

二维瞬态非线性热传导问题的数值流形法求解*

张丽美^{1,2}, 聂治豹³, 张楠¹,
郑宏⁴, 赵帅星¹, 杨龙^{1,2}

- (1. 中国地质环境监测院, 北京 100081;
2. 中国地质大学 工程技术学院, 北京 100083;
3. 国网电力工程研究院有限公司, 北京 100163;
4. 北京工业大学 城市建设学部, 北京 100124)

(我刊编委郑宏来稿)

摘要: 数值流形法(numerical manifold method, NMM)通过引入两套覆盖系统:数学覆盖用于构造单位分解函数;物理覆盖用于构造局部逼近函数,有效实现了连续与不连续问题的统一处理.该文深入研究了 NMM 在二维瞬态非线性热传导问题的应用.首先,根据瞬态非线性热传导的控制方程、初始条件以及边界条件,建立了初边值问题的弱形式.随后,提出了温度场的 NMM 近似表达式,采用 Galerkin 法推导出全局离散格式.在时间离散方面,采用 Euler 向后差分法,并结合 Newton-Raphson 迭代法求解了最终的代数方程组.通过对具有不规则边界和含孔洞的不连续板等典型算例进行模拟,结果表明 NMM 不仅计算精度高(最大的误差不超过 0.6%)、鲁棒性好,更能有效处理复杂几何形状和不连续性板,为该领域的数值计算提供了一种高效的新方法.

关键词: 非线性热传导; 数值流形法; Galerkin 法; Newton-Raphson 法; 温度场

中图分类号: O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460033

A Numerical Manifold Method for Solving 2D Transient Nonlinear Heat Conduction Problems

ZHANG Limei^{1,2}, NIE Zhibao³, ZHANG Nan¹,
ZHENG Hong⁴, ZHAO Shuaixing¹, YANG Long^{1,2}

(1. *China Institute of Geo-Environment Monitoring, Beijing 100081, P.R. China;*

2. *School of Engineering and Technology, China University of Geosciences, Beijing 100083, P.R. China;*

3. *State Grid Electric Power Engineering Research Institute, Beijing 100163, P.R. China;*

4. *Faculty of Architecture, Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, P.R. China)*

(Contributed by ZHENG Hong, Member of the Editorial Board of AMM)

Abstract: The numerical manifold method (NMM) effectively realizes the unified treatment of continuous and

* 收稿日期: 2025-02-24; 修订日期: 2025-06-05

基金项目: 云南省重点研发计划(202403AA080001); 国家电网有限公司总部科技项目(5200-202355156A-1-1-ZN)

作者简介: 张丽美(1992—),女,工程师,博士(通信作者. E-mail: 710907894@qq.com).

引用格式: 张丽美, 聂治豹, 张楠, 郑宏, 赵帅星, 杨龙. 二维瞬态非线性热传导问题的数值流形法求解[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(5): 589-604.

discontinuous problems through introduction of 2 cover systems: the mathematical cover for constructing the partition of unity functions and the physical cover for constructing the local approximation function. The application of the NMM to 2D transient nonlinear heat conduction problems was investigated. Firstly, based on the governing equations for the transient nonlinear heat conduction, along with the initial and boundary conditions, the weak form of the initial-boundary value problem was established. Subsequently, an NMM approximate expression for the temperature field was presented and the global discretization form was derived with the Galerkin method. For the time discretization, the backward Euler difference method was used and combined with the Newton-Raphson iterative method to solve the algebraic equations. From simulation of typical discontinuous plates with irregular boundaries and holes, the results show that, the NMM not only has high computational accuracy (the maximum error is not more than 0.6%) and good robustness, but also can handle complex geometries and discontinuous plates more effectively, which provides an innovative and efficient new method for numerical computation in this field.

Key words: nonlinear heat conduction; numerical manifold method; Galerkin method; Newton-Raphson method; temperature field

0 引言

热传导分析作为传热学的重要研究方向,在土木工程、机械工程及航空航天等多个工程领域具有重要的应用价值.非线性材料导热系数表现为温度的函数,控制方程呈现显著的非线性特征,开发高效且稳定的非线性热传导问题数值计算方法,具有重要的理论意义和工程应用价值.

近几十年来,非线性热传导问题的数值求解方法研究一直是学术界关注的焦点.传统求解热传导的数值方法包括有限差分法^[1-2]、有限元法^[3-4]、边界元法^[5-6]、无网格方法^[7-8]、数值流形法(NMM)^[9-11]、近场动力学^[12-13]等. Annasabi 等^[14]创新性地将 B 样条函数与有限元法结合,并引入 Kirchhoff 变换,成功将非线性热传导控制方程转化为线性方程,从而有效求解了复杂问题域中的温度场分布问题.梁钰等^[15]将模型降阶法与有限元方法相结合,提出了一种快速算法,并应用到随温度变化的非线性瞬态热传导问题中. Mierzwiczak 等^[16]基于奇异边界单元方法,求解了具有不规则几何域且导热系数随温度变化的稳态温度场. Yang 等^[5]提出了一种径向积分边界元法,用来计算二维不连续矩形板和三维六面体中随温度变化的瞬态非线性热传导问题.吴泽艳等^[17]提出了一种混合的无网格方法求解非线性热传导问题. Khosravifard 等^[8]采用改进的无网格径向点插值方法,分析了二维和三维功能梯度材料中含非均匀热源的非线性瞬态温度场. Wu 等^[10]建立了双尺度 NMM 计算均匀化模型,可以准确地模拟非均质材料中的热传导过程. Zhang 等^[11]利用无网格数值流形法计算了二维功能梯度材料中的瞬态非线性温度场和热流量场.

1991 年, Shi^[18]提出了 NMM,其包括数学覆盖和物理覆盖两套系统.通常以有限元的三角形或四边形网格作为数学覆盖,共用一个节点的所有单元组成一个数学片,数学片被边界、材料界面或裂纹切割形成物理片,所有的物理片联结形成物理覆盖,物理覆盖需要精确的匹配问题域.物理片之间相互切割形成流形单元,流形单元是最小的积分单元.目前, NMM 已经成功地应用于各个领域:陈远强等^[19]利用 NMM 实现了边坡降雨-入渗-产流的全过程模拟,为降雨诱发的地质灾害提供了计算依据.胡国栋等^[20]利用 NMM 研究了二维稳态功能梯度热传导问题.谭育新等^[21]采用正六边形覆盖的 NMM 计算二维稳态方板和工业烟囱的热问题. Tan 等^[22]基于 NMM 模拟了二维稳态和瞬态长方体岩样和厚壁圆柱体的热传导问题.刘思敏等^[9]基于四边形网格覆盖的 NMM,分析了规则均质材料板和含多个圆孔和裂纹的不连续功能梯度板的温度场.

本文首次将三角形网格覆盖的 NMM 用于二维瞬态非线性热传导中.在第 1 节中,给出了瞬态非线性热传导的控制方程、初始条件及边界条件.第 2 节,首先对 NMM 进行简单介绍;随后,建立了初边值问题的弱形式,给出了温度场的 NMM 近似,并基于 Galerkin 法得到全局离散格式表达式;最后,时间离散过程采用 Euler 向后差分,利用 Newton-Raphson 迭代法求解了最终的代数方程组.在第 3 节中,通过对具有不规则边界和含孔洞的不连续板的典型算例进行模拟,验证了所提方法的计算精度高和鲁棒性好,为二维瞬态非线性热传导的计算提供了一种新方法.

1 控制方程

如图 1 所示, 问题域 Ω 由 Dirichlet 边界、Neumann 边界和 Robin 边界条件所围成 $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$, 且 $\Gamma_D \cap \Gamma_N \cap \Gamma_R = \emptyset$. 二维瞬态非线性热传导^[11]的控制方程可以描述为

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) + g(\mathbf{x}) = \rho c \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

其中, 下标 $i = 1, 2$; T 代表二维问题域中任意一点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ 的温度; $k(T)$ 是随温度变化的导热系数; ρ 和 c 分别为材料密度和比热容; $g(\mathbf{x})$ 是热源函数.

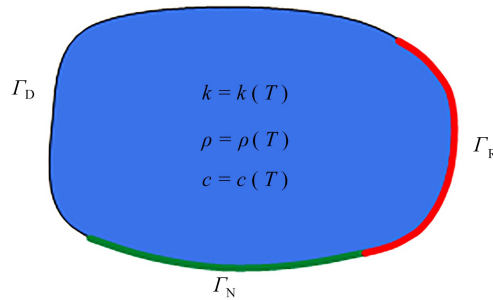


图 1 瞬态非线性热传导的问题域

Fig. 1 The transient problem domain of nonlinear heat conduction

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

为了确定温度场, 附加初始条件

$$T(\mathbf{x}, t) |_{t=0} = T_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \tag{2}$$

Dirichlet 边界条件

$$T(\mathbf{x}) = \bar{T}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D; \tag{3}$$

Neumann 边界条件

$$-k(T) \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x_i} n_i = \bar{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N; \tag{4}$$

Robin 边界条件

$$-k(T) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} n_i = h(T - T_\infty), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_R, \tag{5}$$

其中, 方程(3)和(4)中的 \bar{T} 和 \bar{q} 分别为 Γ_D 和 Γ_N 上给定的温度和热流量; 方程(5)中 h 为对流换热系数, T_∞ 是环境温度. $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ 是单位外法向向量.

2 NMM 求解瞬态非线性热传导

2.1 NMM 简介

NMM 通过引入两种类型的覆盖系统: 用于建立单位分解函数的数学覆盖和用于构造局部逼近函数的物理覆盖, 可以统一地解决连续和不连续问题. 本小节只对 NMM 进行简单的介绍, 具体细节可以参考文献 [23-24].

一般来讲, 组成数学覆盖的数学片可以是任何形状, 例如有限元网格中, 由共用一个节点的所有单元所组成, 或是移动最小二乘法中节点的影响域. 本文采用三角形网格作为数学覆盖, 如图 2(a) 所示, ABCD 围成问题域 Ω , EF 为材料界面. 以红色圆点 (也可以称为星点) 所连接的 6 个三角形单元构成一个数学片, 用 MP_i 表示, $i = 1, 2, \dots, n$, 其中 n 表示数学片的个数. 例如图 2(b) 中, 红色点 O_1 是星点, 由 $m_1-m_2-m_3-m_4-m_5-m_6$ 所围成的六边形为数学片 MP_1 . 数学片之间可以部分重叠, 但是所有的数学片联结形成的数学覆盖必须完全覆盖住问题域 Ω .

物理片是由数学片被问题域边界、材料界面和裂纹等切割形成,一个数学片可以生成一个或多个物理片. PP_{ij} 是从数学片 MP_i 中生成的第 j 个物理片, $j=1,2,\dots,m_i$,其中 m_i 是指同一个数学片中生成的物理片的个数.图2(b)—2(d)显示了三种典型的物理片.第一类物理片如 PP_1 、 PP_5 、 PP_6 和 PP_7 ,它们由数学片 MP_1 、 MP_5 、 MP_6 和 MP_7 生成,这类物理片没有被切割,因此,第一种物理片就是数学片本身. PP_2 是第二类物理片,它是数学片 MP_2 被边界切割并丢弃域外部分所形成.第三类物理片 PP_{3-1} 和 PP_{3-2} ,是数学片 MP_3 被材料界面 EF 切割生成的.问题域中一共生成 n_p 个物理片,所有的物理片组成了物理覆盖.

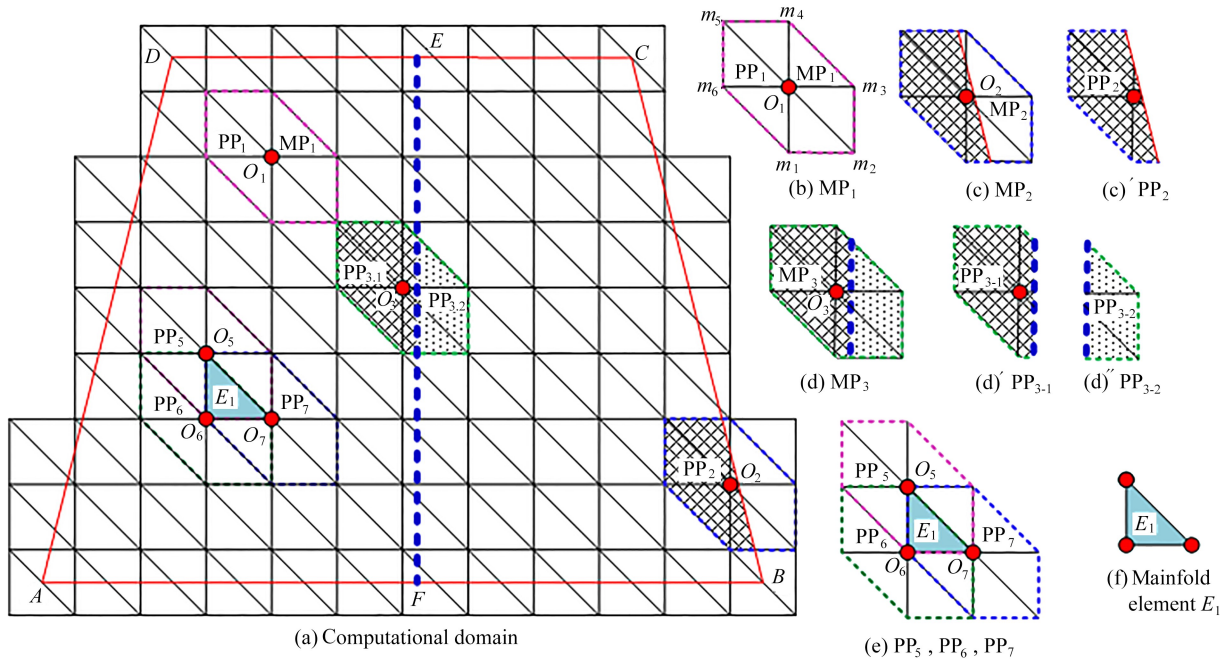


图2 在计算区域内的数学片、物理片和流形单元

Fig. 2 Mathematical patches, physical patches and manifold elements in the computational domain

物理覆盖中的物理片相互切割,进一步将问题域划分为多个不重叠的流形单元.如物理片 PP_5 、 PP_6 和 PP_7 的相互切割,最后形成了流形单元 E_1 .当有限元网格用作数学覆盖时,流形单元是基本的积分单元.

对于每一个数学片,都有一个充分光滑的权函数满足

$$\begin{cases} w_i(\mathbf{x}) \leq 1, & \mathbf{x} \in MP_i, \\ w_i(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \notin MP_i, \\ \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) = 1, & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (6)$$

每一个物理片都有一个对应的权函数 $\{w_{ij}\}$,它取自数学片上的权函数在物理片上的限制,其表达式为

$$w_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{cases} w_i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in PP_{ij}, \\ 0, & \mathbf{x} \notin PP_{ij}. \end{cases} \quad (7)$$

至此,构造出NMM的逼近为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} w_{ij}(\mathbf{x}) u_{ij}^h(\mathbf{x}), \quad (8)$$

其中, $u_{ij}^h(\mathbf{x})$ 代表物理片 PP_{ij} 的局部逼近.本文中, $u_{ij}^h(\mathbf{x})$ 为未知常数.为了简化表示,所有物理补片都按单个指标排序.方程(8)简化为

$$u^h(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})\mathbf{a}, \quad (9)$$

其中, $N(\mathbf{x})$ 是具有权函数的行向量, $w_i(\mathbf{x})$ 为其中的元素, $\mathbf{a} = (a_i)$,并且 $a_i = u^h(\mathbf{x}_i)$.

2.2 弱形式

Dirichlet边界条件(3)是按照罚函数方法施加,可以得到带罚函数的弱形式为

$$\int_{\Omega} \left[\left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) \delta T + k \frac{\partial \delta T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} - g \delta T \right] d\Omega + \int_{\Gamma_D} \lambda (T - \bar{T}) \delta T d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \bar{q} \delta T d\Gamma + \int_{\Gamma_R} h (T - T_{\infty}) \delta T d\Gamma = 0, \tag{10}$$

其中, $\delta T(\mathbf{x})$ 是 $T(\mathbf{x}, t)$ 的变分, λ 是罚因子. 本文采用罚函数方法施加 Dirichlet 边界条件, 主要是基于实现简单、计算方便的优势. 除了罚函数法以外, Lagrange 乘子法^[25]和精确施加边界条件^[26]同样适合 Dirichlet 边界条件的处理.

温度 $T(\mathbf{x}, t)$ 采用分离变量法离散:

$$T(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(t), \tag{11}$$

\mathbf{T} 是所有物理片上未知温度的列向量. 变分 $\delta T(\mathbf{x})$ 可以近似为

$$\delta T(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{T}. \tag{12}$$

通过将方程(11)和(12)代入方程(10), 可以得到

$$\mathbf{K} \mathbf{T} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{F}, \tag{13}$$

\mathbf{T} 是未知的温度列向量, $\dot{\mathbf{T}}$ 是温度对时间的一阶导数; \mathbf{K} 和 \mathbf{F} 分别表示导热系数矩阵和热荷载列阵, 可以通过单元组装形成. 在任意一个单元内 \mathbf{K}^e 和 \mathbf{F}^e 的形式分别为

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} k \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_b} \lambda \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega + \int_{\Gamma_R} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \tag{14}$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{\Omega^e} \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \tag{15}$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T g d\Omega + \int_{\Gamma_b} \lambda \mathbf{N}^T \bar{T} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T \bar{q} d\Omega + \int_{\Gamma_R} h T_{\infty} \mathbf{N}^T d\Omega. \tag{16}$$

方程(14)中的矩阵形式可以写为

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n], \tag{17}$$

其中, $\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_i}{\partial x_1} & \frac{\partial w_i}{\partial x_2} \end{pmatrix}^T$.

2.3 时间离散

为求解式(13)中关于时间的常微分方程, 采用 Euler 向后差分格式进行时域离散. 假设已知 t 时刻的温度向量 \mathbf{T}_t , 时间步长为 Δt . 可以计算 $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$, 在 $t + \Delta t$ 时刻的值为

$$\left(\mathbf{K}_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \right) \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{C}}{\Delta t} \mathbf{T}_t, \tag{18}$$

$\mathbf{K}_{t+\Delta t}$ 的取值严格依赖于 $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$, 系统(18)相对于 $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$ 是非线性的. 采用 Newton-Raphson 迭代法^[27]进行求解.

3 数值算例

根据上述推导的方程, 基于 MATLAB 软件平台编写 NMM 程序, 进行二维瞬态非线性热传导问题分析, 计算了四个复杂程度不同的数值算例, 分别为方板、带圆孔矩形板、含有热源的不规则多边形板以及带圆孔与对流换热边界的正六边形板. 为了评估数值结果, 定义相对误差为

$$R_e = \frac{|T^* - T^{NMM}|}{T} \times 100\%, \tag{19}$$

其中, T^* 代表解析解或参考解, T^{NMM} 代表由 NMM 计算的数值解.

3.1 方板上的热传导

如图 3 所示的第一个算例^[5], 方板的几何尺寸为 1.0 m × 1.0 m, 其导热系数随温度变化为 $k(T) = 15 + 0.01T^2$. 材料密度 $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$, 比热容 $c = 100 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, 左、右两条边界上施加的温度分别为 $T_l = 100 \text{ K}$, $T_r = 200 \text{ K}$, 上、下两条边界为绝热边界, 初始温度场为 100 K.

如图 4 所示, 本研究采用 121 个数片覆盖方板, 一生成 200 个流形单元. 鉴于该问题缺乏解析解, 采用多物理场仿真软件 COMSOL Multiphysics 的有限元分析结果作为参考解. 如图 5 所示, 在 COMSOL 仿真过

程中,方板被离散为6 282个三角形单元.

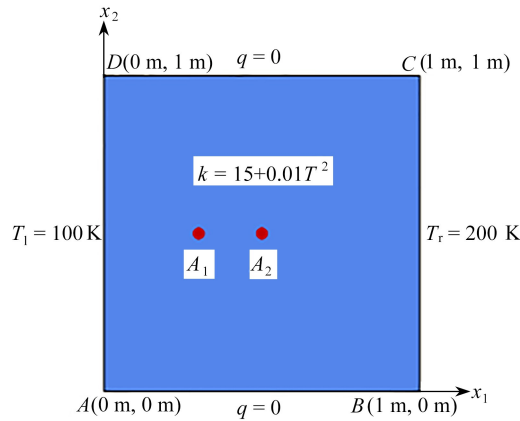


图3 方板几何模型及边界条件

Fig. 3 The geometric model of the square plate and the boundary condition

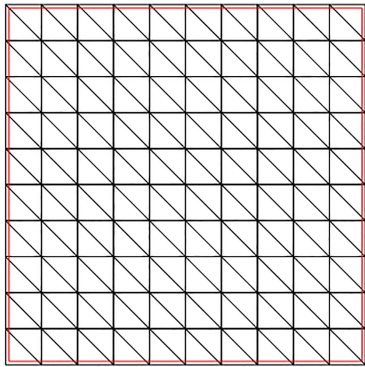


图4 含121个数学片的数学覆盖

Fig. 4 The mathematical cover with 121 mathematical patches

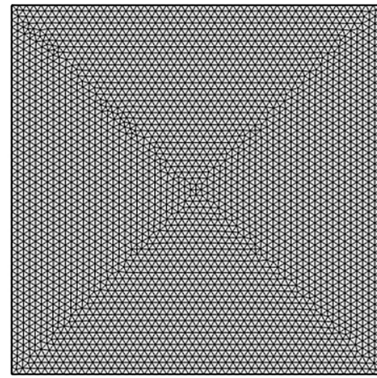


图5 6 282个三角形单元的有限元网格

Fig. 5 The finite element mesh with 6 282 triangular elements

首先,验证罚因子的取值对温度结果的影响.如图6所示,选取不同罚因子 $\lambda = 10^2 \sim 10^7$,计算 $t = 5.0$ s时,沿着 $x_1 = 0 \sim 1.0$ m, $x_2 = 0.5$ m的温度.当罚因子 $\lambda < 10^5$ 时,其取值对温度的影响较大;当 $\lambda \geq 10^5$ 时,温度值逐渐接近参考解,所以此算例选取罚因子 $\lambda = 10^6$.其次,测试了不同时间步长对结果的影响.如图7所示,选取不同时间步长 $\Delta t = 2.0$ s, 1.0 s, 0.5 s, 0.2 s, 0.1 s, 计算 $t = 2.0$ s, 10.0 s时,沿着 $x_1 = 0 \sim 1.0$ m, $x_2 = 0.5$ m的温度.可以看出随着时间步长 Δt 的减小,计算结果逐渐接近参考解.

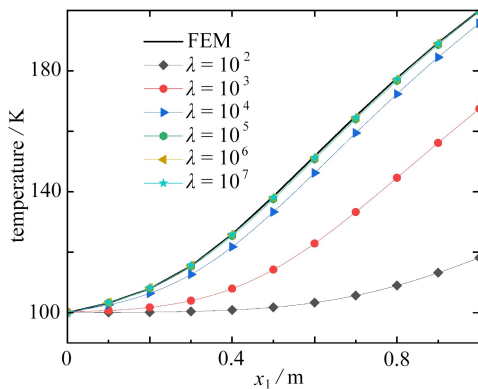


图6 不同罚因子下沿着 $x_2 = 0.5$ m在 $t = 5.0$ s时的温度值

Fig. 6 Temperatures along $x_2 = 0.5$ m at $t = 5.0$ s with different penalty factors

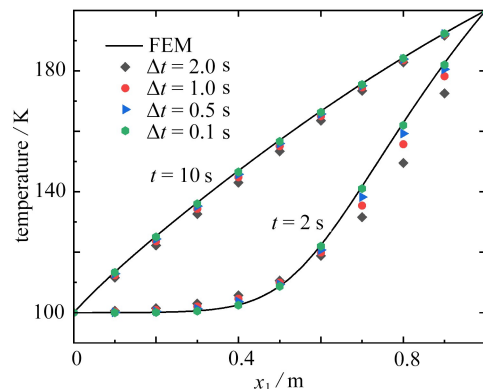


图7 不同时间步长 Δt 下沿着 $x_2 = 0.5$ m的温度变化

Fig. 7 Temperature variations along $x_2 = 0.5$ m at different time steps Δt

表 1 中列出了由 NMM 和 FEM 计算的两个测点 $A_1 (0.3 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$, $A_2 (0.5 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$ 在 $t = 1 \sim 10 \text{ s}$ 不同时刻的温度值及误差值.可以看出,NMM 计算的温度值和参考解一致.即使采用含有 121 个数学片的模型计算两个测点,最大的误差也仅为 0.539 5%.

表 1 NMM 和 FEM 计算不同时刻的 A_1 和 A_2 两点的温度值

Table 1 The temperatures of point A_1 and A_2 at different moments calculated by NMM and FEM

t/s	point A_1			point A_2		
	NMM	FEM	error/%	NMM	FEM	error/%
1	100.02	100.01	0.002 3	100.73	100.56	0.168 4
2	100.73	100.62	0.110 3	108.86	108.80	0.056 6
3	103.99	103.74	0.242 1	120.51	120.88	0.308 3
4	109.46	109.27	0.173 7	130.27	130.92	0.493 6
5	115.55	115.45	0.084 3	137.75	138.50	0.539 5
6	121.22	121.29	0.056 1	143.49	144.23	0.509 8
7	126.09	126.33	0.189 2	147.97	148.64	0.451 0
8	130.09	130.46	0.281 0	151.49	152.08	0.386 4
9	133.30	133.80	0.370 1	154.28	154.87	0.384 0
10	135.85	136.42	0.421 5	156.47	157.08	0.387 0

图 8 显示了分别使用 NMM 和 FEM 计算位于 $x_1 = 0.1 \text{ m}, 0.2 \text{ m}, \dots, 0.9 \text{ m}$, $x_2 = 0.5 \text{ m}$ 处的 9 个内部点的不同时刻的温度值,可以看出在计算 $t = 2 \text{ s}, 5 \text{ s}, 10 \text{ s}, 100 \text{ s}$ 时,NMM 计算的 9 个内部点的温度值和 FEM 吻合良好.为了研究温度随时间的演变过程,计算点 A_2 在整个计算时间 100 s 的温度值,分为 1 000 个时间步,每个时间步为 $\Delta t = 0.1 \text{ s}$.图 9 为 NMM 计算结果与 FEM 计算结果的温度演化对比.可以看出,NMM 和 FEM 的值吻合一致,点 A_2 的温度值随着时间先迅速增长,后逐渐趋于稳定.

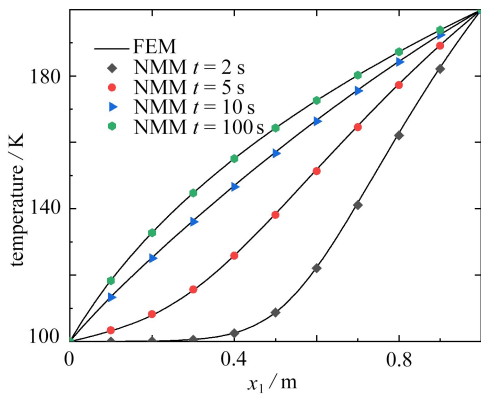


图 8 板上沿着 x_1 方向的温度

Fig. 8 Temperatures on the plate in the x_1 direction

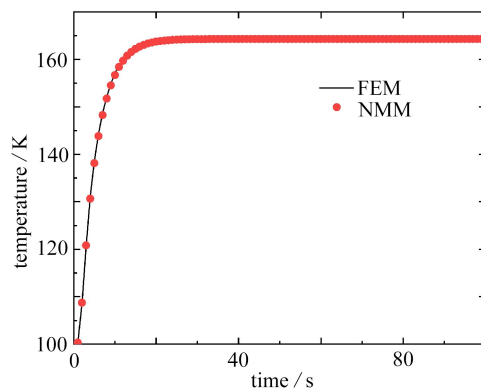


图 9 随时间分布的温度值

Fig. 9 The temperature distribution vs. time

图 10 为 $t = 2 \text{ s}, 5 \text{ s}, 10 \text{ s}, 100 \text{ s}$ 不同时刻的温度等值线图.方板的温度场随着时间前期变化较快,后期逐渐趋于稳定.

3.2 带圆孔的矩形板的热传导

如图 11 所示,研究一个带圆孔的矩形板^[5],矩形板的尺寸为 $0.1 \text{ m} \times 0.05 \text{ m}$,圆孔半径为 $r = 0.01 \text{ m}$.随温度变化的热传导系数为 $k(T) = 100 + 0.2T$,材料密度 $\rho = 5\,000 \text{ kg/m}^3$,比热容 $c = 200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$.左右两条边界施加的温度分别为 400 K 和 100 K ,其他的边界都是绝热边界,初始温度值为 100 K .在本算例中,罚因子采用 $\lambda = 1 \times 10^7$.

如图 12,采用三角形网格作为数学覆盖,一生成 838 个数片学和 1 534 个流形单元.整个计算时间为 50 s ,采用的时间离散步长为 $\Delta t = 1 \text{ s}$.为进行比较,该带孔板也使用 COMSOL 软件模拟,如图 13 为含有 3 324 个三角形单元的离散图.

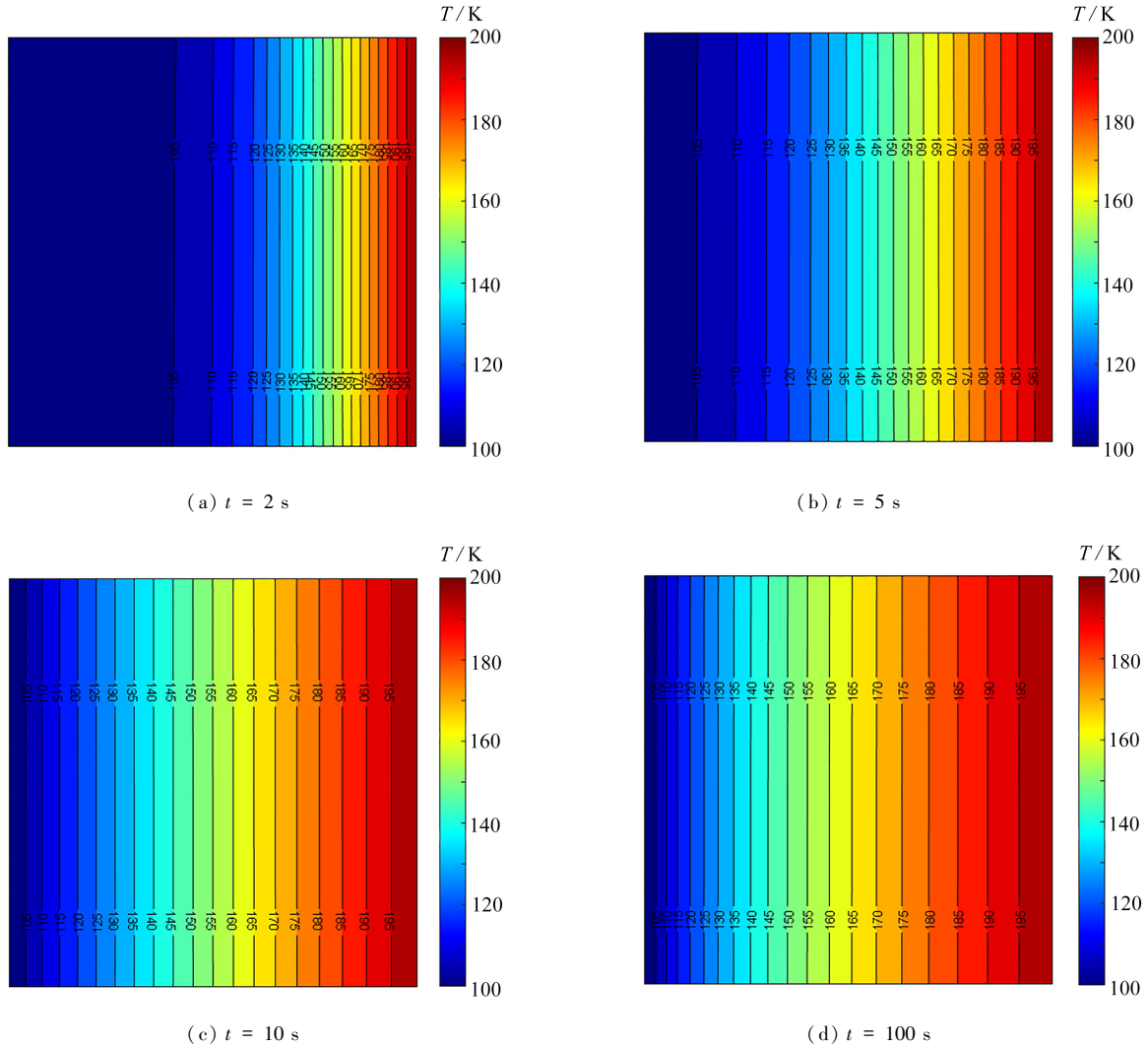


图 10 不同时间的温度等值线图

Fig. 10 Contour plots of the temperature at different moments

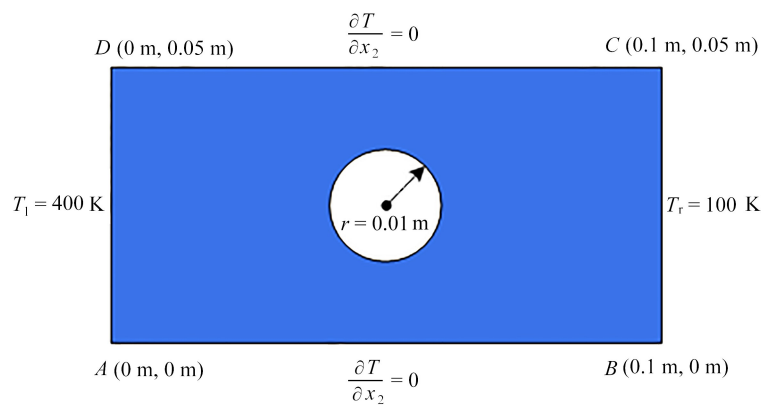


图 11 板的几何尺寸和边界条件

Fig. 11 Geometric dimensions and boundary conditions of the plate

图 14、15 分别为 NMM 和 FEM 计算沿着板上边界 9 个点 ($x_1 = 0 \text{ m}, 0.01 \text{ m}, 0.02 \text{ m}, \dots, 0.1 \text{ m}, x_2 = 0.05 \text{ m}$) 和沿着 $r = 0.01 \text{ m}$ 的圆环,在不同时刻的温度值.可以看出采用 NMM 和 FEM 计算的温度值一致. 为了研究温度随时间的演变,研究位于 $x_1 = 0.04 \text{ m}, x_2 = 0.025 \text{ m}$ 的点 M , 图 16 为采用 FEM 和 NMM 计

算的温度随时间的变化值,两者的温度值吻合良好.

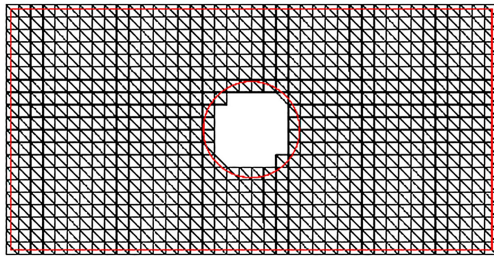


图 12 838 个数学片覆盖板

Fig. 12 The mathematical cover with 838 mathematical patches

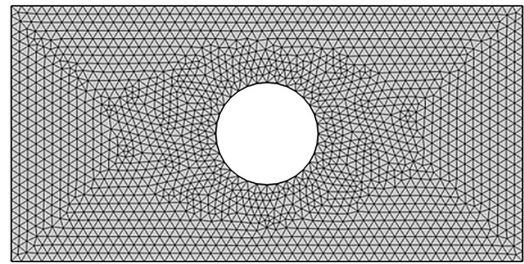


图 13 3 324 个三角形单元的有限元网格

Fig. 13 The finite element mesh with 3 324 triangular elements

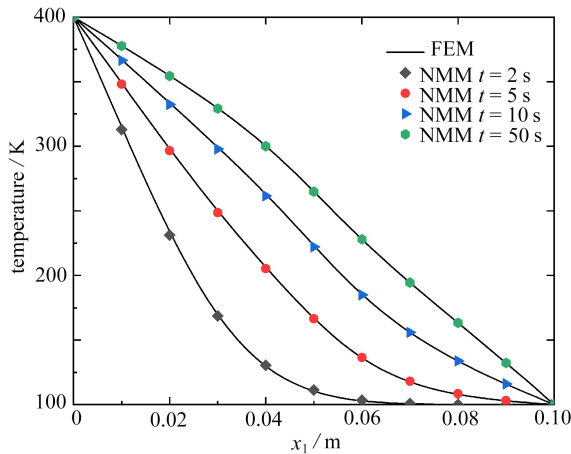


图 14 沿板上边界的计算温度

Fig. 14 Computed temperatures along the upper boundary of the plate

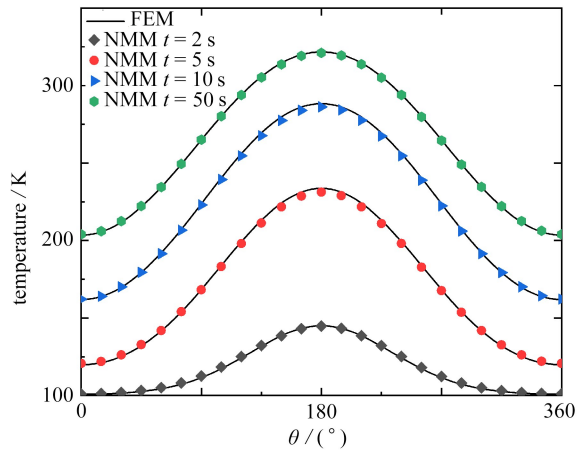


图 15 沿着圆环的温度

Fig. 15 Computed temperatures along the circle

图 17 为分别在 $t = 2\text{ s}, 5\text{ s}, 10\text{ s}$ 和 50 s 时的计算温度等值线图.可以很明显的看出,随着时间的推进,带圆孔矩形板的温度逐渐升高,整个板内部的温度值也逐渐趋于稳定.

3.3 不规则构件热传导

如图 18,计算一个几何不规则构件^[27].右侧 AB, BC, CD, DE, EF 五条边界上的温度为 $T_r = 650\text{ K}$.剩余边界的热流量都为零.整个问题域上的初始值为 800 K .材料密度 $\rho = 7\ 000\text{ kg/m}^3$,与温度相关的导热系数和比热容分别为

$$\begin{cases} k(T) = 30 + 0.005T, \\ c(T) = 400 - 0.05T. \end{cases} \quad (20)$$

热源函数随坐标变化,其表达式为

$$g(x) = [1 + 0.03(x_1 + x_2)] \times 10^6. \quad (21)$$

如图 19 所示,采用 821 个数学片覆盖不规则板,一共生成 821 个物理片和 1 510 个流形单元.本算例的罚因子 $\lambda = 1 \times 10^{10}$,时间步长 $\Delta t = 0.1\text{ s}$.采用图 20 所示的 4 472 个三角形单元的有限元网格计算的值作为参考解.表 2 列出了由 NMM 和 FEM 在 $t = 2\text{ s}, 4\text{ s}, 6\text{ s}, 8\text{ s}, 10\text{ s}$ 时计算两个点 $B_1(-8\text{ m}, 25\text{ m})$ 和 $B_2(0\text{ m}, 20\text{ m})$ 的温度值及两种方法的误差,可以看出两者的最大的误差仅为 0.182 3%.即使采用较少的自由度,基于 Newton 法的 NMM 所得到的结果依然与 FEM 高度一致.

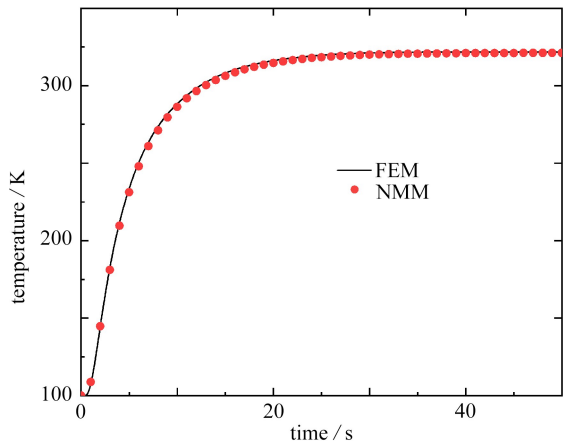
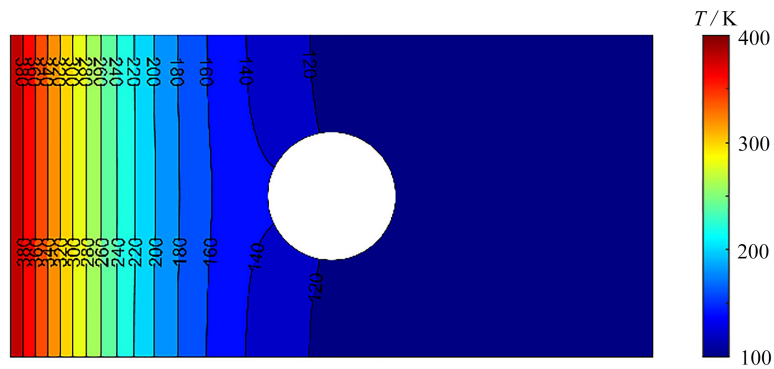
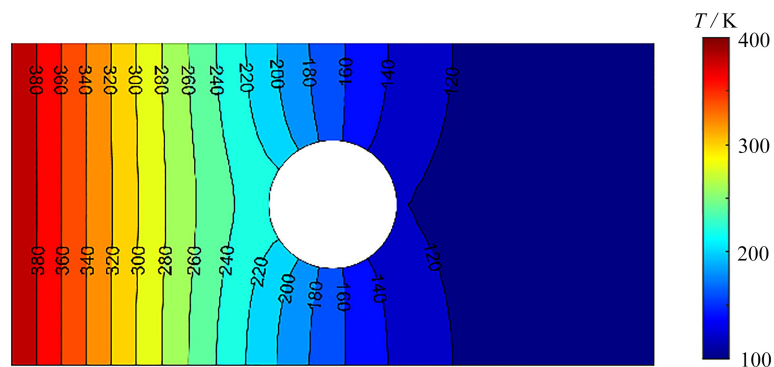


图 16 M 点的温度随时间的分布

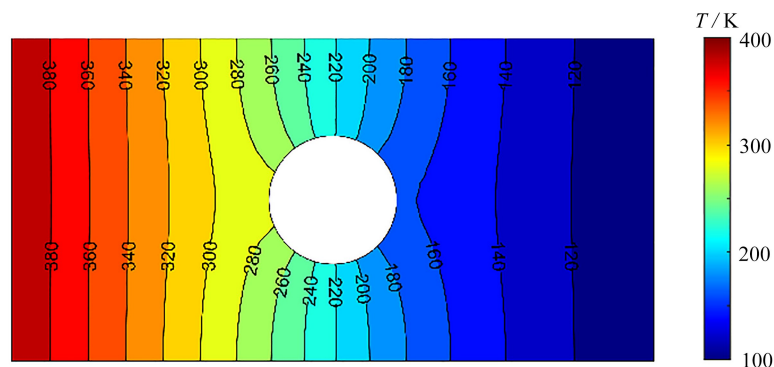
Fig. 16 The temperature distribution vs. time of point M



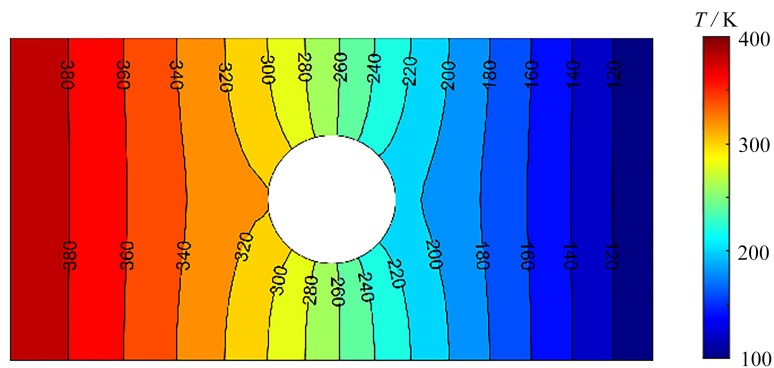
(a) $t = 2\text{ s}$



(b) $t = 5\text{ s}$



(c) $t = 10\text{ s}$



(d) $t = 50\text{ s}$

图 17 不同时间的温度等值线图

Fig. 17 Contour plots of the temperature at different moments

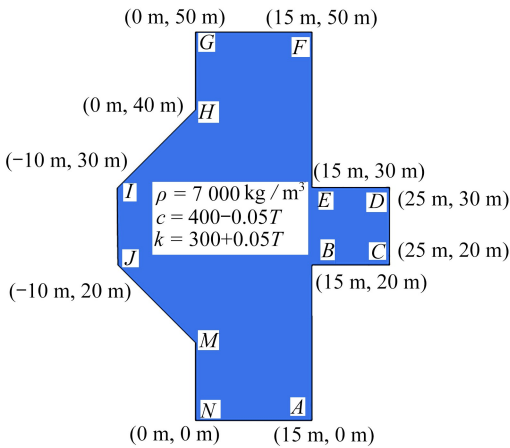


图 18 算例 3 的几何模型

Fig. 18 The geometric model for example 3

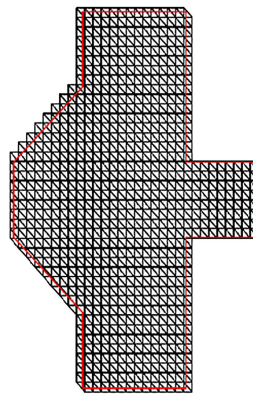


图 19 含 821 个数学片的数学覆盖

Fig. 19 The mathematical cover with 821 mathematical patches

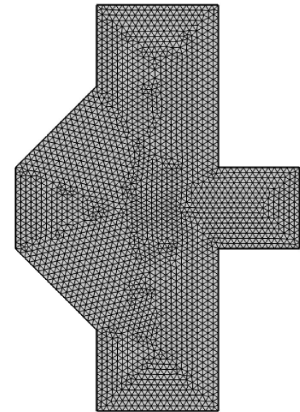


图 20 4 472 个三角形单元的有限元网格

Fig. 20 The finite element mesh with 4 472 triangular elements

表 2 B_1 和 B_2 两点不同时刻的温度值

Table 2 The temperatures of point B_1 and B_2 at different moments

t/s	point B_1			point B_2		
	NMM	FEM	error/%	NMM	FEM	error/%
2	799.26	800.21	0.118 7	794.04	795.49	0.182 3
4	793.90	794.93	0.129 6	780.81	781.37	0.071 7
6	784.12	784.9	0.099 4	766.16	766.53	0.048 3
8	772.01	772.68	0.086 7	752.38	752.54	0.021 3
10	759.33	759.66	0.043 4	739.99	739.83	0.022 0

选取了四个节点 B_3 (0 m, 10 m), B_4 (-10 m, 20 m), B_5 (-10 m, 30 m), B_6 (0 m, 40 m), 利用 NMM 计算了四个节点的温度值, 并和 FEM、多边形单元微分法 (PEDM) 和单元微分法 (EDM) 进行了对比. 从表 3 中可以看出, 采用 NMM 所计算的结果和另外三种方法吻合一致, 验证了 NMM 的正确性.

表 3 B_3, B_4, B_5 和 B_6 四个点不同时刻的温度值

Table 3 The temperatures of point B_3, B_4, B_5 and B_6 at different moments

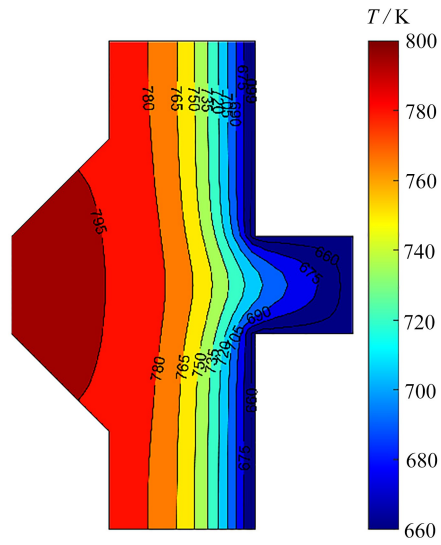
point	FEM	PEDM	error/%	EDM	error/%	NMM	error/%
B_3	734.307	728.484	0.793	733.681	0.085	735.244	0.128
B_4	774.639	770.477	0.537	773.307	0.172	771.633	0.388
B_5	775.070	770.261	0.620	773.389	0.217	771.74	0.429
B_6	735.843	732.233	0.490	733.897	0.264	735.179	0.090

图 21 绘制了由 NMM 和 FEM 计算的问题域内温度云图分布, 可以看出两者的温度场基本一致, 再次验证了 NMM 在求解复杂二维几何非线性热传导问题的有效性.

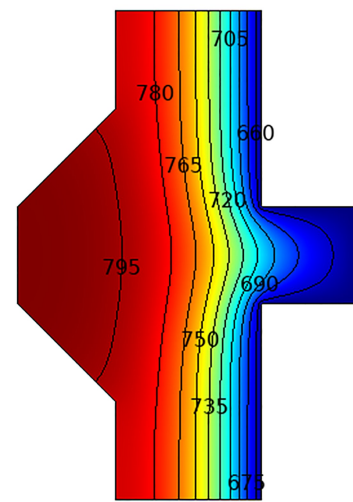
3.4 六边形带圆孔板的瞬态热传导

如图 22, 考虑一个二维等边六边形, 边长为 2 m, 中间圆的半径为 $r = 1$ m. 初始温度场为 500 K, 随温度变化的热传导系数为 $k = 580 - 0.1T$; 材料密度和比热容分别为 $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$, $c = 180 + 0.4T$. 最外层为对流换热边界条件, 外界环境温度 $T_\infty = 300 \text{ K}$, 换热系数为 $h = 100 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, 内部圆环为绝热边界.

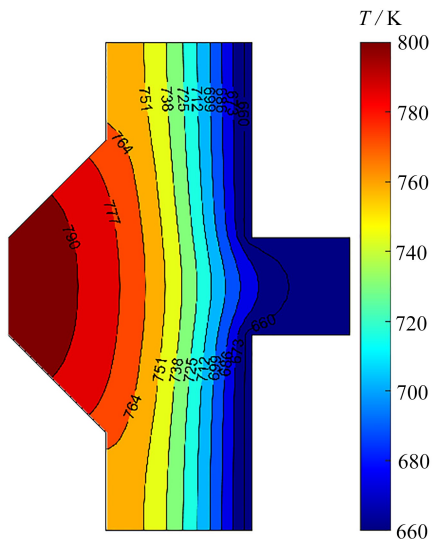
图 23 采用含有 1 024 个数学片覆盖问题域, 生成 1 840 个流形单元. 如图 24, COMSOL 软件采用三角形网格进行计算, 一共生成 3 348 个单元. 本算例的罚因子 $\lambda = 1 \times 10^6$, 时间离散步长为 $\Delta t = 0.1 \text{ s}$. 计算 C_1 (1.5 m, 0 m) 和 C_2 (1.5 m, 1 m) 两个节点温度值, 并记录在表 4 中. 从表 4 中可以看出两者的温度非常一致, C_1 和 C_2 两点的温度值最大的误差仅为 0.009 6% 和 0.020 5%.



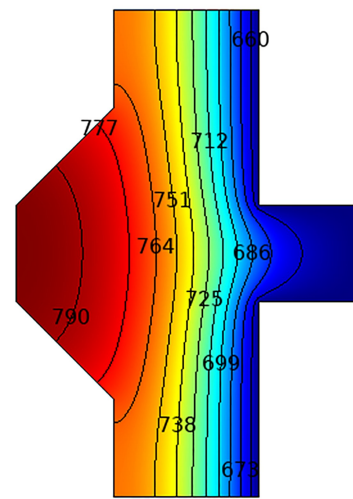
(a) NMM, $t = 2$ s



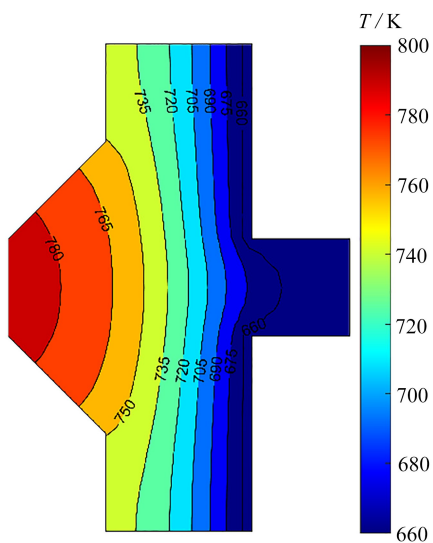
(b) FEM, $t = 2$ s



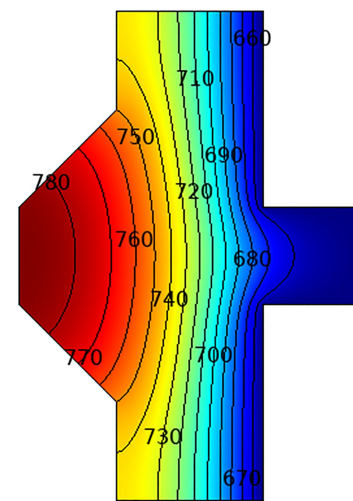
(c) NMM, $t = 4$ s



(d) FEM, $t = 4$ s



(e) NMM, $t = 6$ s



(f) FEM, $t = 6$ s

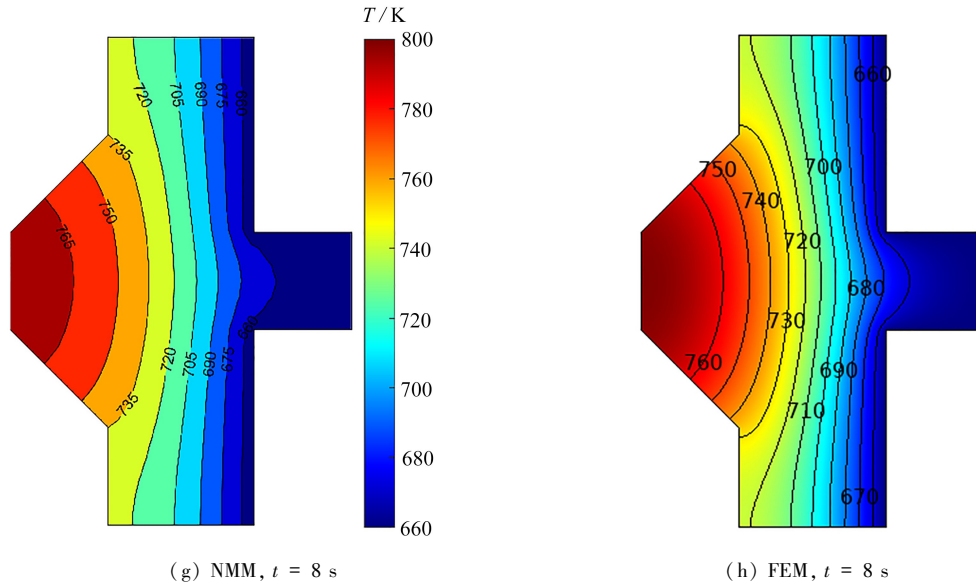


图 21 NMM 和 FEM 计算 $t = 2\text{ s}, 4\text{ s}, 6\text{ s}, 8\text{ s}$ 的温度等值线图
Fig. 21 Contour plots of the temperature fields by NMM and FEM at $t = 2\text{ s}, 4\text{ s}, 6\text{ s}, 8\text{ s}$

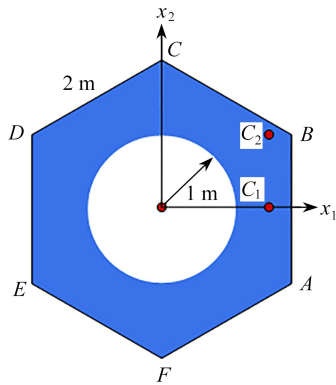


图 22 算例 4 的几何示意图
Fig. 22 The geometric model for example 4

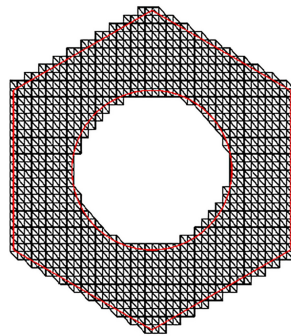


图 23 含 1 024 个数学片的数学覆盖
Fig. 23 The mathematical cover with 1 024 mathematical patches

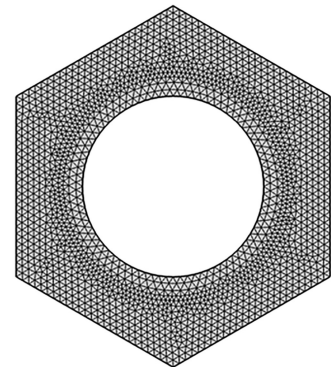


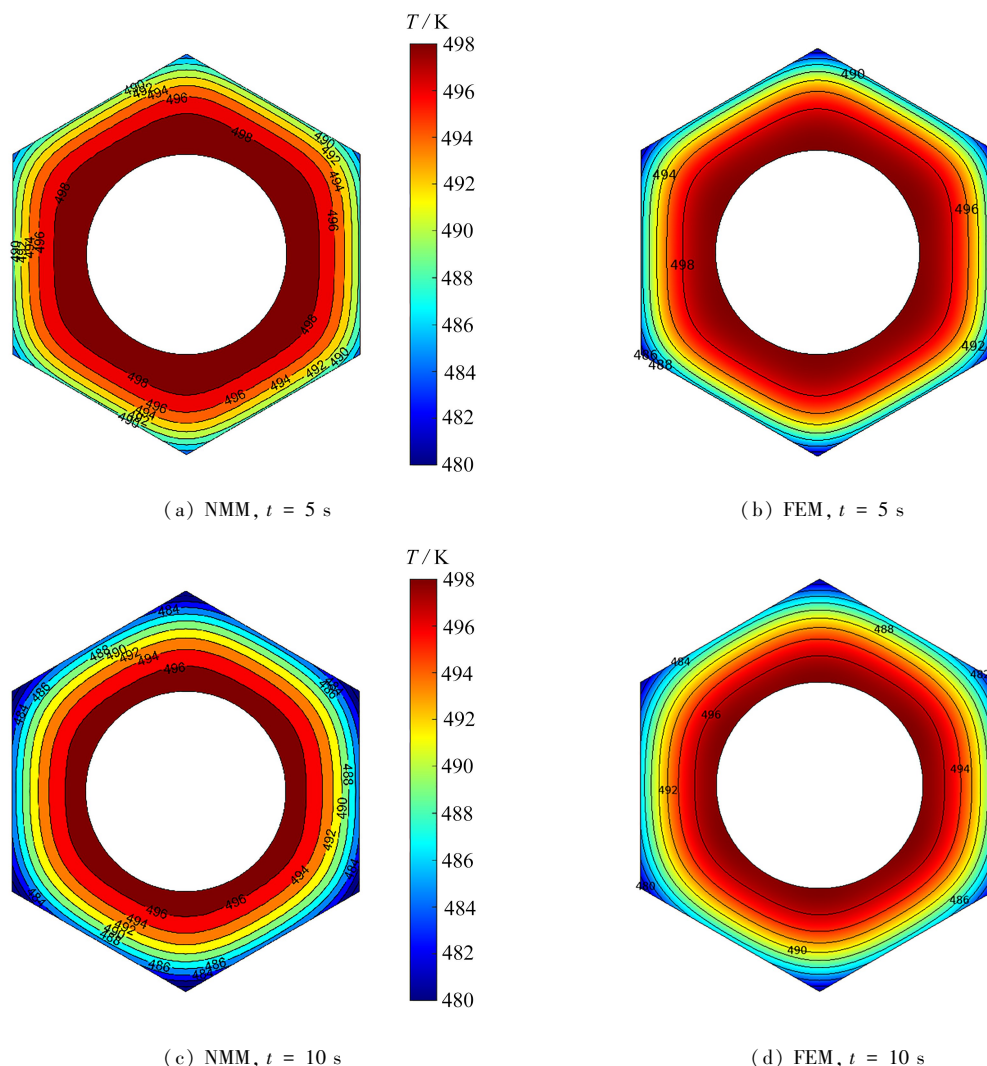
图 24 3 348 个三角形单元的有限元网格
Fig. 24 The finite element mesh with 3 348 triangular elements

表 4 C_1 和 C_2 两点不同时刻的温度值

Table 4 The temperatures of point C_1 and C_2 at different moments

t/s	point C_1			point C_2		
	NMM	FEM	error/%	NMM	FEM	error/%
1	499.41	499.46	0.009 4	498.04	498.07	0.006 9
2	498.51	498.50	0.001 6	495.95	496.01	0.012 6
3	497.53	497.50	0.006 6	494.1	494.15	0.010 2
4	496.57	496.54	0.006 6	492.45	492.49	0.007 1
5	495.65	495.62	0.005 5	490.95	490.98	0.006 0
6	494.76	494.73	0.006 0	489.57	489.60	0.006 4
7	493.90	493.86	0.008 5	488.27	488.33	0.011 5
8	493.07	493.03	0.007 6	487.06	487.13	0.015 3
9	492.25	492.21	0.008 3	485.93	486.01	0.017 1
10	491.45	491.40	0.009 6	484.85	484.95	0.020 5

图 25 绘出了 $t = 5\text{ s}$ 和 $t = 10\text{ s}$ 时的温度云图,可以看出由 NMM 和 FEM 绘制的等温线十分吻合。

图 25 NMM 和 FEM 计算 $t = 5 \text{ s}$, 10 s 的温度等值线图Fig. 25 Contour plots of the temperature fields by NMM and FEM at $t = 5 \text{ s}$, 10 s

4 结 论

本研究首次将 NMM 扩展应用到二维瞬态非线性热传导中.通过典型的算例验证了本文所提方法的可行性和高精度,即使采用较少的计算网格,误差也控制在 0.6% 以内,为该领域的数值计算提供了一种新方法.传统的 FEM 在布置网格时,会产生形状上的逼近误差.然而, NMM 在前处理离散过程中,数学覆盖不必与问题域的完全一致,可以采用规则的网格进行作为数学覆盖,从而充分发挥了单元的精度.未来可以将 NMM 扩展到非线性热力耦合及热裂纹的研究中.

参考文献 (References):

- [1] 张继红, 栾舒含, 梁波. 具非线性对流项热传导方程的有限差分法[J]. 大连交通大学学报, 2022, 43(5): 115-117. (ZHANG Jihong, LUAN Shuhan, LIANG Bo. Study on finite difference method of heat conduction equation with nonlinear convection term[J]. *Journal of Dalian Jiaotong University*, 2022, 43(5): 115-117. (in Chinese))
- [2] 史策. 热传导方程有限差分法的 MATLAB 实现[J]. 咸阳师范学院学报, 2009, 24(4): 27-29. (SHI Ce. Heat conduction equation finite difference method to achieve the MATLAB[J]. *Journal of Xianyang Normal University*, 2009, 24(4): 27-29. (in Chinese))

- [3] LU Q Y, RIZWAN-UDDIN. A finite element approach for nonlinear, transient heat conduction problems with convection, radiation or contact boundary conditions[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2023, **193**: 110009.
- [4] 张凯, 王克用, 齐东平. 热传导问题杂交基本解有限元法虚拟源点的探究[J]. *应用数学和力学*, 2023, **44**(4): 431-440. (ZHANG Kai, WANG Keyong, QI Dongping. Research on the fictitious source points of the hybrid fundamental solution-based finite element method for heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(4): 431-440. (in Chinese))
- [5] YANG K, PENG H F, WANG J, et al. Radial integration BEM for solving transient nonlinear heat conduction with temperature-dependent conductivity[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017, **108**: 1551-1559.
- [6] ZHOU L, LÜ J, CUI M, et al. A polygonal element differential method for solving two-dimensional transient nonlinear heat conduction problems[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2023, **146**: 448-459.
- [7] 王红, 李小林. 二维瞬态热传导问题的无单元 Galerkin 法分析[J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(5): 460-469. (WANG Hong, LI Xiaolin. Analysis of 2D transient heat conduction problems with the element-free Galerkin method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(5): 460-469. (in Chinese))
- [8] KHOSRAVIFARD A, HEMATIYAN M R, MARIN L. Nonlinear transient heat conduction analysis of functionally graded materials in the presence of heat sources using an improved meshless radial point interpolation method [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, **35**(9): 4157-4174.
- [9] 刘思敏, 张慧华, 韩尚宇, 等. 连续及不连续各向异性热传导问题的数值流形方法求解[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(6): 591-603. (LIU Simin, ZHANG Huihua, HAN Shangyu, et al. Solutions of continuous and discontinuous anisotropic heat conduction problems with the numerical manifold method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(6): 591-603. (in Chinese))
- [10] WU W, JIAO Y, ZHENG F, et al. NMM-based computational homogenization for nonlinear transient heat conduction in imperfectly bonded heterogeneous media[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2025, **162**: 108599.
- [11] ZHANG L, GUO F, ZHENG H. The MLS-based numerical manifold method for nonlinear transient heat conduction problems in functionally graded materials[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2022, **139**: 106428.
- [12] 周保良, 李志远, 黄丹. 二维瞬态热传导的 PDDO 分析[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(6): 660-668. (ZHOU Baoliang, LI Zhiyuan, HUANG Dan. PDDO analysis of 2D transient heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 660-668. (in Chinese))
- [13] BOBARU F, DUANGPANYA M. A peridynamic formulation for transient heat conduction in bodies with evolving discontinuities[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, **231**(7): 2764-2785.
- [14] ANNASABI Z, ERCHIQUI F. Robust Kirchhoff transformation using B-spline for finite element analysis of the non-linear heat conduction[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2021, **120**: 104985.
- [15] 梁钰, 郑保敬, 高效伟, 等. 基于 POD 模型降阶法的非线性瞬态热传导分析[J]. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2018, **48**(12): 32-41. (LIANG Yu, ZHENG Baojing, GAO Xiaowei, et al. Reduced order model analysis method via proper orthogonal decomposition for nonlinear transient heat conduction problems[J]. *Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica*, 2018, **48**(12): 32-41. (in Chinese))
- [16] MIERZWICZAK M, CHEN W, FU Z J. The singular boundary method for steady-state nonlinear heat conduction problem with temperature-dependent thermal conductivity[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, **91**: 205-217.
- [17] 吴泽艳, 郑保敬, 叶永, 等. 非线性热传导方程 MLPG/RBF-FD 无网格数值模拟[J]. *工程热物理学报*, 2022, **43**(1): 164-172. (WU Zeyan, ZHENG Baojing, YE Yong, et al. Numerical simulation for the nonlinear heat conduction equations based on MLPG/RBF-FD meshless method[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2022, **43**(1): 164-172. (in Chinese))
- [18] SHI G H. Manifold method of material analysis[C]//*Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing*, 1991.

- [19] 陈远强, 郑宏, 屈新. 基于数值流形法的降雨入渗与坡面径流耦合算法研究[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(12): 1499-1511. (CHEN Yuanqiang, ZHENG Hong, QU Xin. A coupling analysis of rainfall infiltration and slope surface runoff based on the numerical manifold method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(12): 1499-1511. (in Chinese))
- [20] 胡国栋, 张慧华, 谭育新. 功能梯度材料稳态热传导问题的数值流形方法研究[J]. 应用力学学报, 2017, **34**(2): 311-317. (HU Guodong, ZHANG Huihua, TAN Yuxin. Numerical manifold study of steady heat conduction problems in functionally graded materials[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2017, **34**(2): 311-317. (in Chinese))
- [21] 谭育新, 张慧华, 胡国栋. 二维稳态热传导问题的正六边形流形元研究[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 594-604. (TAN Yuxin, ZHANG Huihua, HU Guodong. 2D steady heat conduction analysis with the regular hexagon numerical manifold method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 594-604. (in Chinese))
- [22] TAN F, TONG D F, LIANG J W, et al. Two-dimensional numerical manifold method for heat conduction problems[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2022, **137**: 119-138.
- [23] 徐栋栋, 郑宏, 夏开文, 等. 高阶扩展数值流形法在裂纹扩展中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, **33**(7): 1375-1387. (XU Dongdong, ZHENG Hong, XIA Kaiwen, et al. Application of higher-order enriched numerical manifold method to crack propagation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, **33**(7): 1375-1387. (in Chinese))
- [24] ZHENG H, XU D. New strategies for some issues of numerical manifold method in simulation of crack propagation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2014, **97**(13): 986-1010.
- [25] HU M, WANG Y, RUTQVIST J. On continuous and discontinuous approaches for modeling groundwater flow in heterogeneous media using the numerical manifold method: model development and comparison[J]. *Advances in Water Resources*, 2015, **80**: 17-29.
- [26] ZHENG H, LI W, DU X. Exact imposition of essential boundary condition and material interface continuity in Galerkin-based meshless methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, **110**(7): 637-660.
- [27] ZHOU L, SUN C B, XU B B, et al. A new general analytical PBEM for solving three-dimensional transient nonlinear heat conduction problems with spatially-varying heat generation[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2023, **152**: 334-346.