

基于非线性特征值解算的材料参数温度相关 薄壁结构热屈曲分析方法*

沈瑞博¹, 李建宇^{1,2}, 高强², 李广利³

- (1. 天津科技大学 机械工程学院, 天津 300457;
2. 大连理工大学 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁 大连 116023;
3. 中国科学院 力学研究所 高温气动国家重点实验室, 北京 100190)

(本刊编委高强来稿)

摘要: 热屈曲是薄壁类结构在高温环境下常见的失稳现象, 准确预测临界失稳温度是热屈曲分析的重要内容. 高温环境下材料参数的温度相关性导致临界热屈曲分析呈现不可忽略的非线性特征, 关于该问题的解算目前仍以精度和效率不高的试验误差类启发式算法为主. 本文从非线性特征值问题的角度研究其高效解算方法. 首先, 基于热屈曲分析的力学原理, 将材料参数温度相关的热屈曲分析表征为一个非线性特征值解算的问题. 其次, 给出了求解热屈曲分析非线性特征值问题的一种逐次线性化方法, 该算法中采用自动微分技术计算迭代过程中所需的刚度矩阵和几何刚度矩阵的导数信息; 与已有的迭代类算法相比, 所提算法在不提高计算复杂度的基础上显著提高了算法效率. 最后, 具体针对非均匀温度场作用下的薄板结构, 给出其非线性特征值热屈曲分析的有限元方程及逐次线性化特征值解算方法, 并以数值算例验证了所提方法的有效性与准确性.

关键词: 热屈曲; 材料参数温度相关; 非线性特征值; 逐次线性化算法; 薄板

中图分类号: O342 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460027

Thermal Buckling Analysis of Thin-Walled Structures With Temperature-Dependent Material Properties Based on Nonlinear Eigenvalue Solutions

SHEN Ruibo¹, LI Jianyu^{1,2}, GAO Qiang², LI Guangli³

(1. College of Mechanical Engineering, Tianjin University of Science & Technology,
Tianjin 300457, P.R. China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P.R. China;

3. State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, P.R. China)

(Contributed by GAO Qiang, Member of the Editorial Board of AMM)

* 收稿日期: 2025-02-17; 修订日期: 2026-03-31

基金项目: 国家自然科学基金(12002347); 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室开放基金(GZ24131)

作者简介: 沈瑞博(1998—), 男, 硕士生(E-mail: 1585807230@qq.com);

李建宇(1978—), 男, 教授, 博士(通信作者. E-mail: lijianyu@tust.edu.cn).

引用格式: 沈瑞博, 李建宇, 高强, 李广利. 基于非线性特征值解算的材料参数温度相关薄壁结构热屈曲分析方法[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(5): 550-559.

Abstract: Thermal buckling is a common instability phenomenon in thin-walled structures under high-temperature environments. Accurately predicting the critical instability temperature makes an important issue for thermal buckling analysis. The temperature dependence of material parameters in high-temperature environments leads to non-negligible nonlinear characteristics in critical thermal buckling analysis. Currently, the solutions to this problem are mainly based on heuristic algorithms of experimental error types, which have low accuracy and efficiency. An efficient solution method was studied from the perspective of nonlinear eigenvalue problems. Firstly, based on the mechanical principles of thermal buckling analysis, the thermal buckling analysis with temperature-dependent material parameters was characterized as a problem of solving nonlinear eigenvalues. Secondly, a successive linearization method for solving the nonlinear eigenvalue problem in thermal buckling analysis was presented. In this algorithm, the automatic differentiation technique was used to calculate the derivative information of the stiffness matrix and geometric stiffness matrix required during the iterative process. Compared with existing iterative algorithms, the proposed algorithm significantly improves the algorithm efficiency without increasing the computational complexity. Finally, specifically for the thin plate structure under the action of a non-uniform temperature field, the finite element equations for its nonlinear eigenvalue thermal buckling analysis and the successive linearization eigenvalue solution method were given, and numerical examples were used to verify the effectiveness and accuracy of the proposed method.

Key words: thermal buckling; temperature dependence of material parameters; nonlinear eigenvalue; successive linearized approximation algorithm; thin plate

0 引 言

高温环境下服役的薄壁结构,由于约束、非均匀加热等因素的影响,容易引发结构的热屈曲问题^[1-2]。屈曲不仅会导致结构的刚度和强度下降进而改变结构的静动特性,而且甚至可能引发结构的破坏,严重影响其安全性和使用寿命^[3]。在工程设计和安全评估中,准确预测临界屈曲温度和屈曲模态是研究热环境下薄壁结构屈曲行为的重要课题^[4]。与单纯受机械载荷作用下的屈曲分析不同,热载荷作用下材料参数的温度相关性增加了热屈曲分析的非线性程度^[5-7]。文献[8]关于碳目钢圆板在非均匀温度场下的热屈曲分析结果表明,如果在预测过程中忽略材料参数温度相关性所导致的非线性,所求得的临界屈曲温度与考虑材料性质温度相关性的结果的偏差达 20%。而对于材料属性温度更为敏感的复合材料结构,材料参数的温度相关性对临界热屈曲温度的影响就更不可忽略了。因此,在近期的文献中,针对功能梯度材料等复合材料板壳类结构的热屈曲分析研究,均着重考虑了材料参数的温度依赖性^[9-17]。

考虑材料参数温度相关性的热屈曲分析虽然越来越被重视,但是关于其高效率数值解算方法的系统研究却不多见,目前如 ABAQUS 等大型商用 CAE 软件尚不具备直接求解材料参数温度相关结构热屈曲分析的功能。已有研究^[7-19]中引入了一些启发式迭代过程来考虑材料参数的温度相关性对临界屈曲温度的影响。例如文献[6,20]采用的迭代算法中,先施加一温度增量,然后做线性特征值屈曲计算,如此迭代,直至所求得特征值为 1。这类算法通过试错法来调整温度载荷,进而逐步逼近临界屈曲温度和屈曲模态,在本质上属于效率不高的“trial and error”类方法,算法的收敛速度慢且稳定性差。为了提高计算效率,文献[8-9,21]提出了一些加速迭代的策略。

通过建立临界屈曲平衡方程解算临界屈曲温度和屈曲模态的分叉屈曲分析法,本质上是一个特征值解算问题^[4,22]。不考虑材料参数温度相关的热屈曲分析是一个线性特征值问题,而考虑材料参数温度相关的热屈曲分析应是一个非线性特征值问题。关于非线性特征值问题的研究^[23],在数学上已经发展了如 Newton 法、子空间投影法、逐次线性化方法等高效解算方法,并在阻尼结构动力分析、流-固结构振动分析、量子点数值模拟和时滞系统稳定性分析等领域得到应用^[24-26]。但是,截至目前,还未见到从非线性特征值问题的角度进行热屈曲分析研究的工作。

针对上述现状,本文研究了基于非线性特征值解算的热屈曲分析方法。基本的思路是:首先,在热屈曲分析方程中引入材料参数温度相关性,将其在数学上表征为一个非线性特征值问题;其次,给出一种基于逐次

线性化非线性特征值解算的热屈曲分析高效算法;最后,具体针对非均匀温度场下的薄板热屈曲问题,给出其有限元方程和算例验证。

1 薄板热屈曲控制方程

为表述简明而又不失一般性,这里以各向同性均质薄板为例,阐述考虑材料参数温度相关性热屈曲分析方法.若在建立热屈曲控制方程时采用的是复合材料层合板壳理论,则本文所提方法不难被拓展至功能梯度材料板壳等复杂问题的热屈曲分析。

考虑一厚度为 h 的薄板,假设在薄板上作用一温度变化场:

$$\Delta T(x, y, z) = T(x, y, z) - T_{\text{ref}}, \quad (1)$$

其中 x, y, z 表示三维直角坐标, x, y 坐标轴位于板的中面; $T(x, y, z)$ 表示作用于薄板上的温度场; T_{ref} 表示参考温度值.忽略变形对热传导的影响,薄板上的温度场可通过热传导分析获得.进一步假设沿薄板厚度方向的温度变化不大,即温度变化场可以表示为仅是坐标 x, y 的函数,即 $\Delta T(x, y, z) := \Delta T(x, y, 0)$.为方便计算,记为 $\Delta T(x, y)$.

将问题讨论限制在线弹性、小变形范围内,则与热变形相关的材料参数包括弹性模量 E 、Poisson 比 ν 和热膨胀系数 α .这些参数一般随温度改变,文献中多将其表达为温度的多项式函数^[6],即

$$E(T) = \sum_i a_i T^i, \quad (2)$$

$$\nu(T) = \sum_j b_j T^j, \quad (3)$$

$$\alpha(T) = \sum_k c_k T^k, \quad (4)$$

式中 a_i, b_j, c_k 表示根据实验数据拟合的多项式系数。

在小变形条件下,薄板的热屈曲分析可以将膜内力的解算过程和屈曲分析过程解耦,即,首先通过热载荷下的平面应力分析求得薄板的膜内力,然后建立微弯状态下膜内力作用下的热屈曲平衡方程。

薄板在热载荷作用下的平面应力分析控制方程为

$$N_x = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - N_T, \quad (5)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - N_T, \quad (6)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}, \quad (7)$$

$$N_T = \frac{E\alpha h}{1 - \nu} \Delta T, \quad (8)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

式(5)–(8)为物理方程, N_x, N_y, N_{xy} 为薄板膜内力, N_T 为热力;式(9)–(11)为几何方程, u_0, v_0 为薄板中面沿 x, y 方向的位移分量, $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 为中面面内应变;式(12)、(13)为平衡方程.给定边界条件,利用有限元等

方法可解出温度载荷下薄板的膜内力场 N_x, N_y, N_{xy} 。由于考虑了材料参数的温度相关性, 所得的膜内力场是关于温变的非线性函数。

微弯状态下薄板的临界热屈曲平衡方程为

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (14)$$

其中 $w(x, y)$ 表示薄板中面上各点沿垂直方向的位移。给定边界条件后, 可通过临界热屈曲平衡方程的解算获得临界热屈曲温度和热屈曲模态。针对复杂的工程问题, 通过能量法或 Galerkin 法, 并引入有限元等离散化方法, 将偏微分方程(14)转化为代数方程解算。相关细节可参见文献[17], 这里直接给出离散化后的代数方程, 即

$$(\mathbf{K}_E(T) + \mathbf{K}_G(T)) \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

其中 \mathbf{U} 为节点位移向量, \mathbf{K}_E 为结构总体刚度矩阵, \mathbf{K}_G 为几何刚度矩阵。由于材料参数随温度变化, 因此 \mathbf{K}_E 和 \mathbf{K}_G 均是温度的矩阵函数。

给定一个温变分布 $\Delta T_0(x, y)$, 温变场值是该温变分布乘以一个线性比例因子 λ , 即

$$\Delta T(x, y) = \lambda \Delta T_0(x, y), \quad (16)$$

则温度场为

$$T(x, y) = T_{\text{ref}} + \lambda \Delta T_0(x, y). \quad (17)$$

则温度相关的材料参数转化为关于比例因子的函数, 即

$$\begin{cases} E(T) := E(\lambda), \\ \nu(T) := \nu(\lambda), \\ \alpha(T) := \alpha(\lambda). \end{cases} \quad (18)$$

代入离散化方程(15), 得

$$(\mathbf{K}_E(\lambda) + \mathbf{K}_G(\lambda)) \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (19)$$

这是一个关于 λ 的特征值问题。如果不考虑材料参数的温度相关性, 刚度矩阵 \mathbf{K}_E 与 λ 无关, 几何刚度矩阵 \mathbf{K}_G 是 λ 的线性函数, 则问题退化为线性特征值屈曲问题, 即

$$(\mathbf{K}_E + \lambda \mathbf{K}_{G0}) \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

其中 \mathbf{K}_{G0} 为按照温变场 $\Delta T_0(x, y)$ 计算的几何刚度矩阵。利用线性特征值解算方法, 如子空间迭代法、Lanczos 方法等, 可实现高效求解。如果考虑材料参数的温度相关性, 刚度矩阵 \mathbf{K}_E 和几何刚度矩阵 \mathbf{K}_G 均是 λ 的非线性矩阵函数, 问题变成了一个非线性特征值问题。

2 非线性特征值热屈曲分析方法

非线性特征值问题的解算方法包括基于矩阵分解的 Newton 方法、基于非线性方程组的 Newton 方法、逐次近似方法、子空间投影方法等^[23-26]。下面给出采用逐次线性近似方法进行热屈曲分析的算法。

设 λ_k 是非线性特征值问题(19)的一个近似特征值, 将刚度矩阵函数和几何刚度矩阵函数在 λ_k 处做 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_E(\lambda_k + \Delta\lambda) + \mathbf{K}_G(\lambda_k + \Delta\lambda) = \\ & \mathbf{K}_E(\lambda_k) + \mathbf{K}'_E(\lambda_k) \Delta\lambda + \mathbf{K}_G(\lambda_k) + \mathbf{K}'_G(\lambda_k) \Delta\lambda + \frac{(\Delta\lambda)^2}{2} \mathbf{R}_2(\lambda_k, \Delta\lambda). \end{aligned} \quad (21)$$

在刚度矩阵 \mathbf{K}_E 和几何刚度矩阵 \mathbf{K}_G 关于 λ 二次可微, 且 $\mathbf{R}_2(\lambda_k, \Delta\lambda)$ 是一个 L_2 范数有界矩阵的条件下, 可用如下线性特征值问题处理:

$$(\mathbf{K}_E(\lambda_k) + \mathbf{K}_G(\lambda_k) + \Delta\lambda (\mathbf{K}'_E(\lambda_k) + \mathbf{K}'_G(\lambda_k))) \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (22)$$

近似非线性特征值问题(19), 如果 $\Delta\lambda$ 是特征值问题模最小的特征值, 则 $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda$ 可以作为非线性特征值问题(19)的新近似特征值。可以证明^[23], 逐次线性化方法具有局部二次收敛率。

在上述逐次线性算法中, 需要计算刚度矩阵和几何刚度矩阵关于比例因子的导数, 即 $\mathbf{K}'_E(\lambda_k)$ 和 $\mathbf{K}'_G(\lambda_k)$ 。

考虑到实际问题中温度场以及材料参数随温度变化的复杂性,很难统一给出这两个矩阵函数导数的解析表达式,需要采用数值手段计算导数值.这里采用自动微分法来计算矩阵函数的导数.自动微分技术的基本思想是将复杂的函数分解为一系列基本运算(如加法、乘法、指数函数、三角函数等),然后逐层计算每个运算的导数,最终通过链式法则得到函数的导数^[27].与传统的有限差分法相比,自动微分技术是一种导数计算的精确方法,而且其计算复杂度与函数值计算相当,计算效率更高.自动微分为两种模式,即前向模式和反向模式,其中前向模式适用于输入变量较少的情形,反向模式适用于输出变量较少的情形.本文计算刚度矩阵和几何刚度矩阵关于比例因子的导数,输入变量只有一个,因此采用前向模式的自动微分技术.根据链式法则,刚度矩阵与几何刚度矩阵关于比例因子的导数计算如下:

$$\frac{d\mathbf{K}_E(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial \mathbf{K}_E(\lambda)}{\partial E} \frac{dE}{dT} \frac{dT}{d\lambda} + \frac{\partial \mathbf{K}_E(\lambda)}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dT} \frac{dT}{d\lambda} + \frac{\partial \mathbf{K}_E(\lambda)}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dT} \frac{dT}{d\lambda}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_G(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{\partial \mathbf{K}_G(\lambda)}{\partial N_x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial E} \frac{dE}{dT} + \frac{\partial N_x}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dT} + \frac{\partial N_x}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dT} \right) \frac{dT}{d\lambda} + \\ &\frac{\partial \mathbf{K}_G(\lambda)}{\partial N_y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial E} \frac{dE}{dT} + \frac{\partial N_y}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dT} + \frac{\partial N_y}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dT} \right) \frac{dT}{d\lambda} + \\ &\frac{\partial \mathbf{K}_G(\lambda)}{\partial N_{xy}} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial E} \frac{dE}{dT} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dT} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dT} \right) \frac{dT}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (24)$$

基于式(23)和(24)中的链式微分关系,即可通过自动微分技术计算 $\mathbf{K}'_E(\lambda_k)$ 和 $\mathbf{K}'_G(\lambda_k)$.

在逐次线性化迭代求解过程中,可以使用以下收敛准则:

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda_k\| < \epsilon, \quad (25)$$

其中 ϵ 是预设的容差.

总结上述内容,给出利用逐次线性化方法进行非线性特征值屈曲分析的算法:

Step 0 给定初始 λ_0 , 误差参数 ϵ , 扰动参数 δ , $k := 0$.

Step 1 计算温度场为 $T(x, y) = T_{\text{ref}} + \lambda_k \Delta T_0(x, y)$ 的弹性模量 $E(T)$ 、Poisson 比 $\nu(T)$ 、热膨胀系数 $\alpha(T)$.

Step 2 生成刚度矩阵 $\mathbf{K}_E(\lambda_k)$ 和几何刚度矩阵 $\mathbf{K}_G(\lambda_k)$, 并利用自动微分技术计算导数矩阵 $\mathbf{K}'_E(\lambda_k)$, $\mathbf{K}'_G(\lambda_k)$.

Step 3 解关于 $\Delta\lambda$ 的线性特征值问题:

$$(\mathbf{K}_E(\lambda_k) + \mathbf{K}_G(\lambda_k) + \Delta\lambda (\mathbf{K}'_E(\lambda_k) + \mathbf{K}'_G(\lambda_k))) \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

并更新 $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda$.

Step 4 收敛性判断,若 $\|\lambda_{k+1} - \lambda_k\| < \epsilon$, 算法终止;否则, $k := k + 1$, 转 step 1.

3 数值算例

我们通过两个具体的数值算例来验证所提方法的有效性.算例中的温度载荷为非均匀温度场,材料的弹性模量和热膨胀系数均与温度相关.采用四种不同的方法进行计算,通过对比分析验证算法的有效性.四种算法分别为线性特征值屈曲分析法、Riks 法、文献[9]的启发式迭代法以及本文算法.

线性特征值屈曲分析法中,材料参数保持不变,按照线性特征值解算方法给出薄板的临界屈曲温度和屈曲模态.由于忽略了材料参数的温度相关性,所得的临界屈曲温度值一般偏大.

Riks 法是一种静态弧长法,它能够较为准确地模拟薄板的热屈曲和热后屈曲过程.本文在计算出挠度温度曲线后,采用 Southwell 方法提取临界屈曲温度值,并将其结果用作验证非线性特征值屈曲分析结果的正确性.该方法的特点是考虑了包括材料属性温度相关等非线性,但其计算成本高,且对初始缺陷敏感.

启发式迭代算法,这里采用文献[9]给出的材料参数温度相关结构临界热屈曲分析迭代方法.该方法通过线性热屈曲分析法求解热屈曲临界温度,并据此调整材料参数值,反复迭代直至收敛.文献[9]中还给出一种利用前两次迭代结果预测第三次结果的加速迭代策略,其计算公式为

$$(\Delta T_{cr})_3 = \frac{(\Delta T_{cr})_1}{2 - \frac{(\Delta T_{cr})_2}{(\Delta T_{cr})_1}}, \tag{26}$$

该方法能够提供较为准确的热屈曲载荷估计,但其计算效率仍然较低。

3.1 矩形薄板的热屈曲分析算例

3.1.1 几何参数与材料特性

矩形薄板的长宽比为 $a/b = 1$, 厚度为 h , 单位为 m . 材料为各向同性材料, 其弹性模量 E 和热膨胀系数 α 按式(27)和(28)随温度变化, Poisson 比 ν 取 0.3:

$$E = (-3e^{-9} \times T^3 + 1e^{-6} \times T^2 - 3e^{-4} \times T + 1.022\ 4) \times 205\ 000, \tag{27}$$

$$\alpha = 3e^{-10} \times T^2 + 2.9e^{-8} \times T + 7e^{-6}. \tag{28}$$

温度场为式(29)的非均匀温度场:

$$T(y) = T_0 \left(0.5 \times \cos \left(\frac{\pi \times \left(y - \frac{b}{2} \right)}{50} \right) + 0.5 \right). \tag{29}$$

温度场分布云图如图 1 所示。

板的边界条件为四边简支. 有限元模型中采用缩减积分四边形 Mindlin 板单元对矩形板进行离散化, 单元个数为 40×40 , 如图 2 所示. 为了考察算法的效果, 对不同板厚的问题进行计算. 将板的厚度设置为 $0.1 + 0.02(n - 1)$, $n = 1, 2, \dots, 20$, 共 20 个计算样本. 图 3 和图 4 展示了利用 Riks 法和 Southwell 法计算的临界屈曲温度结果. 图 5 展示了利用 4 种方法对 20 个计算样本的临界热屈曲温度计算结果. 表 1 列出了其中 3 个厚度的板的临界热屈曲温度计算结果. 由图 5 和表 1 可见, 本文结果与 Riks 法、文献[9]算法的结果一致, 这验证了本文算法的正确性. 而未考虑材料参数温度相关性的线性特征值屈曲分析结果要偏大, 并且偏差随着板的厚度的增加而增大。

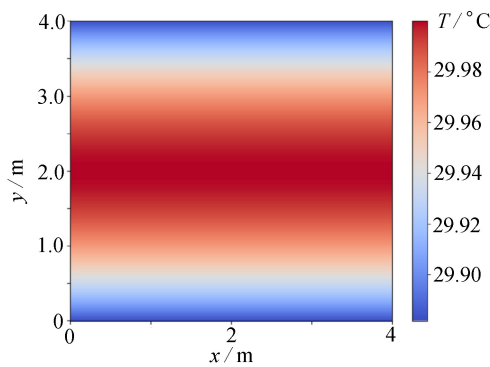


图 1 矩形薄板温度场

Fig. 1 The temperature field of the rectangular thin plate

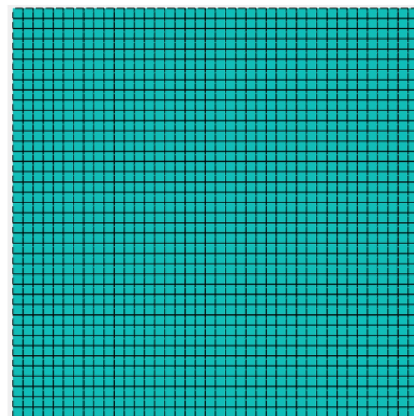


图 2 矩形薄板网格划分

Fig. 2 The rectangular thin plate meshing

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同。

表 1 矩形薄板临界屈曲温度计算结果对比

Table 1 The numerical results comparison of critical buckling temperatures for rectangular thin plates

thickness/m	result of this paper	result ^[9]	Riks	linear buckling
0.12	101.553 1	101.798 7	100.782 1	139.181 7
0.22	280.657 1	280.783 2	271.112 4	460.744 9
0.32	489.356 5	490.118 4	499.882 7	952.125 6

3.1.2 不同方法的计算结果对比

进一步, 针对板厚为 0.14 m 的矩形薄板, 对本文所提出的非线性特征值法与文献[9]算法的迭代效率进

行比较,如图6所示.本文方法经过4次迭代后即满足收敛条件,而文献[9]算法需要18次迭代.

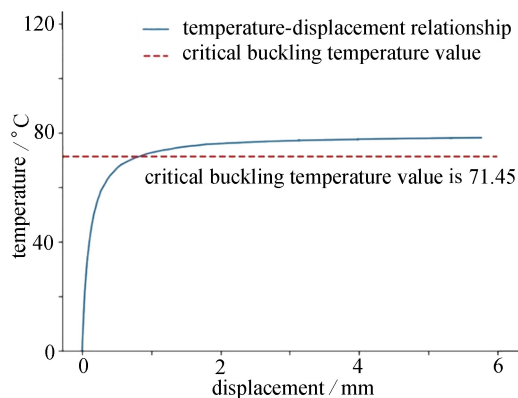


图3 矩形薄板 Riks 方法温度-位移图

Fig. 3 The temperature-displacement diagram of the rectangular thin plate with the Riks method

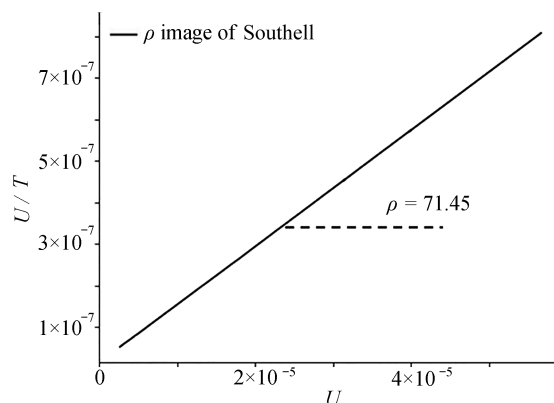


图4 矩形薄板 Southwell 方法得到临界屈曲温度图

Fig. 4 The critical buckling temperature diagram of rectangular thin plates is obtained with the Southwell method

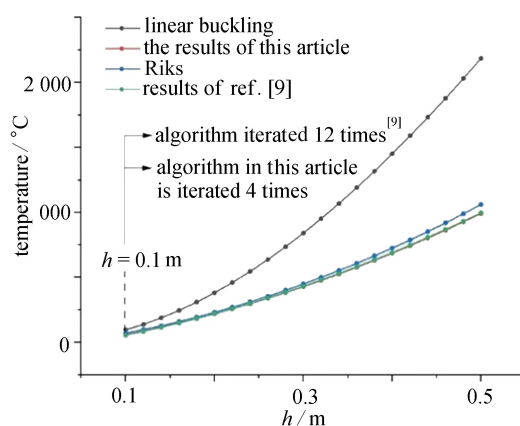


图5 不同厚度板的临界热屈曲温度计算结果

Fig. 5 Calculation results of critical thermal buckling temperatures for plates with different thicknesses

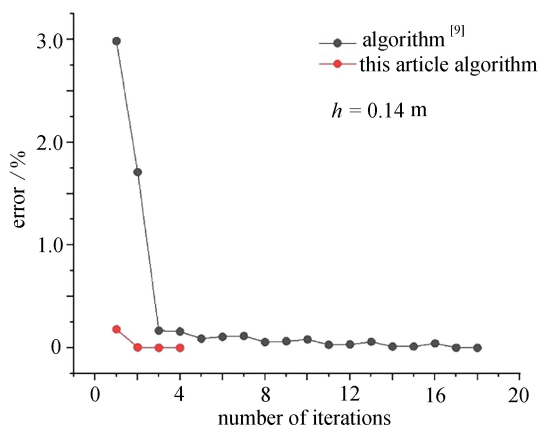


图6 矩形薄板-本文方法与文献[9]方法的迭代误差比较

Fig. 6 For the rectangular thin plate the comparison of iterative errors between the present and that of ref. [9]

3.2 圆环薄板的热屈曲分析算例

3.2.1 几何参数与材料特性

圆环薄板的内外半径分别为 50 mm 和 100 mm, 厚度 h . 材料参数同 3.1 小节的算例. 对圆环施加沿径向非均匀分布的温度场, 见式 (30):

$$T(x,y) = T_0 \left(1 - (\ln 2) \times \ln \frac{50}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \quad (30)$$

温度场分布云图如图 7 所示。

板的边界条件为圆环外圆简支。采用缩减积分四边形 Mindlin 板单元对圆环进行离散化,内圆和外圆单元划分为 40,纵向划分为 6,网格图如图 8 所示。为了考察算法的效果,对不同板厚的问题进行计算。将板的厚度设置为 $0.5 + 0.5(n - 1)$, $n = 1, 2, \dots, 10$, 共 10 个计算样本。图 9 和图 10 展示了利用 Riks 法和 Southwell 法计算的临界屈曲温度结果。图 11 展示了利用 4 种方法对 10 个计算样本的临界热屈曲温度计算结果。表 2 列出了 3 个厚度的板的临界屈曲温度计算结果。由图 11 和表 2 可见,本文结果与 Riks 法、文献[9]算法的结果一致,这验证了本文算法的正确性。而未考虑材料参数温度相关性的线性特征值屈曲分析结果要偏大,并且偏差随着板的厚度的增加而增大。

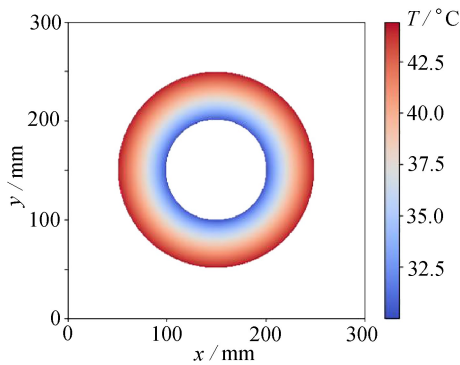


图 7 圆环薄板温度场

Fig. 7 The ring plate temperature field

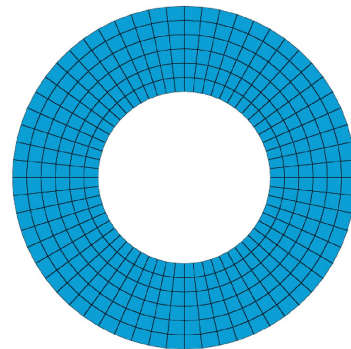


图 8 圆环薄板网格划分

Fig. 8 The ring plate meshing

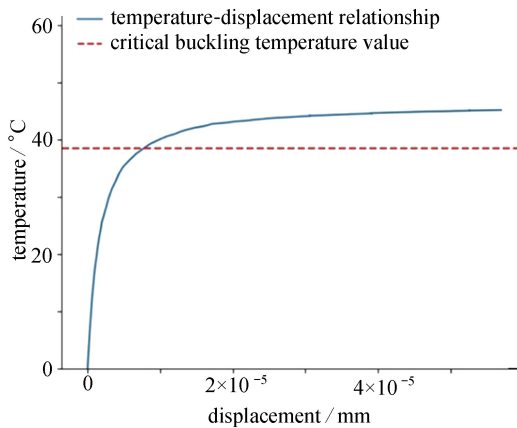


图 9 圆环薄板 Riks 方法温度-位移图

Fig. 9 The temperature-displacement diagram of the circular plate with the Riks method

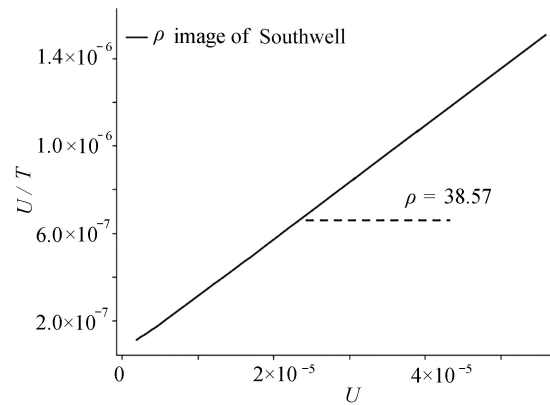


图 10 圆环薄板 Southwell 方法得到临界屈曲温度图

Fig.10 The critical buckling temperature diagram obtained with the Southwell method

表 2 圆环薄板临界热屈曲温度计算结果对比

Table 2 The numerical results comparison of critical thermal buckling temperatures for ring thin plates

thickness/mm	result of this paper	result ^[9]	Riks	linear buckling
1	38.879 4	38.575 59	38.879 4	38.439 95
3	126.281 66	126.973 88	128.328 57	265.477 46
5	260.114 31	259.481 54	261.617 14	641.545 54

3.2.2 不同方法的计算结果

进一步,针对板厚为 2 mm 的圆形薄板,对本文方法与文献[9]算法之间的迭代效率进行比较,如图 12 所示。从图可见,本文方法仅需 3 次迭代即满足收敛条件,而文献[9]算法需要 30 次迭代。

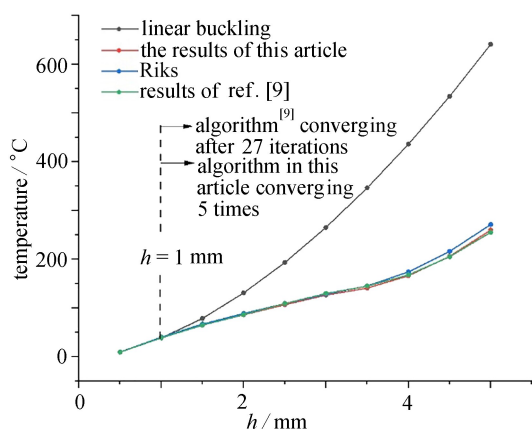


图 11 不同厚度圆环薄板的临界热屈曲温度计算结果

Fig. 11 Calculation results of critical thermal buckling temperature for circular plates with different thicknesses

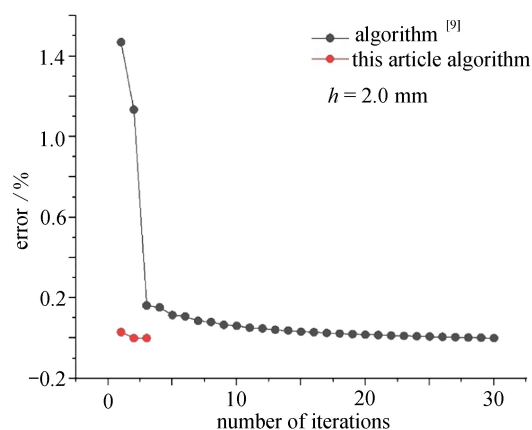


图 12 圆环薄板: 本文方法与文献[9]方法的迭代误差比较

Fig. 12 For the circular thin plate the comparison of iterative errors between the present and that of ref. [9]

4 结 论

本文将材料参数的温度相关性引入热屈曲分析,并将其转化为一非线性特征值屈曲问题进行求解.进一步地,给出了采用逐次线性化方法进行非线性特征值屈曲分析的方法.由于在算法中用到了结构刚度矩阵和几何刚度矩阵关于温度载荷比例因子的导数信息,因此所给出的算法具有较高的效率和精度.通过对两个算例的计算,并与传统的线性特征值屈曲分析方法、Riks法、文献算法结果比较,验证了所提方法的有效性与准确性.

参考文献 (References):

- [1] 任青梅. 高超声速飞行器薄壁结构热屈曲行为研究进展[J]. 飞航导弹, 2018(7): 6-12. (REN Qingmei. Research progress on thermal buckling behavior of thin-walled structures of hypersonic vehicles[J]. *Aerodynamic Missile Journal*, 2018(7): 6-12. (in Chinese))
- [2] 厄尔·A·桑顿. 新一代航空航天热结构与材料[M]. 黄启忠, 译. 北京: 航空工业出版社, 2019. (THORNTON EARL A. *Aerospace Thermal Structures and Materials for a New Era*[M]. Translated by HUANG Qizhong. Beijing: Aviation Industry Press, 2019. (Chinese version))
- [3] 李若愚, 王天宏. 薄板热力耦合的屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(8): 877-886. (LI Ruoyu, WANG Tianhong. Thermo-mechanical buckling analysis of thin plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, 41(8): 877-886. (in Chinese))
- [4] 龚雪蓓, 赵伟东, 郭冬梅. 横向非均匀温度场作用的 FGM 夹层圆板热屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(4): 419-430. (GONG Xuebei, ZHAO Weidong, GUO Dongmei. Thermal buckling analysis of FGM sandwich circular plates under transverse nonuniform temperature field actions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, 44(4): 419-430. (in Chinese))
- [5] REN Y, HUO R, ZHOU D. Thermo-mechanical buckling analysis of non-uniformly heated rectangular plates with temperature-dependent material properties[J]. *Thin-Walled Structures*, 2023, 186: 110653.
- [6] BIRMAN V. Thermal buckling and postbuckling of columns accounting for temperature effect on material properties[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2022, 45(12): 1043-1056.
- [7] 郭兆璞, 陈浩然. 复合材料层合板非线性热屈曲分析[J]. 大连理工大学学报, 1995, 35(4): 463-467. (GUO Zhaoapu, CHEN Haoran. Thermal buckling analysis of laminated composite plates with temperature-dependent material properties[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1995, 35(4): 463-467. (in Chinese))
- [8] 邓可顺, 张亚辉. 考虑材料性质参数随温度变化的热屈曲试探解法[J]. 大连理工大学学报, 1999, 39(3): 358-362. (DENG Keshun, ZHANG Yahui. Trial and error method of thermal buckling for complex structures[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1999, 39(3): 358-362. (in Chinese))

- [9] WILLIAM L. Thermal and mechanical buckling analysis of hypersonic aircraft hat-stiffened panels with varying face sheet geometry and fiber orientation: 4770[R]. NASA Technical Memorandum, 1996.
- [10] HUANG H, RAO D. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent elastoplastic properties[J]. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2020, **32**(5): 1403-1415.
- [11] JOUEID N, ZGHAL S, CHRIGUI M, et al. Thermoelastic buckling analysis of plates and shells of temperature and porosity dependent functionally graded materials[J]. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2024, **28**(3): 817-859.
- [12] TRABELSI S, FRIKHA A, ZGHAL S, et al. A modified FSDT-based four nodes finite shell element for thermal buckling analysis of functionally graded plates and cylindrical shells[J]. *Engineering Structures*, 2019, **178**: 444-459.
- [13] HAJLAOUI A, CHEBBI E, DAMMAK F. Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded material structures using a modified FSDT-based solid-shell element[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, **194**: 104547.
- [14] AVEY M, FANTUZZI N, SOFIYEV A. On the solution of thermal buckling problem of moderately thick laminated conical shells containing carbon nanotube originating layers[J]. *Materials*, 2022, **15**(21): 7427.
- [15] KAREEM M G, AL-RAHEEM S K, SADIQ S E, et al. Review of research on the vibration and buckling of functionally graded spherical shells[J]. *International Journal of Science and Research Archive*, 2024, **13**(2): 2170-2186.
- [16] ALJADANI M H. The porosity effect on the buckling analysis of functionally graded plates under thermal environment using a Quasi-3D theory[J]. *Scientific Reports*, 2024, **14**: 30216.
- [17] GUO H, ŽUR K K, OUYANG X. New insights into the nonlinear stability of nanocomposite cylindrical panels under aero-thermal loads[J]. *Composite Structures*, 2023, **303**: 116231.
- [18] 李畅, 万志强, 王晓喆, 等. 热载荷环境下金属-陶瓷功能梯度板屈曲特性[J]. 北京航空航天大学学报, 2025, **51**(12): 4196-4206. (LI Chang, WAN Zhiqiang, WANG Xiaozhe, et al. Buckling characteristics of metal-ceramic functionally graded plates in thermal loading environments[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2025, **51**(12): 4196-4206. (in Chinese))
- [19] WANG Z, HAN Q, NASH D H, et al. Thermal buckling of cylindrical shell with temperature-dependent material properties: conventional theoretical solution and new numerical method[J]. *Mechanics Research Communications*, 2018, **92**: 74-80.
- [20] CHAKRABORTY S, DEY T. Non-linear stability analysis of CNT reinforced composite cylindrical shell panel subjected to thermomechanical loading[J]. *Composite Structures*, 2021, **255**: 112995.
- [21] 杨坤. 高压捕获翼板的热屈曲分析研究[D]. 天津: 天津科技大学, 2023. (YANG Kun. Research on thermal buckling analysis of high-pressure capturing wing plate[D]. Tianjin: Tianjin University of Science & Technology, 2023. (in Chinese))
- [22] TIMOSHENKO S P, GERE J M. *Theory of Elastic Stability*[M]. Courier Corporation, 2012.
- [23] GÜTTEL S, TISSEUR F. The nonlinear eigenvalue problem[J]. *Acta Numerica*, 2017, **26**: 1-94.
- [24] 陈小平. 非线性特征值问题的数值方法及其应用[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2016. (CHEN Xiaoping. Numerical methods for nonlinear eigenvalue problems and their applications[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016. (in Chinese))
- [25] TANG Z, SAAD Y. A rational-Chebyshev projection method for nonlinear eigenvalue problems[J]. *Numerical Linear Algebra With Applications*, 2024, **31**(6): e2563.
- [26] BRENNAN M C, EMBREE M, GUGERCIN S. Contour integral methods for nonlinear eigenvalue problems: a systems theoretic approach[J]. *SIAM Review*, 2023, **65**(2): 439-470.
- [27] BAYDINA G, PEARLMUTTER B A, RADUL A A, et al. Automatic differentiation in machine learning: a survey[PP/OL]. (2018-02-05)[2026-03-31]. <https://arxiv.org/abs/1502.05767>.