标之一。本小节将讨论厚度比、长度比对声子晶体中心频率以及带宽的影响规律,便于今后结构设计时选取较优的结构参数。

图 9(a)和 9(b)分别给出了不同厚度比、长度比组合下结构第一禁带带宽的对比。其中横坐标代表厚度比,不同曲线代表不同的长度比,纵坐标代表声子晶体梁第一带隙带宽频段。图 9(a)为经典弹性理论下声子晶体梁第一带隙带宽随着长度比以及厚度比的变化曲线,而图 9(b)则是考虑了挠曲电效应。结果表明,不考虑挠曲电效应且长度比相同时,第一禁带的带宽随着厚度比先增加后减小,然后在转折点处继续增大,转折点发生在 1.5~1.6 附近,此时声子晶体梁对波的衰减效果较弱,在实际应用中需要避免。当长度比越大的时候,转折点所在的厚度比越小。当考虑挠曲电效应时,转折点已经超过厚度比 2,已不在目前的横坐标范围内。总的来看,相比于经典弹性情况,考虑挠曲电效应时第一禁带的带宽整体扩宽,这与前文结论类似。

图 10(a)和 10(b)分别给出了经典弹性理论与考虑挠曲电效应时第一禁带中心频率的变化曲线。横坐标代表厚度比,不同曲线代表不同的长度比,纵坐标则是声子晶体梁第一带隙的中心频率。相同长度比情况

下,第一禁带的中心频率随着厚度比的增加而增加.对于经典弹性情况,厚度比小于1.6时,长度比越小,中心频率越高;当厚度比大于1.6时,长度比越大,中心频率越高.可认为厚度比1.6为一个转折点.但是当考虑挠曲电效应时,情况有所区别,可以预测到这个转折点是在厚度比大于2之后才会出现.

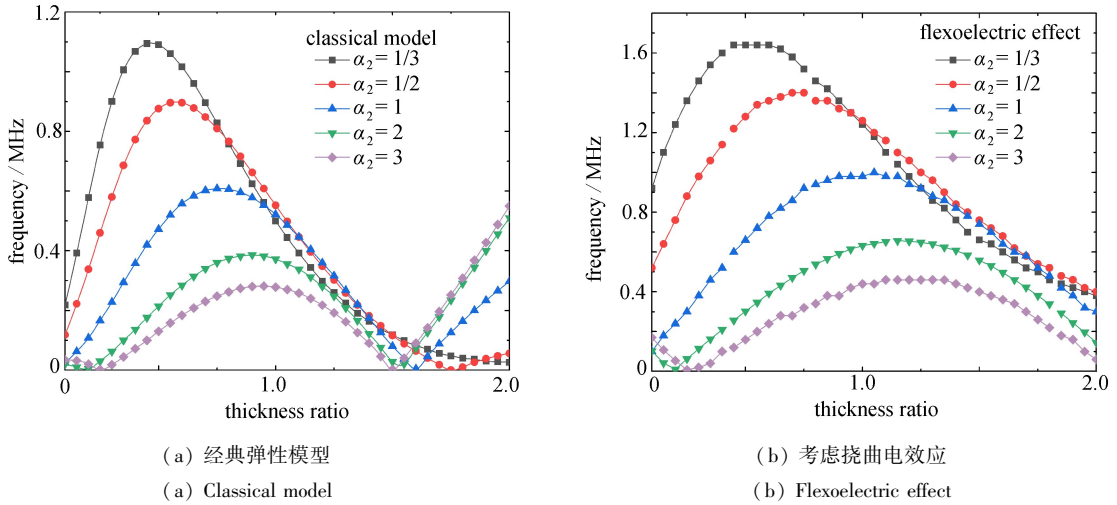


图9 第一禁带带宽变化曲线

Fig. 9 Variation curves of the 1st bandgap bandwidth

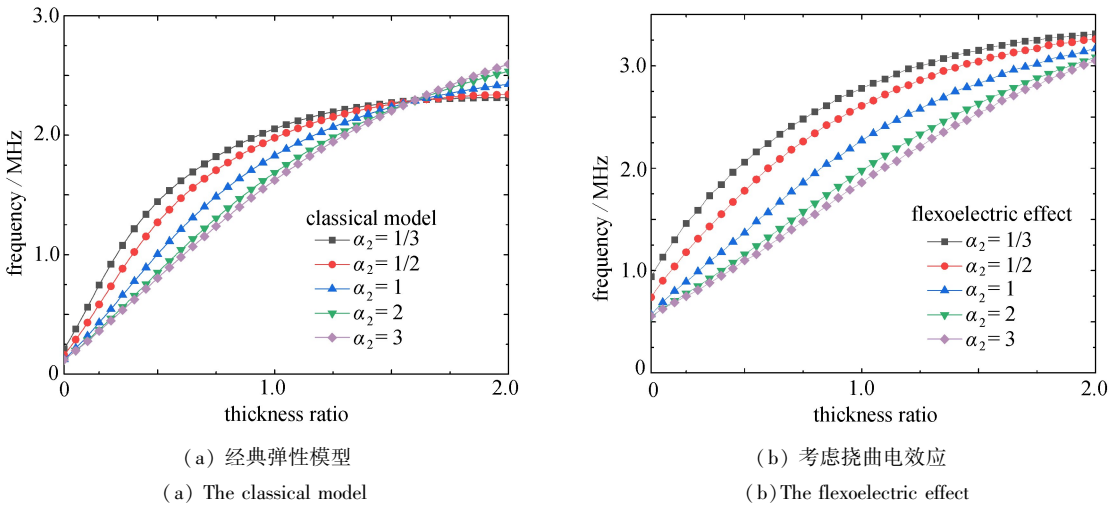


图10 第一禁带中心频率变化曲线

Fig. 10 Variation curves of center frequency of the 1st bandgap

### 3 有限元仿真验证

采用 COMSOL Mutiphysics 有限元软件来计算能带结构,验证理论结果.此时,立方相的  $\text{BaTiO}_3$  以及  $\text{SrTiO}_3$  的挠曲电系数取值为  $1.0 \times 10^{-5} \text{ C/m}$ ,长度分别为  $10 \mu\text{m}$  以及  $30 \mu\text{m}$ ,厚度为  $0.5 \mu\text{m}$  以及  $1 \mu\text{m}$ .具体来说,使用 COMSOL 中的固体模块,建立单胞的三维实体模型.如理论推导部分所述,挠曲电效应对于梁动力学特性上的影响可以等效为抗弯刚度的改变,在单胞两端施加 Floquet 周期性边界条件.为保证具有相同的几何尺寸来确保位移以及应力的连续,可额外建立空气域来确保最终选取的两端尺寸相同.选用扫掠网格,对结构进行波矢  $k_x$  以及  $k_y$  方向的参数化扫频,最终得到考虑挠曲电效应的声子晶体梁的能带结构.单胞建模形式、网格划分以及结果验证如图 11 所示.结果表明,有限元结果和理论结果两者吻合非常好,证明了理论仿真模型的有效性.

有限元软件不仅可以计算无限周期声子晶体梁的色散曲线,还可以计算有限周期梁的位移传输损失曲线.进一步,在 COMSOL 软件中,分别建立具有 5, 8, 11 个单胞的有限大声子晶体梁模型.选择频域模块,在梁

的左端施加简谐位移激励,使用探针分别测量末端与初始端的位移,在 15 MHz 的频率范围内,进行步长为 10 000 Hz 的扫频分析,利用探针得到的位移进行位移传输损失的计算,计算公式如下:

$$T(\omega) = 20 \cdot \lg \left( \frac{W_e}{W_i} \right), \quad (36)$$

其中  $W_e$  与  $W_i$  分别为通过探针得到的末端位移与初始端位移。不同单胞数对应的位移传输损失曲线如图 12 所示。结果表明,当单胞数越大时,传输损失越小,说明此时结构隔振性能越好。而且传输损失小于 0 dB 的频率区间和前文讨论的色散曲线禁带频段一一对应,再次证明了禁带对波动能量的控制效果。

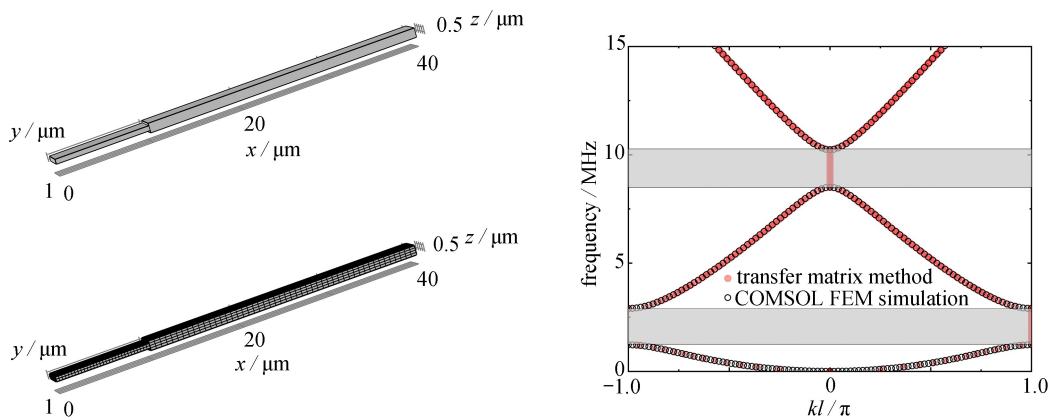


图 11 COMSOL 有限元仿真与理论计算结果对比

Fig. 11 Comparison of COMSOL simulation and theoretical calculation results

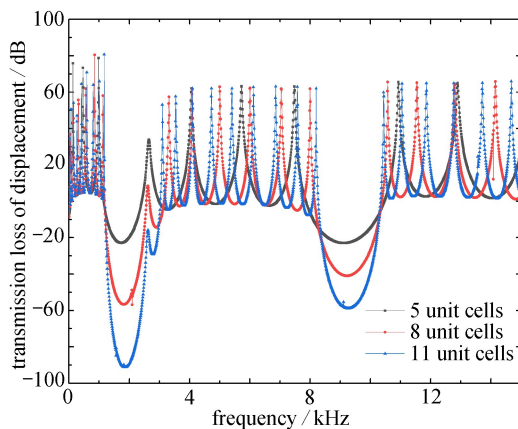


图 12 不同单胞数量下的位移传输损失曲线

Fig. 12 Displacement transmission loss curves for different cell numbers

## 4 总 结

本文建立了在微纳米尺寸下考虑挠曲电效应的声子晶体梁动力学模型,研究了结构的色散曲线以及悬臂约束下的固有频率特性。首先基于挠曲电效应的纳米电介质理论,从电学 Gibbs 自由能密度出发,得到了挠曲电材料的本构方程。进一步,基于 Bernoulli-Euler 梁的理论假设,运用变分原理推导出考虑挠曲电效应、微惯性效应以及动挠曲电效应的梁的控制方程。通过传递矩阵法预测考虑了挠曲电效应的声子晶体梁的能带结构以及有限长悬臂梁的固有频率。研究了挠曲电效应以及结构参数对固有频率和第一带隙的影响。

结果表明,挠曲电效应显著增加了固有频率,可通过改变结构参数来获得较宽带隙,并且通过与 COMSOL 有限元软件的仿真结果比较,验证了理论方法的有效性。此外,通过 COMSOL 有限元仿真研究了挠曲电声子晶体的能带结构以及有限大悬臂梁的传输损失曲线。结果表明,单胞数越大时,隔振性能越好。本文模型为今后在微纳米力电耦合传感器的研发和应用提供了理论依据。

致谢 本文作者衷心感谢面向苛刻环境的材料制备与防护技术工信部重点实验室开放课题(56XCA24025)对本文的资助。

#### 参考文献(References):

- [1] KOGAN S M. Piezoelectric effect during inhomogeneous deformation and acoustic scattering of carriers in crystals[J]. *Soviet Physics: Solid State*, 1964, **5**(10): 2069-2070.
- [2] HARRIS P. Mechanism for the shock polarization of dielectrics[J]. *Journal of Applied Physics*, 1965, **36**(3): 739-741.
- [3] MINDLIN R D. Polarization gradient in elastic dielectrics[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1968, **4**(6): 637-642.
- [4] ASKAR A, LEE P C Y, CAKMAK A S. Lattice-dynamics approach to the theory of elastic dielectrics with polarization gradient[J]. *Physical Review B*, 1970, **1**(8): 3525-3537.
- [5] INDENBOM V L, LOGINOV E B, OSIPOV M A. The flexoelectric effect and the structure of crystals[J]. *Soviet Physics: Crystallography*, 1981, **26**(6): 656-658.
- [6] BURSIAAN E V, TRUNOV N N. Nonlocal piezoelectric effect[J]. *Soviet Physics: Solid State*, 1974, **16**(4): 760-762.
- [7] MARANGANTI R, SHARMA N D, SHARMA P. Electromechanical coupling in nonpiezoelectric materials due to nanoscale nonlocal size effects: Green's function solutions and embedded inclusions[J]. *Physical Review B*, 2006, **74**: 014110.
- [8] HU S L, SHEN S P. Electric field gradient theory with surface effect for nano-dielectrics[J]. *Computers, Materials & Continua*, 2009, **13**(1): 63-87.
- [9] SHEN S P, HU S L. A theory of flexoelectricity with surface effect for elastic dielectrics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, **58**(5): 665-677.
- [10] BRILLOUIN L. *Wave Propagation in Periodic Structures: Electric Filters and Crystal Lattices*[M]. Mineola, NY: Dover Publications, 2003.
- [11] MARTÍNEZ-SALA R, SANCHO J, SÁNCHEZ J V, et al. Sound attenuation by sculpture[J]. *Nature*, 1995, **378**(6554): 241.
- [12] SIGALAS M M, ECONOMOU E N. Elastic and acoustic wave band structure[J]. *Journal of Sound Vibration*, 1992, **158**(2): 377-382.
- [13] KUSHWAHA M S, HALEVI P, DOBRZYNSKI L, et al. Acoustic band structure of periodic elastic composites[J]. *Physical Review Letters*, 1993, **71**(13): 2022-2025.
- [14] LIU Z Y, ZHANG X X, MAO Y W, et al. Locally resonant sonic materials[J]. *Science*, 2000, **289**(5485): 1734-1736.
- [15] GOLUB M V, ZHANG C Z, WANG Y S. SH-wave propagation and resonance phenomena in a periodically layered composite structure with a crack[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(13): 3141-3154.
- [16] BENCHABANE S, KHELIF A, RAUCH J Y, et al. Evidence for complete surface wave band gap in a piezoelectric phononic crystal[J]. *Physical Review E*, 2006, **73**(6): 065601.
- [17] LIU C C, HU S L, SHEN S P. Effect of flexoelectricity on band structures of one-dimensional phononic crystals[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, **81**(5): 051007.
- [18] YANG W J, HU T T, LIANG X, et al. On band structures of layered phononic crystals with flexoelectricity[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2018, **88**(5): 629-644.
- [19] YANG W J, DENG Q, LIANG X, et al. Lamb wave propagation with flexoelectricity and strain gradient elasticity considered[J]. *Smart Materials and Structures*, 2018, **27**(8): 085003.
- [20] HU T T, YANG W J, LIANG X, et al. Wave propagation in flexoelectric microstructured solids[J]. *Journal of Elasticity*, 2018, **130**(2): 197-210.
- [21] HAN L, ZHANG Y, NI Z Q, et al. A modified transfer matrix method for the study of the bending vibration band structure in phononic crystal Euler beams[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2012, **407**(23): 4579-

- 4583.
- [22] LIANG X, SHEN S P. Dynamic analysis of Bernoulli-Euler piezoelectric nanobeam with electrostatic force[J]. *Science China: Physics, Mechanics and Astronomy*, 2013, **56**(10): 1930-1937.
  - [23] LIANG X, SHEN S P. Effect of electrostatic force on a piezoelectric nanobeam[J]. *Smart Materials and Structures*, 2012, **21**(1): 015001.
  - [24] SHEN C, KONG Y, LU T J, et al. Localization of elastic waves in one-dimensional detuned phononic crystals with flexoelectric effect[J]. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2022, **13**(2): 244-262.
  - [25] 赵昊阳, 何状状, 张春利. 多孔挠曲电型超材料板中的弯曲波分析[J]. *应用数学和力学*, 2024, **45**(11): 1405-1415. (ZHAO Haoyang, HE Zhuangzhuang, ZHANG Chunli. Bending wave analysis of porous flexoelectric metamaterial plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(11): 1405-1415. (in Chinese))
  - [26] 郝一涵, 田新鹏, 邓谦. 固体材料中微孔洞间挠曲电场的相互作用[J]. *应用数学和力学*, 2024, **45**(11): 1381-1391. (HAO Yihan, TIAN Xinpeng, DENG Qian. Interaction between flexoelectric fields associated with micro-holes in solids[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(11): 1381-1391. (in Chinese))
  - [27] HE Z Z, ZHANG C L, ZHANG C Z, et al. Programmable dielectric metamaterial plates via flexoelectricity and L-C circuits[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2025, **286**: 109937.
  - [28] EXADAKTYLOS G E, VARDOLAKIS I. Surface instability in gradient elasticity with surface energy[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, **35**(18): 2251-2281.
  - [29] XU L, SHEN S P. Size-dependent piezoelectricity and elasticity due to the electric field-strain gradient coupling and strain gradient elasticity[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2013, **5**(2): 1350015.