

基于简化一阶剪切变形理论的功能梯度 扩展等几何材料分布优化*

戴 钊¹, 初晨旭², 茆雪明¹, 汪 超²

(1. 中交二航局第四工程有限公司, 安徽 芜湖 241000;
2. 安徽工程大学 力学重点实验室, 安徽 芜湖 241000)

摘要: 在实际工程应用中, 解决质量优化问题不仅能够有效降低成本, 还能显著提升结构性能。本文针对开孔功能梯度材料的质量优化问题, 提出了一种基于简化一阶剪切变形理论 (S-FSDT) 和扩展等几何分析 (XIGA) 的求解模型, 求解以第一自然频率和屈曲临界参数为约束、质量最小化的优化问题。优化算法采用基于 Lévy 飞行改进的人工兔子优化算法 (IARO), 显著提升了算法的全局探索能力和摆脱局部最优的能力。在优化设计中, B 样条函数取代了传统的功能梯度材料分布函数, 将材料分布的控制点作为设计变量。IARO 算法通过 CEC' 2019 测试函数的验证, 展现出优越的寻优性能。算例结果表明了该模型的有效性和可行性, 未来可以进一步探索该模型在更复杂工程结构中的应用, 实现更全面的结构优化设计。

关键词: 简化一阶剪切变形理论; 扩展等几何; 开孔功能梯度板; 人工兔子优化算法
中图分类号: O341 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460011

Functionally Graded Extended Isogeometric Material Distribution Optimization Based on the Simple First-Order Shear Deformation Theory

DAI Zhao¹, CHU Chenxu², MAO Xueming¹, WANG Chao²

(1. CCCC Second Navigation Bureau Fourth Engineering Co.,
Wuhu, Anhui 241000, P.R. China;
2. Key Laboratory of Mechanics, Anhui Polytechnic University,
Wuhu, Anhui 241000, P.R. China)

Abstract: In practical engineering applications, solving the mass optimization problem can not only effectively reduce the cost, but also significantly improve the structural properties. To address this mass optimization problem of functional graded material plates with holes, a solution model was proposed based on the simple first-order shear deformation theory (S-FSDT) and the extended isogeometric analysis (XIGA) to solve the mass minimization problem with the first natural frequency and the buckling critical parameter as the constraints. In the

* 收稿日期: 2025-01-16; 修订日期: 2025-06-17

基金项目: 安徽省住房城乡建设科学计划项目 (2023-YF062); 国家自然科学基金 (52408141); 安徽高校协同创新项目 (GXXT-2022-082)

作者简介: 戴钊 (1992—), 男, 工程师 (E-mail: 1950267143@qq.com);
汪超 (1985—), 男, 副教授 (通信作者, E-mail: wangchao@ahpu.edu.cn)。

引用格式: 戴钊, 初晨旭, 茆雪明, 汪超. 基于简化一阶剪切变形理论的功能梯度扩展等几何材料分布优化[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(5): 560-576.

optimization procedure, an improved artificial rabbits optimization (IARO) algorithm incorporating the Lévy flight strategies was employed, which substantially enhances the algorithm's global exploration capability and enables effective escape from local optima. In the optimization design, the B-spline function was used to replace the traditional functionally graded material distribution function, and the control points of the material distribution were used as design variables. The IARO algorithm demonstrates superior optimization performance through comprehensive benchmark testing through the CEC 2019 test functions, and the results of the arithmetic examples show the validity and feasibility of the proposed model, which can be further explored in the future for the application of the model in more complex engineering structures to achieve a more comprehensive structural optimization design.

Key words: simple first-order shear deformation theory; extended isogeometric analysis; functionally graded plate with holes; artificial rabbit optimization algorithm

0 引 言

功能梯度材料(functionally graded material, FGM)^[1]是一种新型的复合材料,其组成和性能在材料的厚度或长度方向上呈连续或准连续变化,通过在材料不同部分引入不同结构,可以实现材料性能呈梯度变化。FGM 因其独特的力学性能,已广泛应用到航空航天、核能、生物医学、机械制造等众多领域中^[2-4]。

板理论是解决板结构,尤其是功能梯度(FG)板结构问题的关键工具之一,常见的板理论框架有:经典板理论(classical plate theory, CPT)^[5]、一阶剪切变形理论(first-order shear deformation theory, FSDT)^[6]、简单一阶剪切变形理论(simple first-order shear deformation theory, S-FSDT)^[7-8]、三阶剪切变形理论(third-order shear deformation theory, TSDT)^[9]和高阶剪切变形理论(higher order shear deformation theory, HSDT)^[10]。CPT 由于未考虑剪切变形因素,仅适用于薄板;与 CPT 相比, FSDT 可同时适用于厚板和薄板,但在处理薄板问题时容易出现剪切锁定问题。尽管 HSDT 与 TSDT 在处理剪切变形方面更为精确,但它们都需要较高的计算成本,并且需要满足 C^1 连续性。与 FSDT 相比, S-FSDT 通过将横向挠度划分为弯曲分量和剪切分量,能够节省一个未知数,且有效避免了剪切锁定问题。然而, S-FSDT 需要广义位移的 C^1 连续性,这一要求在传统的基于 C^0 连续性的有限元分析中,往往会带来一些困难。然而,伴随等几何分析(isogeometric analysis, IGA)^[11]中非均匀有理 B 样条(NURBS)等依赖于 C^1 连续性的基函数方法的引入, S-FSDT 的 C^1 连续性问题得到完美地解决。IGA 的基本思想是将计算机辅助设计(CAD)中的 NURBS^[12]设为计算机辅助工程(CAE)形函数。NURBS 基函数可构造高阶连续近似函数,利于求解高阶连续性问题。IGA 具有几何精确性高、高阶连续、易自适应分析、无需传统网格划分等优点,适用于计算网格设计^[13]和几何结构力学分析^[14-16]。在 FGM 领域,科学地优化材料分布能够显著提升功能梯度板的力学性能。当下,国内外众多学者在 FG 板材料优化分布方面已取得了一些研究进展:例如,陈明飞等^[17]基于平面应变理论并结合等几何方法,研究弹性边界条件下面内 FG 三角形板的面内振动特性;Goupee 等^[18]采用无单元 Galerkin 方法和实编码遗传算法方法,通过优化材料组成,实现了最小化峰值残余应力和质量的目标;李信卿等^[19]采用基于 SIMP 模型的拓扑优化设计方法,以最小化结构散热弱度为目标,采用灵敏度过滤和移动渐近线法优化设计变量,成功获得具有良好散热性能的周期性 FG 结构。

在众多零部件及结构中,孔洞的应用极为广泛。结构开孔不仅能够有效减轻重量,还便于安装与功能集成,同时优化力学性能,促进热交换与通风,进而显著提升结构的适应性与灵活性。然而,由于 NURBS 参数空间中张量积^[19-20]形式的限制,导致 IGA 在面面对此问题时,灵活性不足。相关学者提出通过多片拼接^[21]和网格剪裁^[22-24]的方法来研究带孔结构的力学响应问题,但这些方法存在局限性,如:多片拼接要求在曲面边界处需要精确地对齐与连接,计算复杂度较高;网格剪裁方法在剪裁过程中可能会产生多个细小的网格,误差影响较大。扩展等几何有限元分析(extended isogeometric analysis, XIGA)方法最早由 Benson 等^[25]提出,将 NURBS 作为基函数,在处理复杂几何结构和不连续问题时,提供较高的计算精度和效率。Wang 等^[26]将 XIGA 和混沌粒子群优化算法(CPSO)相结合,针对具有切口结构进行形状优化,并通过数值计算成功验证了此数

学框架的可行性和可靠性。

综上所述,本文针对开孔 FGM 的质量优化问题,采用基于 S-FSDT 的 XIGA 方法,解决以第一自然频率和屈曲载荷作为约束条件,质量最小化的优化问题。在此方法中,选用 B 样条函数作为材料函数,以 B 样条的控制点作为变量,通过算例验证该方法的正确性和可行性。

1 理论形式

1.1 FGM 板

针对陶瓷-金属 FG 板,假定 FG 板的底面和顶面分别为全金属陶瓷结构。在本研究中,Poisson 比 ν 为常数,弹性模量 E 和密度 ρ 随厚度的变化而变化,并采用幂指数分布:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n, \quad (1)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n, \quad (2)$$

式中, n 为梯度指数, z 为厚度方向的坐标变量 ($-h/2 \leq z \leq h/2$), 下标 c 和 m 分别代表陶瓷和金属材料。

1.2 位移形式

在 FSDT 中,三维位移场 (u, v, w) 可以用以下五个未知变量来表示:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y), \quad (3a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y), \quad (3b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y), \quad (3c)$$

式中, u_0, v_0 和 w_0 分别表示板中平面在 x, y 和 z 轴方向上的位置; ϕ_x 和 ϕ_y 表示它们和 x 轴的横向、法向旋转。

S-FSDT 的假设如下: ① 横向位移 w_0 分解成弯曲分量和剪切分量,即 $w_0 = w_b + w_s$; ② 旋转变量用弯曲分量表示,即 $\phi_x = -\partial w_b / \partial x, \phi_y = -\partial w_b / \partial y$ 。式(3)简化为

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\partial w_b(x, y) / \partial x, \quad (4a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\partial w_b(x, y) / \partial y, \quad (4b)$$

$$w(x, y, z) = w_s(x, y) + w_b(x, y), \quad (4c)$$

与 FSDT 相比, S-FSDT 的位移场只包含四个未知量,即 u_0, v_0, w_b, w_s 。

根据几何方程,其应变-位移关系如下:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

式(5)通过矩阵的形式表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -z\boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}$ 表达式如下:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_s}{\partial x} \\ \frac{\partial u_s}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

本构关系由 Hooke 定律推导得到:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_m(z) (\boldsymbol{\varepsilon}_0 - z\boldsymbol{\kappa}), \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_s(z) \boldsymbol{\gamma}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T, \boldsymbol{\tau} = [\tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T, \quad (9)$$

$$\mathbf{D}_m(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_s(z) = \frac{kE(z)}{2(1 + \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中, k 是修正系数, 本文 k 取值为 $5/6$.

1.3 弱形式

IGA 中的参数域类似于有限元方法 (FEM) 中的等参空间, 因此, 中间平面中的广义位移近似如下:

$$\mathbf{u}_0^h = \sum_{I=1}^{NP} R_I \mathbf{u}_I, \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_0^h = [u_0^h \quad v_0^h \quad w_b^h \quad w_s^h]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{u}_I = [u_I \quad v_I \quad w_{bI} \quad w_{sI}]^T, \quad (14)$$

式中, $NP = (p + 1)(q + 1)$ 代表控制点的数量, R_I 和 \mathbf{u}_I 代表第 I 个控制点的形函数和位移向量, 将式 (12) 代入式 (7), 可以得到以下结果:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{B}_I^m \mathbf{u}_I, \quad (15a)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{B}_I^b \mathbf{u}_I, \quad (15b)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{I=1}^{NP} \mathbf{B}_I^s \mathbf{u}_I, \quad (15c)$$

$$\mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} R_{I,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{I,y} & 0 & 0 \\ R_{I,y} & R_{I,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16a)$$

$$\mathbf{B}_I^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,xx} & 0 \\ 0 & 0 & R_{I,yy} & 0 \\ 0 & 0 & 2R_{I,xy} & 0 \end{bmatrix}, \quad (16b)$$

$$\mathbf{B}_I^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,y} \end{bmatrix}. \quad (16c)$$

对于静力学问题, 其弱形式可以表示为

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}^s \boldsymbol{\gamma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta (w_b + w_s) f d\Omega, \quad (17)$$

式中, f 是单位面积的横向荷载, 式 (13) 中的 $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{D} 和 \mathbf{D}^s 分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{D}^b \end{bmatrix}, \mathbf{D}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{D}_s(z) dz, \quad (18)$$

式中, \mathbf{D}^m , $\bar{\mathbf{B}}$ 和 \mathbf{D}^b 的积分公式如下:

$$\mathbf{D}^m = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{D}_m(z) dz, \quad (19a)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{D}_m(z) dz, \quad (19b)$$

$$\mathbf{D}^b = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathbf{D}_m(z) dz. \quad (19c)$$

针对动力学问题,其弱形式为

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega, \quad (20)$$

式中

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} I_0 & I_1 \\ I_1 & I_2 \end{bmatrix}, \quad (I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz, \quad (21)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}, \quad (22a)$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_0^h \\ v_0^h \\ w_b^h + w_s^h \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{NP} \mathbf{N}_l^1 \mathbf{u}_l \quad (22b)$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{Bmatrix} \partial w_b^h / \partial x \\ \partial w_b^h / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{NP} \mathbf{N}_l^2 \mathbf{u}_l, \quad (22c)$$

$$\mathbf{N}_l^1 = \begin{bmatrix} R_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_l & R_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_l^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{l,x} & 0 \\ 0 & 0 & R_{l,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

最后,对于屈曲分析,弱形式可表达如下:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}^s \boldsymbol{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^T \delta (w_b + w_s) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \nabla (w_b + w_s) d\Omega = 0, \quad (24)$$

式中, $\nabla^T = [\partial/\partial x \quad \partial/\partial y]^T$ 为梯度算子, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix}$ 是平面内的前屈曲应力。

将式(15)和(18)代入式(17),(20)和(24)中,得到结构静力问题、自由振动问题和屈服问题的计算结果如下:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}, \quad (25a)$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (25b)$$

$$(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_g) \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (25c)$$

式中,刚度矩阵 \mathbf{K} 、载荷向量 \mathbf{F} 、全局矩阵 \mathbf{M} 和刚度矩阵 \mathbf{K}_g 的计算公式如下:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \mathbf{D}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}^m \\ \mathbf{B}^b \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{B}^s)^T \mathbf{D}^s \mathbf{B}^s d\Omega, \quad (26)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} f N d\Omega, \quad N_l = [0 \quad 0 \quad R_l \quad R_l]^T, \quad (27)$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^1 \\ \mathbf{N}^2 \end{Bmatrix}^T \mathbf{m} \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^1 \\ \mathbf{N}^2 \end{Bmatrix} d\Omega, \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^s)^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \mathbf{B}^s d\Omega, \quad (29)$$

式中, $\mathbf{B}_i^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{I,x} & R_{I,x} \\ 0 & 0 & R_{I,y} & R_{I,y} \end{bmatrix}$.

1.4 XIGA

1.4.1 NUBRS 基函数

在参数空间 ξ 中, 节点向量由一系列介于 0 和 1 之间的非递减值组成. 对于一个特定的节点向量, 度数为 p 的第 i 个 B 样条基函数递归定义如下:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad p = 0, \tag{30}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi), \quad p \geq 1, \tag{31}$$

式中, p 为阶数; n 是构成 B 样条曲线的基函数个数. 通过引入二维控制点的权重, 可定义二维 NURBS 基函数为

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \omega_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \omega_{i,j}}, \tag{32}$$

式中, $\omega_{i,j}$ 是权重; $N_i^p(\xi)$ 和 $N_j^q(\eta)$ 分别是在 ξ 和 η 方向上的 p 和 q 的 B 样条基函数, $N_i^p(\xi)$ 和 $N_j^q(\eta)$ 由递归公式得到, $\mathbf{k}(\eta)$ 和 $\mathbf{k}(\xi)$ 均为节点向量.

1.4.2 XIGA 位移近似法

在 XIGA 中, 使用 NURBS 基函数来近似位移场, 其固有的高阶连续性特性使得应力场更为平滑, 多孔结构的 XIGA 近似值可定义为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m R_i(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i, \tag{33}$$

式中, $H(\mathbf{x})$ 是富集函数, 定义如下:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases} \tag{34}$$

1.4.3 离散方程

根据近似公式 (33), 利用 Bubnov-Galerkin, 可以得到标准离散方程:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{R}, \tag{35}$$

式中, \mathbf{K} 和 \mathbf{R} 分别为全局刚度矩阵和控制点的外力向量, \mathbf{d} 是控制点处的位移向量.

\mathbf{K} 中元素由下式计算得到:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} H(\mathbf{x}) \mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_j d\Omega, \tag{36}$$

式中, \mathbf{C} 为应力应变矩阵, \mathbf{B}_i 为应变矩阵:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_i}{\partial y} \\ \frac{\partial R_i}{\partial y} & \frac{\partial R_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

此外, 控制点的外力向量 \mathbf{R} 元素由下式计算得到:

$$r_i = \int_{T_\sigma} H R_i t d\Gamma + \int_{\Omega} H R_i f d\Omega, \tag{38}$$

式中, \mathbf{f} 为体力向量, \mathbf{t} 为边界 T_σ 上规定的牵引力.

2 优化问题

2.1 目标函数

本文选取铝和碳化硅混合作为研究材料,质量可用碳化硅所占的体积分数表示.本文在第一自振频率与屈曲载荷临界范围内,以质量最小作为目标.为方便计算,对上述目标问题进行归一化操作,目标函数所呈现的具体数学表达式为

最小化目标函数:

$$M = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} V_c dz}{h}, \quad (39)$$

式中, h 为 FG 板厚度,体积分数 V_c 作为优化变量,且 V_c 在 $0 \sim 1$ 之间.约束条件: $\omega_1 < \omega_{\text{MAX}}, P_{\text{cr}} < P_{\text{MAX}}, \omega_1$ 表示第一自振频率, ω_{MAX} 为第一自振频率临界值; P_{cr} 表示屈曲荷载, P_{MAX} 为屈曲荷载临界值.

2.2 改进的人工兔子优化算法(IARO)

人工兔子优化算法(ARO)是由 Wang 等^[27]于 2022 年提出的一种生物启发元启发式算法.该算法的灵感来源于兔子的觅食和躲避捕食者的行为.通过融合探索和开发两种策略,兔子算法有效地增强了其探索解空间并向最优解收敛的能力.然而,复杂问题带来了诸多挑战,如搜索空间大、计算复杂度高,以及摆脱局部最优以实现全局最优的任务.

为了解决上述问题,通过引入自适应全局引导机制以及 Lévy 飞行策略帮助算法跳出局部最优,转而高效寻找全局最优.

2.2.1 全局自适应领导者策略

基于 ARO 的基本原理,兔子通过利用其能量因子 A ^[27] 来实施迂回觅食和随机躲藏策略.这种能量的自适应调整可以平衡算法的探索和利用能力.然而,兔子在探索过程中有时会遇到挑战,即在面对形状复杂的优化目标时,如何准确定位最优值.因此,有必要进一步加强 ARO 的全局空间探索能力.

值得注意的是,受粒子群算法原理的启发,全局领导者机制在一定程度上增强了算法的全局空间探索能力.因此,本文将这一机制嵌入原有的 ARO 算法中,以获得更先进的探索能力.此外,还加入了自适应惯性权重,以避免算法过早收敛.因此,ARO 迂回觅食策略中的位置更新方程如下:

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_j(t) + \omega \cdot (\vec{x}_{\text{best}}(t) - \vec{x}_j(t)) + R \cdot (\vec{x}_i(t) - \vec{x}_j(t)) + \text{round}(0.5 \cdot (0.05 + r_1)) \cdot n_1, \quad j \neq i, i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (40)$$

式中, $\vec{x}_{\text{best}}(t)$ 是截止时间 t 的最优值, ω 是自适应惯性权重,计算公式为

$$\omega = e^{-\lambda} \times \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad (41)$$

$$\lambda = \frac{d_{\text{euc}}}{n} \times \sum_{i=1}^n \times \sqrt{\sum_{j=1}^{d_{\text{dim}}} (x_{i,j}^t - \bar{x}_j^t)^2}, \quad (42)$$

式中, n 和 d_{dim} 分别代表种群数和维数. $x_{i,j}^t$ 是兔子 i 在第 j 个维度中的位置,而 \bar{x}_j^t 则代表时间 t 第 j 个维度中的平均值.

$$d_{\text{euc}} = \sqrt{\sum_i^{d_{\text{dim}}} (b_i^u - b_i^l)^2}, \quad (43)$$

式中, b_i^u 和 b_i^l 分别是第 i 维优化变量的上限和下限.

在进化的早期阶段,式(39)显示出对 λ 值的高度敏感性.种群的能量因子 A 轻微收敛会导致幂指数的 ω 放大,从而引导种群向全局最优位置收敛.这种收敛的结果会增加下一代的 λ 值.这种全局进化现象与马修效应(Matthew effect)相似.随着 ω 的大幅减少,在进化的后期阶段,会有更多的个体趋向于全局最优位置.

2.2.2 Lévy 飞行

Lévy 飞行是一种特殊的随机行走模型,由一连串轨迹组成,每个轨迹都具有随机性^[28].该模型的每一步

都从重尾分布中随机确定步长,从而增强了大距离运动路径的随机性.与传统的随机行走算法相比,Lévy 飞行具有更强的探索能力,能更好地覆盖整个搜索空间.ARO 与 Lévy 飞行的集成提高了搜索过程效率,有利于兔子跳出局部最优.

$$\vec{x}_i(t+1) = \vec{x}_i(t) + R \cdot (L_{Lévy}(\beta) \cdot \vec{b}_{i,r}(t) - \vec{x}_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (44)$$

式中, $L_{Lévy}(\beta) \sim \mu = t^{-1-\beta}, (0 \leq \beta \leq 2)$.

$$L_{Lévy}(\beta) \sim \frac{\phi \times \mu}{|\xi|^{1/\beta}}, \quad \phi = \left[\frac{\Gamma(1+\beta) \times \sin(\pi \times \beta/2)}{\Gamma((1+\beta)/2) \times \beta \times 2^{(\beta-1)/2}} \right]^{1/\beta}, \quad (45)$$

式中, μ 和 ξ 都是标准正态分布, Γ 是标准 Gamma 函数, $\beta = 1.5$.

IARO 示意图如图 1 所示.可以看出,兔子种群会向领导者 1 移动.领导者 1 引导个体前进的方向与实际方向之间的夹角 α_i 与自适应惯性权重 ω 相关,即 $\alpha_i \propto \omega$.从图中可以看出,该算法在增强前掠夺能力和开发能力之间取得了平衡.全局自适应领导者策略使兔子能够更有效地探索全局最佳位置.在迂回觅食阶段.与此同时,Lévy 飞行机制使兔子在随机躲藏阶段摆脱了局部最优解的束缚.

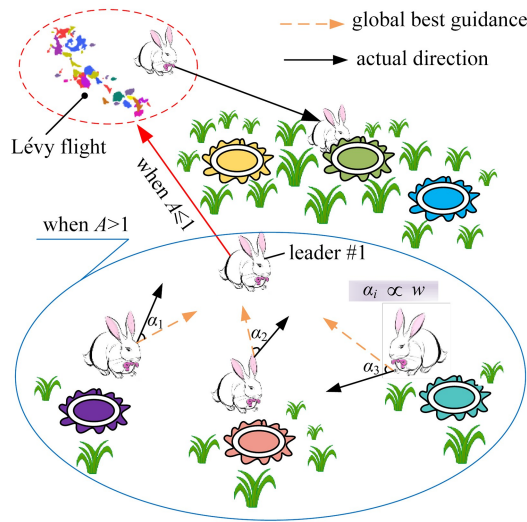


图 1 IARO 示意图

Fig. 1 Schematic of the IARO

3 算例与分析

3.1 算法验证

为了进一步验证 IARO 的优化性能,本文选择了 CEC'2019 基准函数集进行测试,并将结果与其他优化算法进行了比较,如北方苍鹰算法(NGO)^[29]、蛇优化算法(SO)^[30]、鲸鱼优化算法(WOA)^[31]、正弦余弦算法(SCA)^[32]、灰狼优化器(GWO)^[33]和改进的灰狼优化器(IGWO)^[34].为确保公平比较,本文中的所有算法都在同一环境下执行.MATLAB 编程软件在 Windows 7 系统上使用,CPU 为英特尔酷睿 TM 3.2 GHz.每种算法独立运行 30 次.比较算法的参数设置如表 1 所示.在 CEC'2019 基准函数集中,这些优化算法的最大适合度评估(max FEs)和种群规模分别设置为 $5000 \times d_{dim}$ 和 50.表 2 中引入了平均值、标准差、 t 值和 Wilcoxon 符号秩检验来评估这些优化算法的性能.符号“+”、“-”和“ \approx ”表示 IARO 的性能优于、劣于和等于其他竞争算法.此外,每个函数的最佳均值和方差均以粗体标出.

所有优化器的收敛曲线如图 2 所示.表 2 显示了数理统计结果,包括均值、标准偏差、 t 值和符号秩检验.如表 2 所示,在求解具有单一全局最优解的多模态基准函数(F1、F2、F7)时,IARO 算法展现出显著的性能优势.该算法在收敛精度和稳定性方面均优于其他对比算法.特别值得注意的是,在 F1 函数的优化过程中,IARO 呈现出独特的阶梯状收敛曲线,这表明算法具有优异的局部最优规避能力.对于 F10 函数,虽然 IARO 的表现未达最优,但其求解精度仍显著优于 SO、WOA、SCA、GWO、IGWO 和 ARO 等主流算法.在其余复杂多

模态函数的测试中,IARO 在大多数情况下均能获得具有竞争力的优化结果,验证了该算法在处理不同特性优化问题时的鲁棒性和适应性.此外,在 Wilcoxon 符号秩检验中,IARO 在所有优化器中得分最高,证实了其在 CEC'2019 基准函数中的优化性能.

表 1 算法参数设置

Table 1 Algorithm parameter settings

algorithm	parameter setting
NGO	l is 0 or 2
SO	$c_1=0.5, c_2=0.05, c_3=2$
GWO	a decreasing linearly from 2 to 0
IGWO	a decreasing linearly from 2 to 0
AOA	$\alpha = 5, \mu = 0.5$

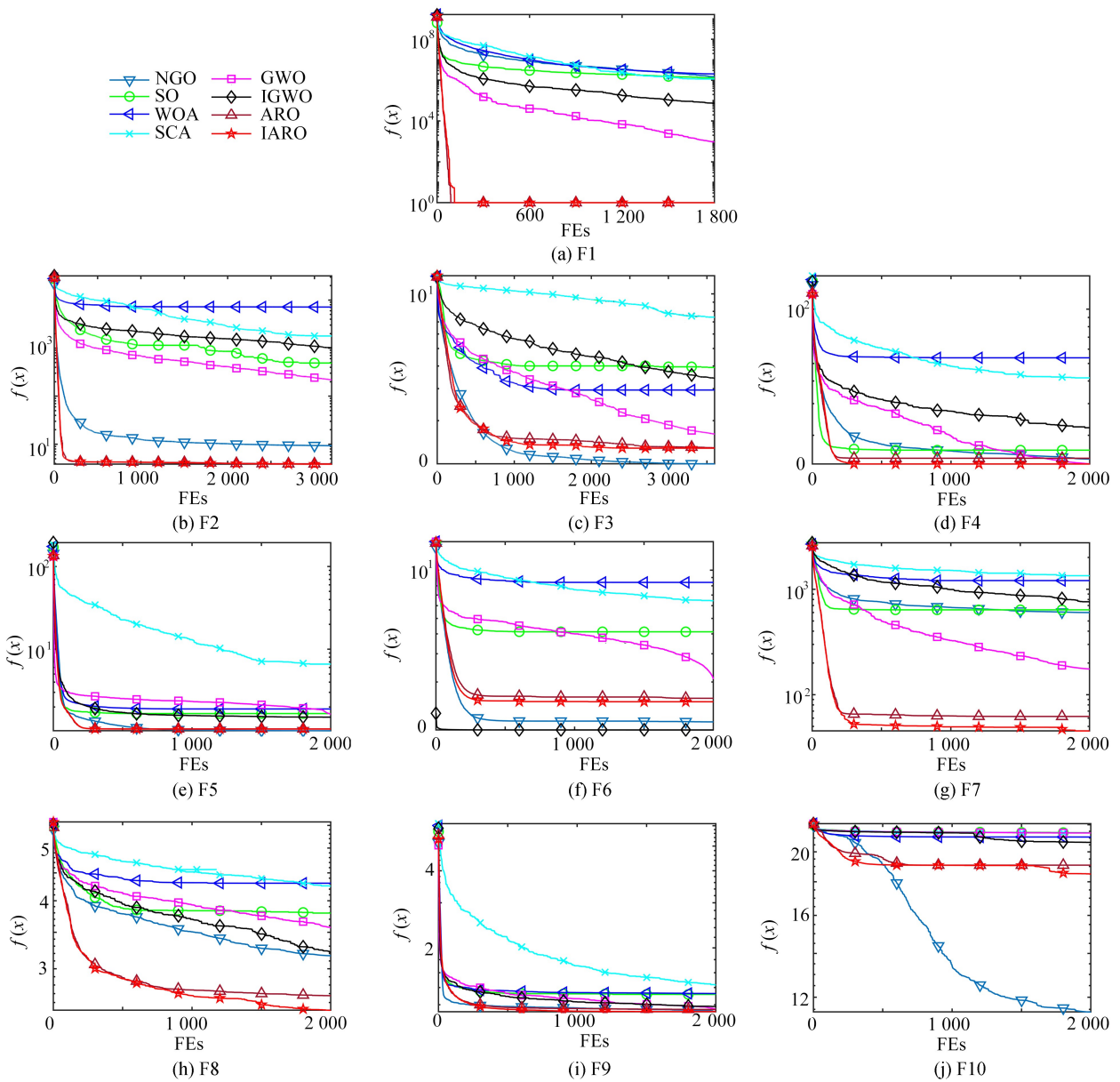


图 2 CEC'2019 测试函数收敛图

Fig. 2 CEC'2019 test function convergence diagram

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

表 2 不同优化器在 CEC'2019 基准上的性能统计
Table 2 Performance statistics of different optimizers on CEC'2019 benchmark

function		NGO	SO	WOA	SCA	GWO	IGWO	ARO	IARO
F1	mean	1.10	1.07E6	2.02E6	1.14E6	9.47E2	7.38E4	1.00	1.00
	std	4.06E-1	1.13E6	4.03E6	1.75E6	3.35E3	7.97E4	0.00	0.00
	<i>t</i>	2.13E-1	1.92E-5	1.02E-2	1.28E-3	1.40E-1	2.61E-5	NaN	NaN
	Wilcoxon	+	+	+	+	+	+	≈	
F2	mean	9.35	4.90E2	7.14E3	1.79E3	2.18E2	1.02E3	3.91	3.85
	std	4.82	4.43E2	2.36E3	9.84E2	1.70E2	3.67E2	3.23E-1	3.12E-1
	<i>t</i>	1.38E-6	2.07E-6	2.46E-16	7.80E-11	1.98E-7	4.04E-15	5.04E-1	NaN
	Wilcoxon	+	+	+	+	+	+	≈	
F3	mean	1.15	3.93	2.95	7.44	1.69	3.42	1.42	1.41
	std	1.94E-1	1.68	1.99	1.59	9.39E-1	1.59	4.06E-2	2.25E-4
	<i>t</i>	9.07E-8	6.62E-9	2.09E-4	6.24E-19	1.22E-1	1.68E-7	3.16E-1	NaN
	Wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F4	mean	1.46E1	1.66E1	5.38E1	4.16E1	1.39E1	2.20E1	1.49E1	1.39E1
	std	4.09	5.91	1.69E1	7.50	5.61	3.88	5.04	5.46
	<i>t</i>	5.74E-1	8.52E-2	4.17E-12	4.63E-18	9.80E-1	5.26E-7	4.40E-1	NaN
	Wilcoxon	-	-	+	+	+	+	+	
F5	mean	1.03	1.66	1.89	6.60	1.64	1.51	1.09	1.08
	std	1.74E-2	7.76E-2	3.75E-1	1.15	6.83E-1	8.53E-2	4.84E-2	4.42E-2
	<i>t</i>	1.92E-6	1.50E-26	1.98E-12	1.11E-21	1.06E-4	1.68E-20	6.69E-1	NaN
	Wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F6	mean	1.12	4.12	8.39	6.60	2.08	1.00	1.58	1.50
	std	3.34E-1	1.37	1.74	1.15	8.93E-1	5.42E-4	6.37E-1	7.48E-1
	<i>t</i>	2.37E-2	1.66E-10	1.07E-17	1.66E-17	2.06E-2	1.12E-3	6.12E-1	NaN
	Wilcoxon	+	+	+	+	+	-	+	
F7	mean	6.01E2	6.38E2	1.21E3	1.34E3	1.75E2	7.51E2	6.22E1	4.53E1
	std	1.58E2	3.42E2	3.00E2	2.05E2	1.40E2	2.42E2	7.48E1	6.55E1
	<i>t</i>	5.57E-17	4.59E-10	2.02E-19	1.15E-23	3.29E-4	1.09E-14	3.18E-1	NaN
	Wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F8	mean	3.17	3.80	4.31	4.26	3.57	3.22	2.68	2.52
	std	2.90E-1	3.09E-1	4.00E-1	2.33E-1	4.66E-1	3.46E-1	5.21E-1	6.15E-1
	<i>t</i>	2.76E-6	6.12E-11	2.15E-13	8.00E-15	3.29E-7	1.26E-5	2.86E-1	NaN
	Wilcoxon	+	+	+	+	+	+	+	
F9	mean	1.13	1.32	1.33	1.43	1.15	1.18	1.15	1.13
	std	3.52E-2	9.36E-2	1.41E-1	1.10E-1	5.96E-2	3.30E-2	7.26E-2	4.88E-2
	<i>t</i>	8.44E-1	3.73E-11	6.62E-8	9.47E-16	1.42E-1	1.46E-4	1.94E-1	NaN
	Wilcoxon	-	+	+	+	+	+	+	
F10	mean	1.14E1	2.14E1	2.11E1	2.14E1	2.14E1	2.07E1	1.91E1	1.85E1
	std	9.57	9.93E-2	8.64E-2	5.68E-2	5.81E-2	3.58	5.76	6.39
	<i>t</i>	2.20E-3	2.12E-2	3.82E-2	2.21E-2	2.16E-2	1.32E-1	7.32E-1	NaN
	Wilcoxon	-	+	+	+	+	+	+	

+/-/≈/gm 62/6/2/60

3.2 算法验证

本文采用基于 S-FSDT 的 XIGA 方法进行数值计算。参考已有文献的相关算例,针对自然频率以及屈曲载荷进行对比分析,旨在检验该数值方法在开孔 FG 板力学分析时的可靠性与精准度。

3.2.1 开心孔 FG 板的自然频率分析

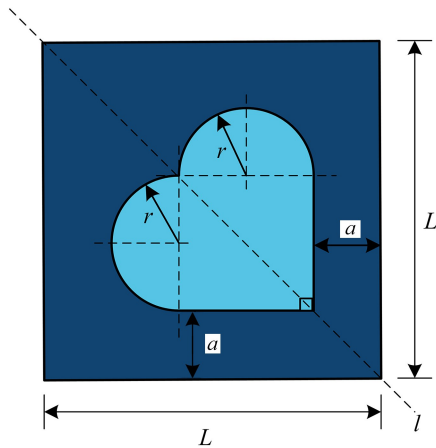


图3 开心形孔 FG 方板示意图

Fig. 3 A square FGM plate with a heart-shaped cutout

如图3所示,有一个正方形板,其厚度设定为 $h = 0.05$ m,边长 $L = 10$ m,板内带有一个独特的心形孔.该心形孔的具体尺寸参数如下:半径取值为 $r = 2$ m 并且参数 $a = 2$ m,该心形孔以板的斜对角线虚轴 l ,呈现对称分布形态.与此同时,该板的材料属性明确,其 $E = 2.0 \times 10^{11}$ Pa, Poisson 比 $\nu = 0.3$.在此算例下,几何阶次参数设置为 $p = q = 3$, FGM 的分布规律遵循幂函数形式:

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n, \tag{46}$$

式中, n 代表材料梯度指数.

在本算例中,频率被归一化处理:

$$\omega^* = (\omega^2 \rho h a^2 / D)^{-1/4}, \tag{47}$$

式中, $\rho = 8\,000$ kg/m³, $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$.

此外, XIGA 的控制点网格设置为 21×21 .表3列出了不同方法下的第一自然频率统计结果.边界条件设定为全简支 (SSSS).从结果可以看出,本文所采用的方法与已有方法得到的结果十分接近.

表3 第一自然频率对比统计表(单位: rad/s)

Table 3 Comparison of the critical buckling stresses (unit: rad/s)

method/BC	order			
	1	2	3	4
ref. [35]	5.098	6.608	6.929	8.644
ref. [36]	5.193	6.579	6.597	7.819
ref. [37]	4.919	6.398	6.775	8.613
present	4.634	6.856	6.936	8.814

3.2.2 开圆孔 FG 板的屈曲分析

图4为边长 L 的圆形开孔的 FG 板,其材料为 Al/ZrO₂.该板的基体材料和增强材料的机械模量分别为 $E_m = 70$ GPa, $E_c = 151$ GPa,且二者的 Poisson 比 $\nu = 0.3$.该板的孔半径为 r ,厚度为 h ,满足尺寸比: $a/h = 100$, $r/a = 0.1$.板的边界条件为全简支,其材料属性按式(32)的梯度分布.

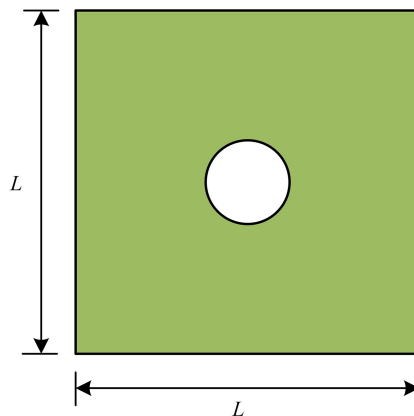


图4 开圆孔 FG 方板示意图

Fig. 4 A square FGM plate with a circular hole

对板施加单轴压缩载荷.表4为归一化后不同方法下的临界屈曲应力结果.经验证,本文的方法和先前文献的结果相契合.屈曲临界载荷归一化公式如下:

$$k_{cr} = \hat{\sigma}_0 \lambda_{cr} L^2 / (\pi^2 D), \tag{48}$$

式中, $D = E_m h^3 / (12(1 - \nu^2))$.

表 4 临界屈曲应力对比统计表(单位: Pa)

Table 4 Comparison of the critical buckling stresses(unit: Pa)

method	material graded index		
	0	1	5
ref. [38]	6.971	4.686	4.061
ref. [39]	6.992	4.888	4.158
ref. [40]	7.013	4.903	4.170
present	7.009	4.900	4.158

3.3 复杂开孔 FG 板的目标优化

图 5 展示了一个边长为 10 m 的陶瓷(Al_2O_3)-金属(Al)两相 FG 全固定方板, Al_2O_3 的弹性模量、Poisson 比和密度分别为 476 GPa,0.19,3 220 $kg \cdot m^{-3}$,材料 Al 对应材料属性为 70 GPa,0.3,2 707 $kg \cdot m^{-3}$.此外,图中标注了复杂孔洞的具体尺寸.

方板厚度为 0.1 m,在其上表面施加了一个均匀载荷,大小为 $1.8 \times 10^4 N/m^2$,允许的最大位移为 0.05 m.在本例中,归一化修正系数的计算公式分别为 $N_a = \sqrt{1/10^9/R^2}$, $P_{cr} = E_m \pi^2 h^3 / (12(1 - \nu_m^2)R^2)$.此外,XIGA 的控制点网格布局为 16×16 .种群规模设定为 50,最大迭代次数为 100 次,图 6 展示了复杂开孔 FG 板的迭代曲线.最优解对应的目标函数分别为 $f = 0.3821$, $w_1 = 0.4653$, $P_{cr} = 7.22057$.此外,图 7 和图 8 详细列出了复杂开孔最优解的自振振型和屈曲振型.

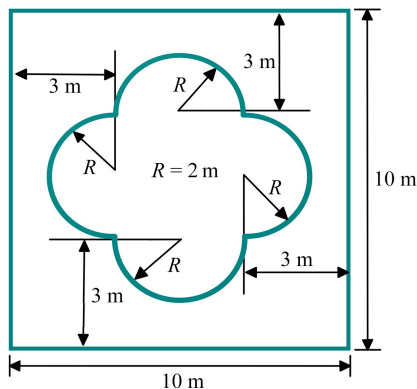


图 5 复杂开孔 FG 板示意图

Fig. 5 The functionally graded plate with a complicated hole

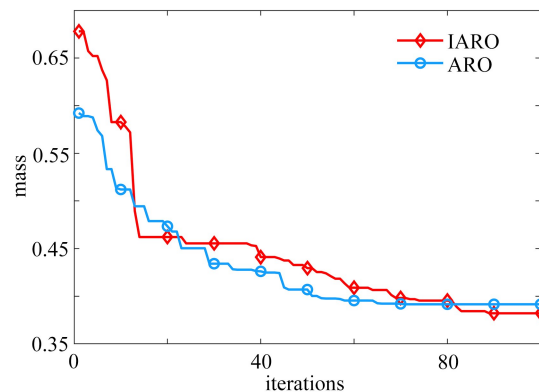
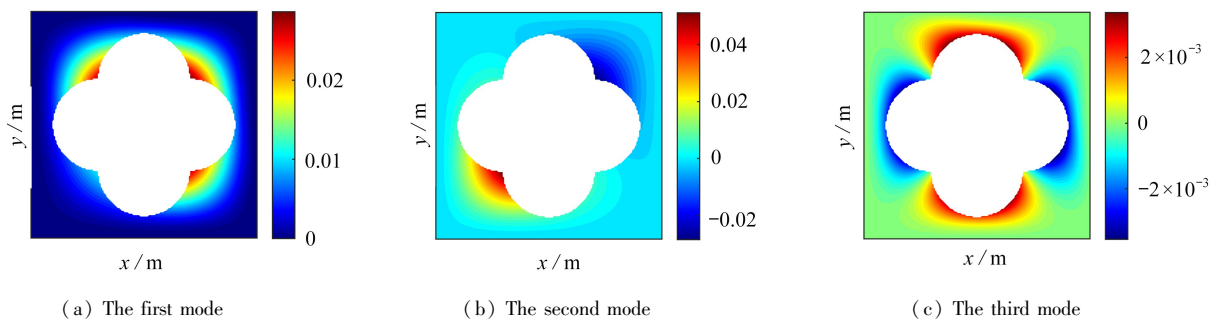


图 6 复杂开孔 FG 板的迭代曲线

Fig. 6 Iteration curves of complex functionally graded plates with holes

3.4 FG 双孔板的目标优化

图 9 所示为含双孔的 FG 方板结构,其几何尺寸为 10 m \times 10 m,厚度为 0.1 m.该结构采用四边固支边界条件,FGM 由陶瓷(Al_2O_3)和金属(Al)组成,其材料参数与 3.3 小节中的算例保持一致.结构中包含两个关于几何中心对称分布的圆形孔洞,孔洞半径 $r = 1.5 m$,图中已明确标注了两个孔洞的具体位置坐标.



(a) The first mode

(b) The second mode

(c) The third mode

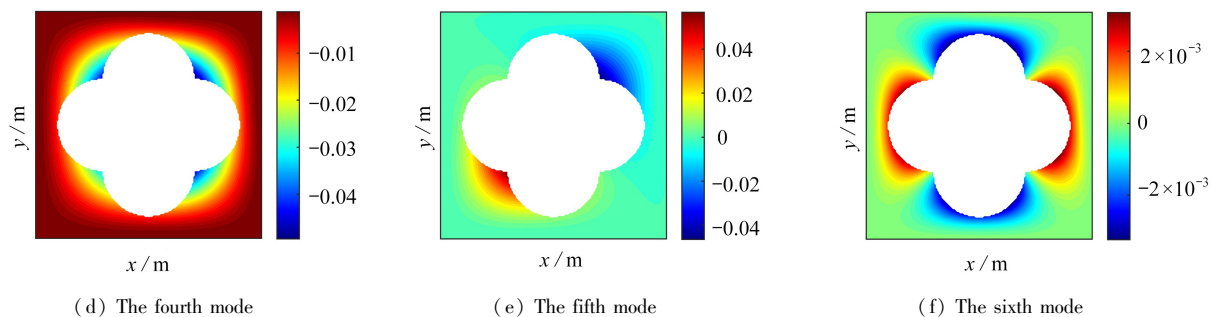


图7 最优解的六种自振振型

Fig. 7 The six vibration mode shapes of the optimized solutions

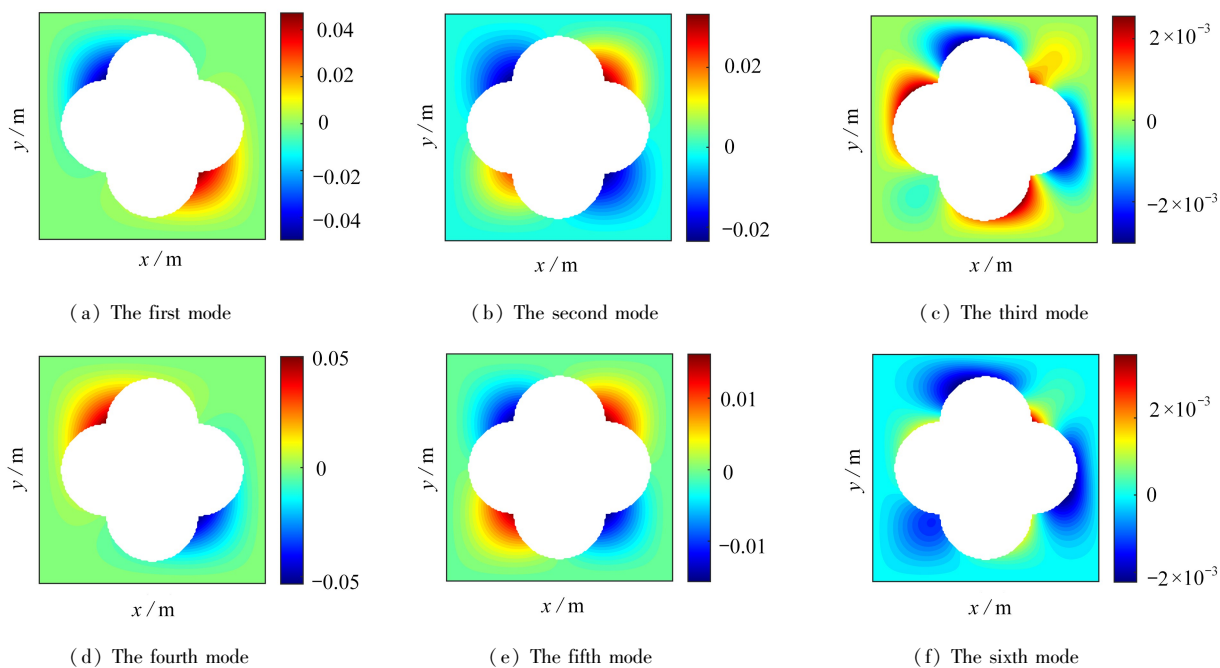


图8 最优解的六种屈曲振型

Fig. 8 The six buckling mode shapes of the optimized solutions

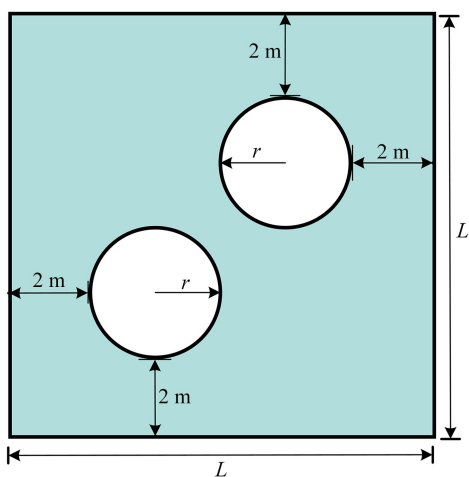


图9 双孔 FG 板示意图

Fig. 9 The functionally graded plate with two holes

该方板采用 17×17 控制点的 XIGA 网格, 板件上表面承受 $1.8 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ 的均布荷载, 并设置 0.05 m 的位移约束限值. 归一化修正系数的计算公式与上述算例一致. 在优化算法参数设置方面, 种群规模为 50, 最大

迭代次数设为 100 次.最优解对应的目标函数分别为 $f = 5.524 0, w_1 = 5.472 5, P_{cr} = 4.743 4$.图 10 和图 11 详细列出了双孔最优解的自振振型和屈曲振型.

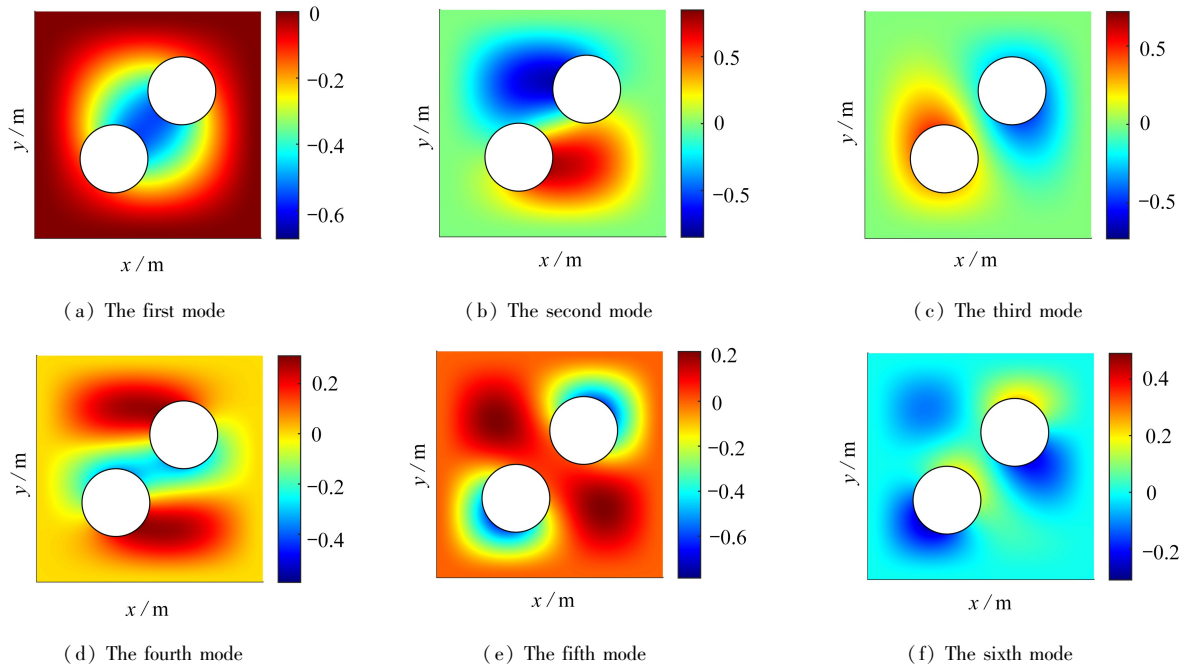


图 10 双孔板最优解的六种自振振型

Fig. 10 The six vibration mode shapes of the optimized solutions for two-hole plates

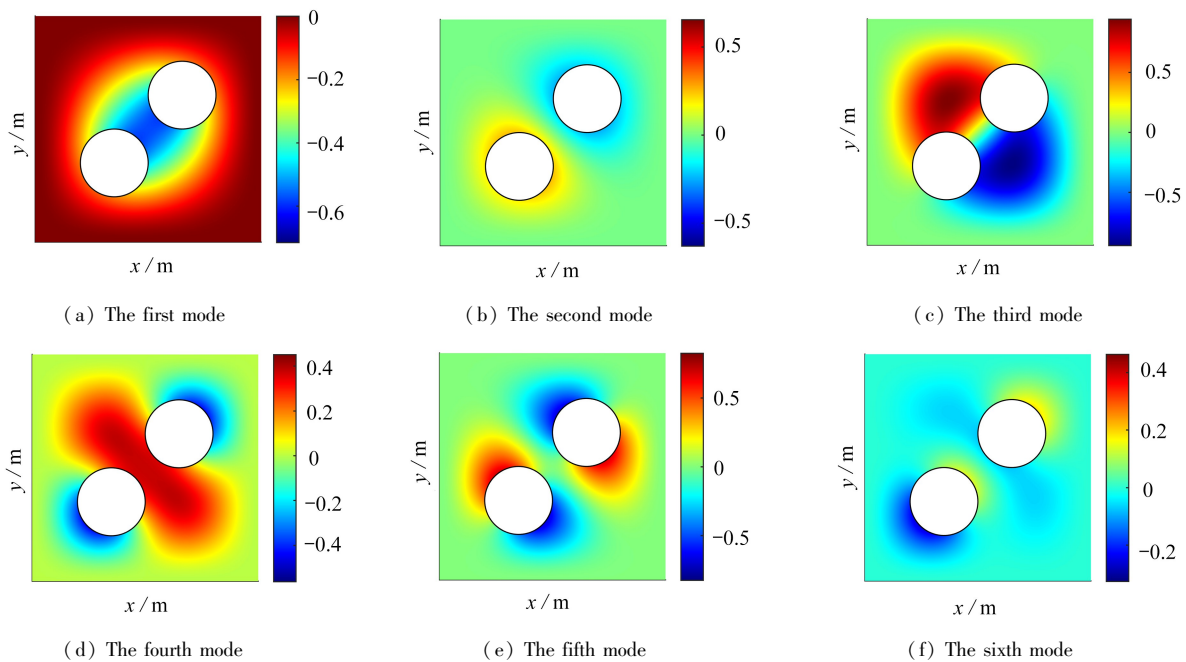


图 11 双孔板最优解的六种屈曲振型

Fig. 11 The six buckling mode shapes of the optimized solutions for two-hole plates

4 结 论

本文针对开孔 FG 板的质量优化问题建立了一个 S-FSDT 与扩展等几何方法结合的数学模型,采用改进的人工兔子优化算法得到 FG 板的最佳优化形态,算例结果表明了上述模型的有效性和可行性.该研究不仅为开孔 FG 板的优化设计提供了一种新的方法,也为未来在更复杂工况下(如热环境)的 FG 板优化设计提

供了理论基础和方法指导.未来的工作可以进一步探索热环境下的开孔 FG 板优化问题,以及材料或几何非线性优化问题,以拓展该方法的应用范围和实用性.

参考文献(References):

- [1] 仲政, 吴林志, 陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, **40**(5): 528-541. (ZHONG Zheng, WU Linzhi, CHEN Weiqiu. Progress in the study on mechanics problems of functionally graded materials and structures[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, **40**(5): 528-541. (in Chinese))
- [2] SOBCZAK J J, DRENCHÉV L. Metallic functionally graded materials; a specific class of advanced composites [J]. *Journal of Materials Science & Technology*, 2013, **29**(4): 297-316.
- [3] NAEBE M, SHIRVANIMOGHADDAM K. Functionally graded materials; a review of fabrication and properties [J]. *Applied Materials Today*, 2016, **5**: 223-245.
- [4] 舒小平. 功能梯度压电材料壳体热残余应力[J]. 机械强度, 2012, **34**(1): 69-76. (SHU Xiaoping. Thermal residual stresses of functionally graded piezoelectric shells[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2012, **34**(1): 69-76. (in Chinese))
- [5] 李世荣, 范亮亮. 热环境中功能梯度材料圆板的自由振动[J]. 振动工程学报, 2007, **20**(4): 353-360. (LI Shirong, FAN Liangliang. Free vibration of functionally graded circular plates in thermal environment[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2007, **20**(4): 353-360. (in Chinese))
- [6] 尹硕辉, 余天堂, 刘鹏. 基于等几何有限元法的功能梯度板自由振动分析[J]. 振动与冲击, 2013, **32**(24): 180-186. (YIN Shuhui, YU Tiantang, LIU Peng. Free vibration analysis of functionally graded plates using isogeometric finite element method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, **32**(24): 180-186. (in Chinese))
- [7] ENDO M, KIMURA N. An alternative formulation of the boundary value problem for the Timoshenko beam and Mindlin plate[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **301**(1/2): 355-373.
- [8] 陈卫, 汤智宏, 彭林欣. 基于分层法的功能梯度三明治壳线性弯曲无网格分析[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(5): 539-553. (CHEN Wei, TANG Zhihong, PENG Linxin. Linear bending analysis of functionally graded sandwich shells with the meshless method based on the layer-wise theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(5): 539-553. (in Chinese))
- [9] MANTARI J L, OKTEM A S, SOARES C G. Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory[J]. *Composite Structures*, 2012, **94**(2): 714-723.
- [10] Rabhi M, Benrahou K H, Kaci A, et al. A new innovative 3-unknowns HSDT for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions[J]. *Geomechanics and Engineering*, 2020, **22**(2): 119-132.
- [11] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(39/40/41): 4135-4195.
- [12] 祝雪峰, 胡平, 马正东, 等. 基于 FETI 的非协调等几何分析[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(8): 771-781. (ZHU Xuefeng, HU Ping, MA Zhengdong, et al. Nonconforming isogeometric analysis with FETI method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(8): 771-781. (in Chinese))
- [13] 刘石, 陈德祥, 冯永新, 等. 等几何分析的多重网格共轭梯度法[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(6): 630-639. (LIU Shi, CHEN Dexiang, FENG Yongxin, et al. A multigrid preconditioned conjugate gradient method for isogeometric analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(6): 630-639. (in Chinese))
- [14] 孙少灰, 尹硕辉. 基于等几何边界元法和粒子群优化算法的结构形状优化[J]. 机械强度, 2019, **41**(2): 363-368. (SUN Shaohui, YIN Shuhui. Structural shape optimization by isogeometric boundary element method [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2019, **41**(2): 363-368. (in Chinese))
- [15] 陈涛, 莫蓉, 万能, 等. 等几何分析中采用 Nitsche 法施加位移边界条件[J]. 力学学报, 2012, **44**(2): 369-381.

- (CHEN Tao, MO Rong, WAN Neng, et al. Imposing displacement boundary conditions with Nitsche's method in isogeometric analysis[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, **44**(2): 369-381. (in Chinese))
- [16] 刘硕. 基于等几何分析的层合微板弯曲、振动和屈曲行为研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2022. (LIU Shuo. Research on bending, vibration and buckling of laminate micro-plate based on isogeometric analysis[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2022. (in Chinese))
- [17] 陈明飞, 刘坤鹏, 靳国永, 等. 面内功能梯度三角形板等几何面内振动分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(2): 156-170. (CHEN Mingfei, LIU Kunpeng, JIN Guoyong, et al. Isogeometric in-plane vibration analysis of functionally graded triangular plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(2): 156-170. (in Chinese))
- [18] GOUPEE A J, VEL S S. Two-dimensional optimization of material composition of functionally graded materials using meshless analyses and a genetic algorithm[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **195**(44/45/46/47): 5926-5948.
- [19] 李信卿, 赵清海, 张洪信, 等. 周期性功能梯度结构稳态热传导拓扑优化设计[J]. 中国机械工程, 2021, **32**(19): 2348-2356. (LI Xinqing, ZHAO Qinghai, ZHANG Hongxin, et al. Steady-state heat conduction topology optimization design for periodic functional gradient structures[J]. *China Mechanical Engineering*, 2021, **32**(19): 2348-2356. (in Chinese))
- [20] FRANCO CORREIA V M, AGUILAR MADEIRA J F, ARAÚJO A L, et al. Multiobjective optimization of ceramic-metal functionally graded plates using a higher order model[J]. *Composite Structures*, 2018, **183**: 146-160.
- [21] ABOLGHASEMI S, SHATERZADEH A R, REZAEI R. Thermo-mechanical buckling analysis of functionally graded plates with an elliptic cutout[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2014, **39**: 250-259.
- [22] MIRZAEI M, KIANI Y. Free vibration of functionally graded carbon-nanotube-reinforced composite plates with cutout[J]. *Beilstein Journal of Nanotechnology*, 2016, **7**: 511-523.
- [23] TRAN L V, FERREIRA A J M, NGUYEN-XUAN H. Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2013, **51**: 368-383.
- [24] ZENKOUR A M. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 1: deflection and stresses[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(18/19): 5224-5242.
- [25] BENSON D J, BAZILEVS Y, DE LUYCKER E, et al. A generalized finite element formulation for arbitrary basis functions: from isogeometric analysis to XFEM[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **83**(6): 765-785.
- [26] WANG C, YU T, SHAO G, et al. Shape optimization of structures with cutouts by an efficient approach based on XIGA and chaotic particle swarm optimization[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2019, **74**: 176-187.
- [27] WANG L, CAO Q, ZHANG Z, et al. Artificial rabbits optimization: a new bio-inspired meta-heuristic algorithm for solving engineering optimization problems[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2022, **114**: 105082.
- [28] BARTHELEMY P, BERTOLOTI J, WIERSMA D S. Alévy flight for light[J]. *Nature*, 2008, **453**(7194): 495-498.
- [29] DEHGHANI M, HUBÁLOVSKÝ Š, TROJOVSKÝ P. Northern goshawk optimization: a new swarm-based algorithm for solving optimization problems[J]. *IEEE Access*, 2021, **9**: 162059-162080.
- [30] HASHIM F A, HUSSIEN A G. Snake optimizer: a novel meta-heuristic optimization algorithm[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2022, **242**: 108320.
- [31] MIRJALILI S, LEWIS A. The whale optimization algorithm[J]. *Advances in Engineering Software*, 2016, **95**: 51-67.

- [32] MIRJALILI S. SCA: a sine cosine algorithm for solving optimization problems[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2016, **96**: 120-133.
- [33] MIRJALILI S, MIRJALILI S M, LEWIS A. Grey wolf optimizer[J]. *Advances in Engineering Software*, 2014, **69**: 46-61.
- [34] NADIMI-SHAHRAKI M H, TAGHIAN S, MIRJALILI S. An improved grey wolf optimizer for solving engineering problems[J]. *Expert Systems With Applications*, 2021, **166**: 113917.
- [35] YIN S, HALE J S, YU T, et al. Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates[J]. *Composite Structures*, 2014, **118**: 121-138.
- [36] SHOJAEE S, IZADPANAHE E, VALIZADEH N, et al. Free vibration analysis of thin plates by using a NURBS-based isogeometric approach[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, **61**: 23-34.
- [37] CUI X Y, LIU G R, LI G Y, et al. A thin plate formulation without rotation DOFs based on the radial point interpolation method and triangular cells[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **85**(8): 958-986.
- [38] ZHAO X, LEE Y Y, LIEW K M. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates[J]. *Composite Structures*, 2009, **90**(2): 161-171.
- [39] YIN S, YU T, BUI T Q, et al. Buckling and vibration extended isogeometric analysis of imperfect graded Reissner-Mindlin plates with internal defects using NURBS and level sets[J]. *Computers and Structures*, 2016, **177**(C): 23-38.
- [40] 汪超, 刘涛, 辜继明, 等. 基于 XIGA 的开孔功能梯度板材料分布多目标优化[J]. *机械强度*, 2021, **43**(5): 1095-1103. (WANG Chao, LIU Tao, GU Jiming, et al. Multi-objective optimization of material distribution for functionally grade plates with cutouts based on XIGA[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2021, **43**(5): 1095-1103. (in Chinese))