

基于等效热容法的水域冰盖生长过程的数值模拟*

郭雅勋¹, 李星², 章青¹

(1. 河海大学 力学与工程科学学院, 南京 211100;

2. 河西学院 土木工程学院, 甘肃 张掖 734000)

(我刊编委章青来稿)

摘要: 寒区水域在冬季常形成冰盖, 冰盖的不断生长会对人类活动产生显著影响, 理解与预测冰盖生长行为对预防冰害具有重要的实际意义. 冰盖生长受到众多要素的影响, 目前尚未完全认识其中的机制. 为深入研究冰盖生长行为的复杂现象, 建立了冰盖生长的有限元计算模型, 采用等效热容法进行了冰盖生长过程的数值模拟. 通过与实验数据的对比, 验证了所建模型和方法的准确性, 并对是否考虑自然对流两种情况的数值计算结果进行比较分析. 应用本文方法和冻冰度日法计算了松花江某断面河冰生长的冰盖厚度, 给出了两种方法的均方根误差, 进一步证实了等效热容法在实际河流环境中的有效性. 研究结果表明, 本文所建立的冰盖生长计算模型和数值方法能够反映热传递和流体运动等物理过程, 可有效处理冰水相变问题, 为考虑多物理场耦合效应进行冰盖生长过程模拟提供了一种有效方法.

关键词: 冰盖; 生长过程; 数值模拟; 等效热容法; 多物理场耦合

中图分类号: TV124 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460151

Numerical Simulation of Ice Cover Growth in Water Bodies Based on the Equivalent Heat Capacity Method

GUO Yaxun¹, LI Xing², ZHANG Qing¹

(1. School of Mechanics and Engineering Science, Hohai University,
Nanjing 211100, P.R.China;

2. College of Civil Engineering, Hexi University,
Zhangye, Gansu 734000, P.R.China)

(Contributed by ZHANG Qing, M.AMM Editorial Board)

Abstract: In cold regions, the formation of ice covers over water bodies during winter is a common phenomenon. The continuous growth of ice covers significantly impacts human activities, making it practically important to understand and predict ice growth behavior for the prevention of ice-related hazards. Ice cover growth is influenced by multiple factors, and the underlying mechanisms have not yet been fully elucidated. To investigate the complexity of ice cover growth, a finite element computational model was established, and the equivalent heat capacity method was employed to numerically simulate the ice growth process. The accuracy of the pro-

* 收稿日期: 2025-08-26; 修订日期: 2025-10-12

基金项目: 国家自然科学基金(12472200); 甘肃省高校教师创新基金(2025B-192)

作者简介: 郭雅勋(1997—), 男, 硕士生(E-mail: guo_yaxun2315@163.com);

章青(1963—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通信作者. E-mail: lxzhangqing@hhu.edu.cn).

引用格式: 郭雅勋, 李星, 章青. 基于等效热容法的水域冰盖生长过程的数值模拟[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(4): 404-414.

posed model and method was validated through comparison with experimental data. A comparative analysis was conducted between numerical results considering and neglecting natural convection. Furthermore, both the proposed method and the freezing degree-day method were applied to estimate the ice thickness at a specific cross section of the Songhua River. The root mean square errors of the 2 methods were provided, further confirming the effectiveness of the equivalent heat capacity method in real river environments. The results demonstrate that, the established computational model and the numerical approach can effectively represent physical processes such as heat transfer and fluid motion, and handle water-ice phase transition problems. This study provides an effective method for simulating ice cover growth under multi-physics coupling effects.

Key words: ice cover; growth process; numerical simulation; equivalent heat capacity method; multi-physics coupling

0 引 言

结冰是寒区水域冬季普遍出现的一种自然现象,冬季的河流、水库和湖泊常形成冰盖。冰盖的不断生长将导致水域的水力条件、热力条件和几何边界发生改变,并作为一种冬季特有的冰情现象对人类活动带来影响。随着全球气候变化的不断加剧,理解和预测冰盖的生长行为变得尤为重要,对工程防冻等领域具有重要的实际意义。

冰盖生长属于典型的相变传热问题^[1-2],其特点是固液两态的相界面位置未知且移动,并在相界面处伴有潜热的释放和吸收。在进行固液相变的热传导数值模拟时,需要将固液界面的演化作为解的一部分进行确定,亦称为“Stefan”问题,相应的数值求解方法主要有界面跟踪法和固定网格法。界面跟踪法使用移动网格数值方案来捕获固-液移动边界,将整个求解域在相变界面处划分为固相域和液相域分别求解。该方法需要在每一个时间步长下确定固-液两相界面的位置,并在相变界面上施加“Stefan”条件,求解不易实施,不适用于复杂的相变界面。秦妍和李维仲^[3]在研究冰柱绕流融化问题时,采用贴体坐标移动网格技术,虽然能较准确追踪界面位置,但网格重构过程易引发计算不稳定现象,且难以处理自然对流引起的相变界面非线性变化。吴兆春^[4]提出了一种基于移动网格的差分方法,用于追踪凝固或融化过程中的相变界面。尽管该方法在特定条件下与理论解吻合,但计算成本较高,且缺失对界面合并、分裂等拓扑变化的处理机制,在相变问题模拟中,精确地追踪相界面的位置和形状具有较大的挑战性。固定网格法使用固定网格方案,将求解域中固相和液相编写入一组控制方程进行求解,此类方法通过对控制方程中传输量的跃变来考虑相变过程,不需要跟踪固-液两相界面的位置,代表性方法有热焓法、显热容法和等效热容法等。

等效热容法是一种模拟相变传热问题的数值方法。该方法将相变过程中吸收或释放的潜热,等效转化为材料在相变温度附近一个窄小温度区间内很大的比热容,这样,相变过程就被“抹平”或“弥散”在这个温度区间内,不再需要显式追踪固-液相变界面,从而大大简化了数值求解难度^[5-8]。周业涛等^[9]研究证明,等效热容法构建全域统一的能量方程,结合热焓判据判断单元相变状态,能够准确计算得到相界面位置,且简便有效。对于含自然对流的相变问题(如冰盖下的水体流动),可将等效热容法与流体动力学方程耦合,周建辉^[10]采用修正等效热容法模拟氯化锂的凝固过程,通过变黏性系数处理糊状区阻力,并引入交错网格和 SIMPLER 算法求解流场压力。研究对比了纯导热含自然对流导热两种情形下凝固过程的差异,发现自然对流会显著影响固相分布均匀性和凝固时间。Moench 和 Dittrich^[11]在实验室内系统观测了石墨固-液相变的变化规律,并基于等效热容法建立了石墨相变的耦合模型,研究发现,当考虑相变材料液相的自然对流效应时,模拟结果更接近实际观测结果。

本文针对寒区水域冰盖生长这一特定的相变传热问题,考虑热传递与流体运动的耦合效应,构建了冰盖生长的多物理场有限元计算模型,采用等效热容法进行了水域冰盖生长过程的数值模拟。分析比较了自然对流的影响,并通过实际河流案例的观测数据,验证本文所建立计算模型和方法的有效性。

1 基本理论和计算方法

冰盖的形成始于水体表面因低温冻结成固态冰层。在此过程中,冰盖底部的低温水因密度增大而向下沉

降,同时底层相对较暖的水体在浮力作用下上涌,由此形成冰下热对流循环系统.这一现象本质上是多物理场耦合作用的结果:从相变热力学角度看,水-冰相变界面严格遵循相平衡条件,凝固潜热的释放需满足热动态平衡;从流体动力学角度,未冻结水体的自然对流(由温度梯度与密度差驱动)显著影响整体热输运效率.要完整描述这一过程,必须同时满足三大控制方程:能量守恒方程(包含相变潜热项)、Navier-Stokes 方程(描述流体运动)以及质量连续性方程.因此,冰盖生长是水体表面降温引发的、涉及相变热力学与流体动力学复杂相互作用的耦合过程,其核心科学问题是由表及里的渐进式相变传热问题和冰下对流传热问题.

1.1 基本假设

研究中,采用如下基本假设:① 相变材料的初始温度均匀一致;② 相变材料各向同性,并与外界无质量交换;③ 液相为不可压缩流体,作层流流动;④ 固相和液相的动力黏度、导热系数、比热容等物性参数不随温度的变化而变化;⑤ 满足 Boussinesq 假设,即在考虑流体密度变化的影响时,只保留密度变化对浮力的直接影响,而在控制方程其他所有项中将密度视为常数;⑥ 忽略因固液相变密度差造成的体积变化效应.

1.2 考虑相变潜热的热传导方程

采用等效热容法求解相变的热传导问题时,在整个计算区域内不用对相变材料的液相区和固相区分别建立控制方程,可以对整个计算区域内采用统一的热传导方程进行求解.其中,通过设定 0~1 之间的液相率 $\varphi(T)$ 表示相变随温度的变化, $\varphi(T)$ 为 0 时表示固相,介于 0~1 之间认为是固液两相区(糊状区),为 1 时代表液相,如图 1 所示.假设 $\varphi(T)$ 在相变区内呈线性分布,则 $\varphi(T)$ 可表示为^[12]

$$\varphi(T) = \begin{cases} 0, & T \leq T_{pc} - \frac{\Delta T_{pc}}{2}, \\ \frac{T - (T_{pc} - \Delta T_{pc}/2)}{\Delta T_{pc}}, & T_{pc} - \frac{\Delta T_{pc}}{2} < T \leq T_{pc} + \frac{\Delta T_{pc}}{2}, \\ 1, & T_{pc} + \frac{\Delta T_{pc}}{2} < T. \end{cases} \quad (1)$$

式中, T 为材料温度, T_{pc} 为材料相变温度, ΔT_{pc} 为相变温度区间.

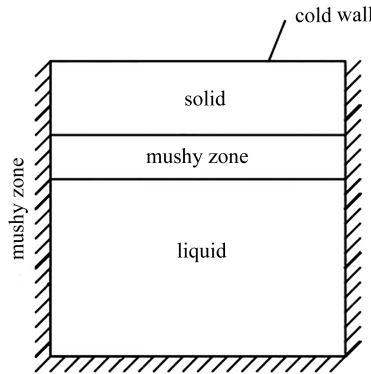


图 1 冰盖生长过程三相状态示意图

Fig. 1 Schematic diagram of 3 phase states during the ice sheet growth

基于液相率 $\varphi(T)$, 可将相变过程中材料分别处于固相、液相和固液两相时,材料的等效比热容 c_p (比热容是指单位质量的物质,温度升高或者降低 1 °C 时,所吸收或释放的能量;等效比热容 c_p 将相变材料在不同相区的比热容差异,通过液相率 $\varphi(T)$ 进行加权平均,从而可用一个连续函数来描述整个区域的比热容特性)、等效密度 ρ 、等效热传导系数 λ 统一表示为

$$\begin{cases} c_p = c_{p,s} + \varphi(T) \cdot (c_{p,l} - c_{p,s}), \\ \rho = \rho_s + (\rho_l - \rho_s) \cdot \varphi(T), \\ \lambda = \lambda_s + (\lambda_l - \lambda_s) \cdot \varphi(T), \end{cases} \quad (2)$$

式中, $c_{p,s}$ 和 $c_{p,l}$ 分别为固相和液相相变材料的比热容, ρ_s 和 ρ_l 分别为固相和液相相变材料的密度, λ_s 和 λ_l

分别为固相和液相相变材料的导热系数。

在相变过程中,系统与外界发生热能交换,这部分能量以潜热形式吸收或释放,称为相变潜热。为考虑相变潜热的影响,等效热容法将吸收或释放的相变潜热换算成固相线温度到液相线温度区间的附加热容。该方法通过引入一项与温度相关的等效比热容 c_{peff} ,将潜热的非线性影响纳入经典的热传导方程中,从而实现相变区能量变化的连续处理。考虑潜热影响的等效比热容 c_{peff} 包含材料本身的比热容和相变潜热所引起的附加比热容,表示为

$$c_{\text{peff}} = c_{p,s} + \varphi(T) \cdot (c_{p,l} - c_{p,s}) + L \cdot D(T), \quad (3)$$

式中,第三项为相变潜热引起的附加比热容项,其物理意义为在相变温度区间内,将潜热效应转化为表观热容的增量; L 为相变潜热, $D(T)$ 是以相变温度 T_{pc} 为中心的 Gauss 函数,通过调控相变温度区间 ΔT_{pc} 控制函数分布的宽度,从而合理描述潜热在相变温区内连续释放的行为,表示为^[11]

$$D(T) = \frac{e^{-(T-T_{\text{pc}})^2/(\Delta T_{\text{pc}}/4)^2}}{\sqrt{\pi}(\Delta T_{\text{pc}}/4)}. \quad (4)$$

综上,在等效热容法中考虑相变的热传导方程可用经典的对流传热方程表示为

$$\rho c_{\text{peff}} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_{\text{peff}} \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q, \quad (5)$$

式中, \mathbf{u} 为流体速度, Q 为内部热源。

1.3 运动方程与连续性方程

同样,引入液相率 $\varphi(T)$ 后,可以将系统的运动方程和连续性方程统一表示为

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] + \mathbf{F}_B - S(T)\mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (7)$$

式中, p 为压力, \mathbf{I} 为单位张量, μ 为动力黏度, \mathbf{F}_B 为浮力, $S(T)$ 为源项。

源项 $S(T)$ 的物理本质是通过液相率调控流动阻力,模拟相变过程中固相区域对流体流动的阻碍作用,从而描述固体区域无流动、液体区域自由流动的力学行为^[11],可定义为

$$S(T) = A_m \frac{(1 - \varphi(T))^2}{\varphi(T)^3 + \varepsilon}, \quad (8)$$

其中, ε 是一个很小的常数,以防止分母为零; A_m 是糊状区常数,单位为 $\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$,一般取 $10^4 \sim 10^7$,取值越高,材料凝固时速度回落越快,并易引起解的波动,既有研究表明^[11-12],将 A_m 设定在 10^5 量级附近,能够在此类问题上实现良好的性能,为在确保计算稳定性的同时兼顾求解效率,本文选用 $A_m = 10^5$;对于液相率为 1 的液体区域,源项 $S(T) = 0$,方程(7)退化为 Navier-Stokes 方程;固体区域和糊状区域的液相率 $\varphi(T) < 1$,这会导致源项 $S(T)$ 的值随着 $\varphi(T)$ 的减小而急剧增大,从而在固体区域阻止流体流动,在固相和液相之间的糊状区减少流动,提供从固态到液态的平滑过渡,模拟部分固相对流动的阻碍。

动力黏度 μ 可表示为

$$\mu = \mu_1 + S(T)\xi, \quad (9)$$

式中, μ_1 为液相的动力黏度, ξ 是一个辅助常数,其值为 1 m^2 ,用于调整量纲。

基于 Boussinesq 假设,浮力 \mathbf{F}_B 引起液相中的自然对流。浮力 \mathbf{F}_B 表示为

$$\mathbf{F}_B = -\rho_1 \beta \mathbf{g}(T - T_{\text{pc}}), \quad (10)$$

式中, β 为热膨胀系数, \mathbf{g} 为重力加速度。

2 冰盖生长过程的算例分析

在给定的温度条件下求解上述方程可以得到温度 T 和速度 \mathbf{u} ,通过式(1)可计算得到各点的液相率,进而可以实时反映物质的形态,从而实现冰盖生长界面的追踪。

本文选用有限元软件 COMSOL 进行冰盖生长过程的模拟计算。COMSOL 是基于有限元法的多物理场仿

真平台,通过求解偏微分方程系统模拟真实世界的复杂交互现象.COMSOL 软件中自带了许多的物理场模块,如固体力学模块、流体力学模块、热传导模块等,用户可以根据需求选择对应的模块进行多物理场耦合问题的求解。

在本文模拟中,基于 COMSOL 平台开展二维、瞬态研究,选用固体与流体传热模块及层流模块,结合多物理场求解模块进行模拟,温度、速度变量均采用一阶线性单元离散,采用全耦合方法,通过 Newton 迭代法求解控制方程以处理其非线性特性,并设置阻尼系数为 0.9 以稳定收敛.数值模拟流程如图 2 所示。

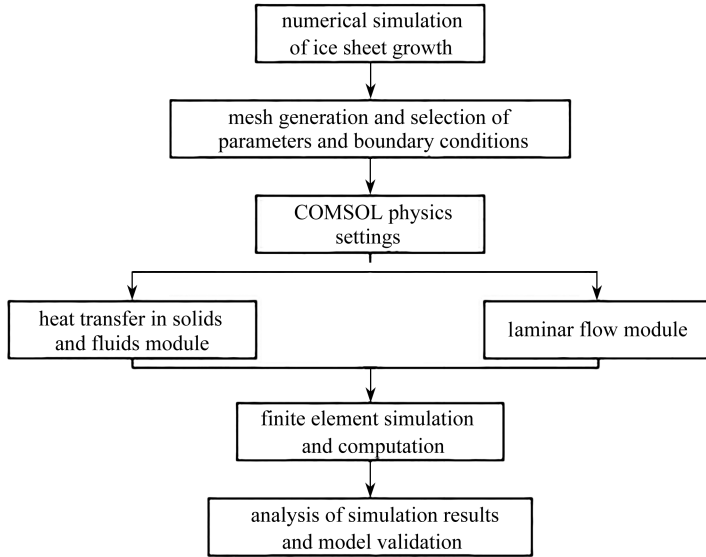


图 2 数值模拟流程

Fig. 2 Numerical simulation process

2.1 几何模型与有限元离散

为验证本文计算模型的有效性,对文献[13]中的冰盖生长实验进行了数值模拟,并对生长过程中及相关影响因素进行了对比分析.该实验在冷库中放置一个高 100 cm、宽 50 cm 的水槽,水槽四周用隔热泡沫包裹来隔绝水槽与周围的温度传递,保证水槽内水的降温主要来自上表面,以模拟天然水库水温受地温影响小的特性.实验时,水槽内装满初始温度为 5 °C 的水,冷库内空气的温度设定为恒定负温,定期观测冰盖的生长过程并记录冰层的厚度.根据上述实验的特点,本节建立如图 3 所示的二维计算模型,并结合前文所述的模拟方法来模拟实验中冷库气温设置为 -25 °C 时冰盖的生长过程,其中计算时间步长为 0.01 d,模拟时间总长与实验保持一致,为 7.2 d.

2.2 边界条件

计算采用的边界条件根据文献[13]中的实验条件进行确定.对于温度场,其底面和左右侧面均为绝热边界,上表面为恒温边界,水的初始温度为 5 °C.由于水体表面初始冰层形成所需的时间远小于冰盖生长的总时间,因此在计算中采用如下假设:上表面温度在整个模拟过程中均保持为恒定的冰表面温度值.已有研究表明,冰的表面温度与周边大气温度近似呈线性关系,本文采用以下关系式^[14]:

$$T_1 = 0.263\ 45T_a - 4.573\ 35, \quad (11)$$

其中, T_1 为冰表面温度, T_a 为冰面以上 1.5 m 处的大气温度。

根据式(11),当气温为 -25 °C 时,冰表面温度为 -11.159 6 °C.所以,本节模拟时将模型上表面温度设置为恒定的 -11.159 6 °C.

对于速度场,模型初始时处于静止状态,速度为 0.流体域四周均设置为无滑移刚性壁。

2.3 计算参数

计算参数依据文献[13]的实验数据选取,如表 1 所示。

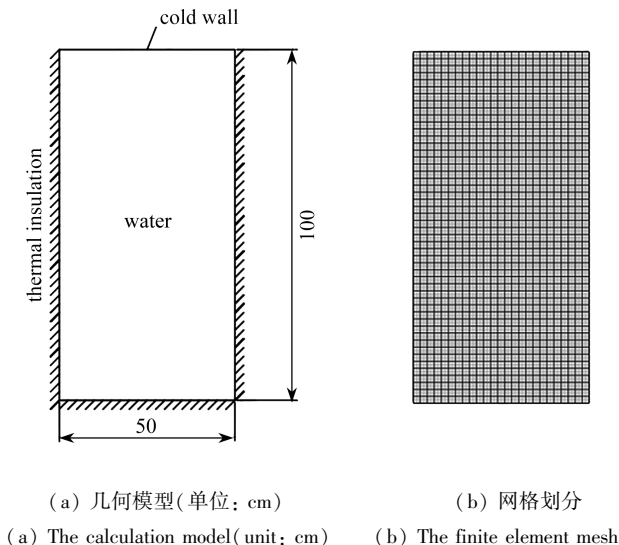


图 3 几何模型和网格划分

Fig. 3 The calculation model and the finite element mesh

表 1 计算参数

Table 1 Calculation parameters

parameter	value
specific heat capacity of ice $c_{p,s} / (J / (kg \cdot K))$	2 052
specific heat capacity of water $c_{p,l} / (J / (kg \cdot K))$	4 202
latent heat of phase change $L / (J / kg)$	3.35×10^5
dynamic viscosity $\eta / (Pa \cdot s)$	1.788×10^{-3}
phase change temperature $T_{pc} / ^\circ C$	0
thermal conductivity of ice $\lambda_s / (W / (m \cdot K))$	2.26
thermal conductivity of water $\lambda_l / (W / (m \cdot K))$	0.56
mushy zone constant $A_m / (kg / (m^3 \cdot s))$	10^5
coefficient of thermal expansion $\beta / (1 / K)$	10^{-7}
density of ice $\rho_s / (kg / m^3)$	917
density of water $\rho_l / (kg / m^3)$	1 000

相变温度区间的选择需要在精度和数值稳定性之间权衡。相变温度区间越小,模拟结果越接近于恒温相变,但也会导致求解时间的增加,且当相变温度区间过小时会导致相变材料在相变区域内等效热容的急剧增大,从而造成等效热容在数值上的不连续,给有限元计算带来困难;过大的相变温度区间则会把相变过程过度“模糊化”,导致计算出的相变界面过厚,凝固过程在时间和空间上被拉长,降低计算精度^[15-16]。综合考虑计算效率和精度,本文采用的相变温度区间为 2 K。

2.4 计算结果与分析

2.4.1 冰盖生长过程分析

图 4 给出了气温为 $-25\text{ }^\circ\text{C}$ 情况下,本文模拟得到的冰盖厚度与实测厚度的对比结果(h 为冰厚),总体来看,两者吻合良好。

图 5 给出了模拟冰盖生长过程中时间分别为 2 d, 4 d 和 6 d 时,固液相分布、温度和水流动速度的结果。其中,液相率 $\varphi = 0$ 表示冰, $\varphi = 1$ 表示水, φ 在 0~1 之间则代表冰水两相区,也即糊状区。由图 6(a)—6(c) 所示结果可以看出,由于上表面为恒定负温边界,负温自上而下传导,冰层时间的演化不断向下增厚,对应冰盖的生长过程。自然对流主要发生在液相接近于糊状区的部分,这是由于结冰释放潜热导致局部水温发生变化,温度差产生浮力,驱动水体内部的流动^[17]。随着时间的推移,冰盖生长逐渐放缓,与文献[18]观测到的冰盖生长规律一致。产生这种现象的原因在于冰盖增厚致使热阻增大,冰盖越厚,单位时间内通过冰层散失的

热量越小,使得冰生长所需的热量释放速率同步降低,从而导致冰盖生长速度的变慢^[19-20]。

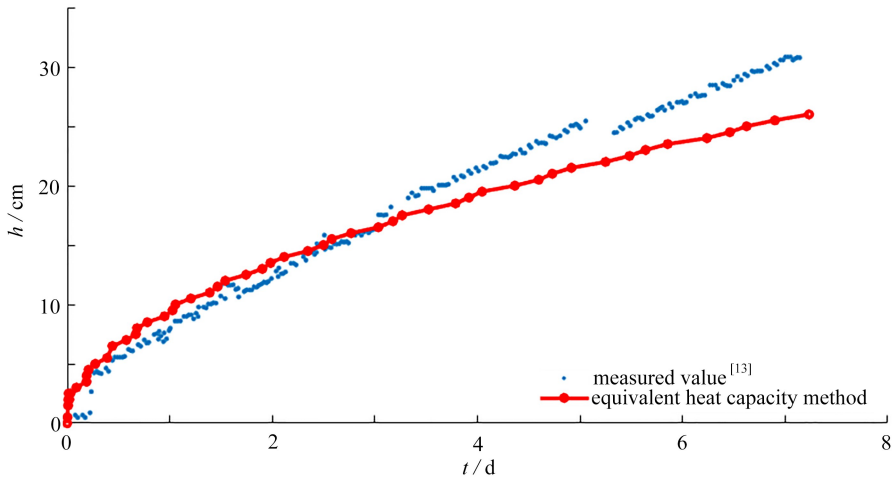


图4 冰厚实测值与等效热容法计算所得冰厚值的比较

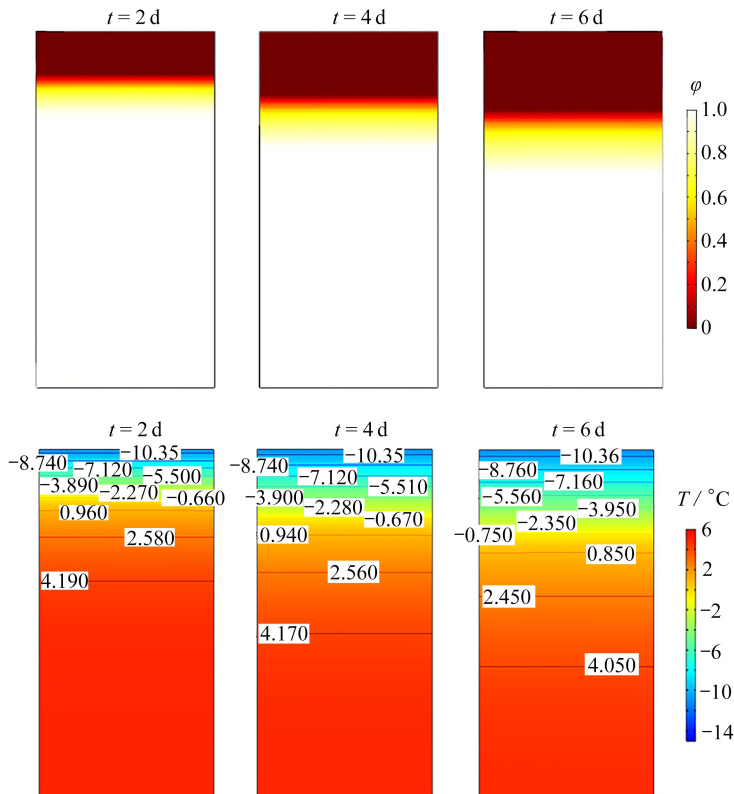
Fig. 4 Comparison between measured ice thicknesses and calculated ice thicknesses with the equivalent heat capacity method

2.4.2 自然对流的影响

在忽略自然对流的情况下,冰盖下方流体的流动可不予考虑,因此该问题的控制方程仅需保留热传导方程即可封闭求解.此时系统处于静止流体状态,速度场项消失,式(5)可简化为纯扩散方程.在此简化条件下,无需耦合求解运动方程与连续性方程,亦即无需对流体动力学部分进行建模.对比考虑自然对流的情况,后者必须耦合求解速度场与温度场,以捕捉浮力驱动流动及其对传热的作用.简化后的式(5)可表示为

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q. \quad (12)$$

参考文献[13]中试验气温为 $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ 的实验数据,计算模型的构建方法与前文相同,计算时间总长共23 d.考虑自然对流与忽略自然对流计算得到的冰厚结果如图6所示.



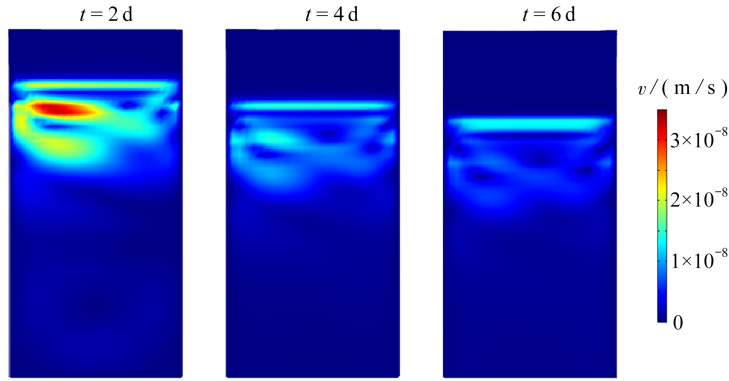


图 5 冰盖生长过程中的固液相分布、温度和流体流动速度

Fig. 5 Solid-liquid 2-phase distributions, temperature contours, fluid flow velocity contours during the ice sheet growth process

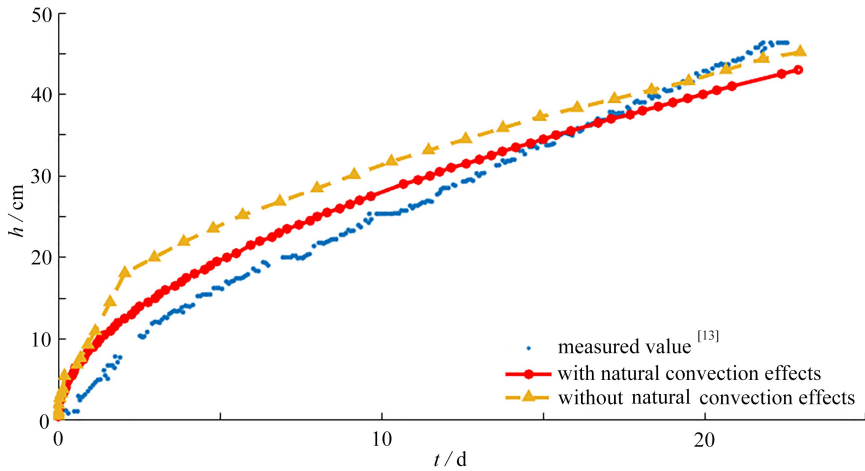


图 6 冰厚实测值与考虑自然对流和忽略自然对流计算所得冰厚值的比较

Fig. 6 Comparison of measured ice thickness versus calculated results with and without natural convection effects

从图 6 可以看出,与忽略自然对流的情况相比,考虑自然对流影响计算得到的冰厚值更接近实测结果。为了进一步分析计算结果与实测值的差异,分别考虑自然对流和忽略自然对流两种情况,计算了不同试验气温下的冰厚值,并求出计算值与实测值的均方根误差,如表 2 所示。

表 2 不同试验温度下的均方根误差

Table 2 Root mean square errors at different experimental temperatures

temperature/°C	with natural convection effects	without natural convection effects
-18	1.63	2.14
-20	2.99	5.57
-25	2.49	4.47
-30	0.64	0.96

从表 2 可以看出,对于各种试验气温,与忽略自然对流的情形相比,考虑自然对流均方根误差更小,准确度平均提高了 36.95%。这是由于液相区域的温度分布不仅受热传导影响,还会因自然对流而改变,对流会加速热量传递,使温度场趋于均匀^[21-22],也更为符合实际。

3 案例研究与讨论

河冰生长受多种因素影响,为研究封冻期热力因素对河冰厚度增长的影响规律,本文选取松花江干流大顶子山的河流断面^[23]进行了建模与计算分析。假设河流为静态水域,分别采用理想条件下冻冰度日法与本文方法计算河流中冰盖的厚度。冻冰度日法是一种用于冰厚计算的简化方法,在工程中应用较广,其计算公

式为^[13]

$$h = 1.720 5\sqrt{I}, \quad (13)$$

式中, h 为冰厚; I 为冻冰度日, 在理想条件下可简化为 $I = -T_a t$. 本研究中不同时间段的温度数据源自 2005 年 11—12 月大顶子山监测断面河冰封冻后的地面平均温度, 如表 3 所示.

表 3 2005 年 11—12 月大顶子山断面封冻后地面平均温度

Table 3 Average ground temperatures after freezing of the Dadingzi mountain section from november to december 2005

date	temperature/°C	date	temperature/°C
11-18	-7.5	12-03	-11.8
11-19	-6.3	12-04	-5.8
11-20	-3.6	12-05	-5.6
11-21	-4.4	12-06	-9.4
11-22	-4.0	12-07	-11.5
11-23	-3.7	12-08	-13.1
11-24	-6.5	12-09	-12.1
11-25	-3.7	12-10	-13.0
11-26	-6.8	12-11	-13.7
11-27	-8.7	12-12	-14.2
11-28	-8.4	12-13	-12.6
11-29	-11.3	12-14	-12.7
11-30	-10.1	12-15	-11.9
12-01	-11.6	12-16	-13.6
12-02	-13.3	12-17	-14.6

考虑到静冰生长是一个主要发生在垂直方向上多层热交换的过程, 在采用等效热容法计算时, 忽略水深和河道形状对冰盖生长的影响, 参考表 3 中的温度数据进行计算, 计算模型的构建与前文类似. 图 7 给出了大顶子山断面河冰冰厚的实测值与两种方法的计算值.

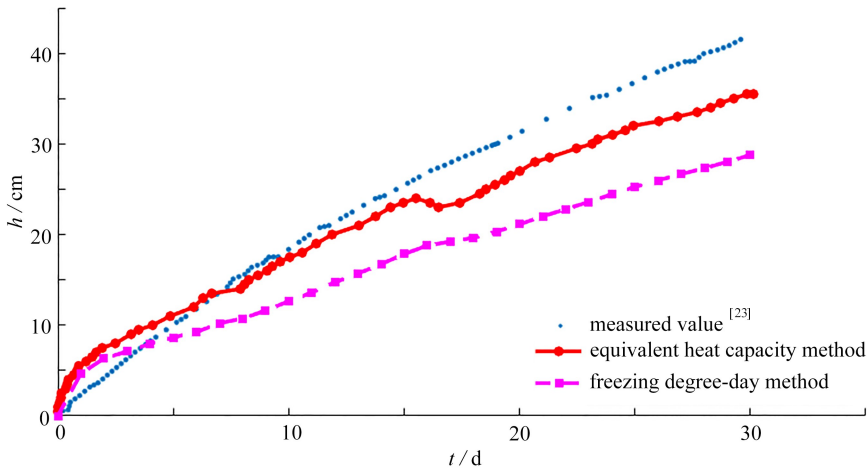


图 7 大顶子山断面河冰冰厚实测值和计算值的比较

Fig. 7 Comparison of measured and calculated ice thickness values at the Dadingzi mountain cross section

从图 7 可以看出, 等效热容法计算得到的冰厚值与实测值更为接近, 类似地, 表 4 也给出了两种方法所得结果与实测值的均方根误差.

表 4 不同方法计算大顶子山断面河冰冰厚的均方根误差

Table 4 Root mean square errors of river ice thicknesses calculated with different methods at the Dadingzi mountain cross section

method	equivalent heat capacity method	freezing degree-day method
RMSE/cm	4.92	8.05

表4中的结果表明了等效热容法对大顶子山断面冰厚的计算准确度要高于理想条件下的冻冰度日法,提高了38.88%。需要注意的是,本研究中假设河道水域处于静态并忽略水深和河道形状的影响,在实际的河道中,水体流动、水深变化和河道断面形态均会影响热通量及冰水界面的热交换过程,从而影响到冰盖生长,如何准确反映这些因素的效应,将值得进一步研究。

另外指出,冻冰度日法需要的参数少、简单易行,但该方法没有考虑温度以外的环境要素,难以反映冰盖生长过程的多物理场耦合效应和复杂的热边界条件。相比之下,等效热容法能够更好地反映非稳态热-力过程,实现热传递与流体运动的耦合,不仅适用于静态水域,也具备拓展至模拟动态河流冰盖生长过程的潜力,还可用于进行冰下流动与热反馈耦合作用问题的研究。

4 结 语

本文建立了冰盖生长的有限元计算模型,采用等效热容法进行了冰盖生长过程的数值模拟,研究了冰盖生长中气温与冰盖厚度的变化规律,并分析了自然对流的影响。还应用本文方法和冻冰度日法计算了松花江某断面河冰生长的冰盖厚度,并对两种方法的计算误差进行了比较,进一步证实了等效热容法用于实际河流冰盖厚度计算的有效性。

研究表明,在外部冷空气气温恒定的条件下,冰盖随着时间的推移逐渐生长,水体的降温速率随着冰盖增厚逐渐降低,冰盖厚度的增长速率也随之减少;在冰盖生长的过程中,自然对流对冰盖生长速率的作用明显,不能被忽略;等效热容法在实际河流环境中同样表现出较高的计算准确度。

参考文献(References):

- [1] STEFAN J. Über die theorie der eisbildung, insbesondere über die eisbildung im polarmeere[J]. *Annalen der Physik*, 1891, **278**(2): 269-286.
- [2] SHEN H T, CHIANG L A. Simulation of growth and decay of river icecover[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1984, **110**(7): 958-971.
- [3] 秦妍, 李维仲. 利用移动网格技术模拟冰融化过程中的传热问题[J]. 热科学与技术, 2005, **4**(3): 213-218. (QIN Yan, LI Weizhong. Numerical simulation on heat transfer in ice melting by using moving mesh method [J]. *Journal of Thermal Science and Technology*, 2005, **4**(3): 213-218. (in Chinese))
- [4] 吴兆春. 界面追踪法求解半空间双相 Stefan 问题[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2004, **20**(1): 59-62. (WU Zhaochun. An approach to semi-space two-phase Stefan problems by using interface-tracking and analysis method[J]. *Journal of Harbin University of Commerce (Sciences Edition)*, 2004, **20**(1): 59-62. (in Chinese))
- [5] NABAVI S F, GARMESTANI H. Multi-scale modeling of metallurgical phenomena in metal laser powder bed fusion additive manufacturing: a comprehensive review[J]. *Journal of Manufacturing Processes*, 2025, **150**: 610-644.
- [6] HU C, DI H, LIU X, et al. Large eddy simulation investigation of the effect of radiative heat transfer on the ignition progress in a model combustor[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024, **231**: 125822.
- [7] KOZAK Y. Close-contact melting of a vertical cylinder on an isothermal surface: modeling and investigation for a non-Newtonian Herschel-Bulkley fluid liquid-phase[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2024, **225**: 125378.
- [8] ZHAO H Y, WANG X, WU J, et al. An intelligent, solar-responsive, and thermally conductive phase-change system toward solar-thermal-electrical conversion featuring daytime blooming for solar energy harvesting and nighttime closing for thermal preservation[J]. *Advanced Functional Materials*, 2024, **34**(45): 2406236.
- [9] 周业涛, 关振群, 顾元宪. 求解相变传热问题的等效热容法[J]. 化工学报, 2004, **55**(9): 1428-1433. (ZHOU Yetao, GUAN Zhenqun, GU Yuanxian. Equivalent heat capacity method for solution of heat transfer with phase change[J]. *Journal of Chemical Industry and Engineering (China)*, 2004, **55**(9): 1428-1433. (in Chinese))

- [10] 周建辉. 高温固液相变蓄热器的结构设计和数值模拟[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2004. (ZHOU Jianhui. Structural design and numerical simulation for a high-temperature solid-liquid phase change thermal energy storage container[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2004. (in Chinese))
- [11] MOENCH S, DITTRICH R. Influence of natural convection and volume change on numerical simulation of phase change materials for latent heat storage[J]. *Energies*, 2022, **15**(8): 2746.
- [12] 潘艾刚, 王俊彪, 张贤杰. 基于等效热容法和焓法的相变传热数值分析[J]. 计算机仿真, 2014, **31**(2): 315-319. (PAN Aigang, WANG Junbiao, ZHANG Xianjie. Numerical analysis of phase-change heat transfer characteristics using effective heat capacity method and enthalpy method[J]. *Computer Simulation*, 2014, **31**(2): 315-319. (in Chinese))
- [13] 王昕. 不同种类冰的厚度计算原理和修正[D]. 大连: 大连理工大学, 2007. (WANG Xin. Ice thickness calculating principle and modifying of different ice types[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2007. (in Chinese))
- [14] 李得伦. 石蜡相变材料的传热与控温性能研究[D]. 广州: 华南理工大学, 2012. (LI Delun. Research on the heat transfer and thermal control performance of paraffin phase change material[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2012. (in Chinese))
- [15] 白乙拉, 李冰, 冯景山. 以气温为边界条件的水库冰盖厚度的数值模拟研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2012, **35**(2): 164-167. (BAI Yila, LI Bing, FENG Jingshan. Study on numerical simulation of growth in thickness of ice caps in reservoirs in the boundary condition of atmospheric temperature[J]. *Journal of Liaoning Normal University (Natural Science Edition)*, 2012, **35**(2): 164-167. (in Chinese))
- [16] 董兴聪. 相变传热问题数值分析的自适应四叉树-比例边界元方法[D]. 大连: 大连理工大学, 2019. (DONG Xingcong. Adaptive quadtree-scaled boundary finite element method for numerical analysis of heat transfer problems with phase change[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2019. (in Chinese))
- [17] 刘仍通, 潘阳. 自然对流影响结冰的数值模拟及实验研究[J]. 华东交通大学学报, 2010, **27**(5): 22-27. (LIU Rengtong, PAN Yang. Numerical simulation and experiment research of the impact of natural convection on ice formation[J]. *Journal of East China Jiaotong University*, 2010, **27**(5): 22-27. (in Chinese))
- [18] SHEN H T, YAPA P D. A unified degree-day method for river ice cover thickness simulation[J]. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 1985, **12**(1): 54-62.
- [19] 丁法龙, 茅泽育. 寒区水塘冰盖生长和消融分析[J]. 水利学报, 2021, **52**(3): 349-358. (DING Falong, MAO Zeyu. Ice cover growth-decay process of pond in cold region[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2021, **52**(3): 349-358. (in Chinese))
- [20] 冯景山, 白乙拉, 李冰. 寒区水库冰盖厚度增长数值模拟研究[J]. 渤海大学学报(自然科学版), 2011, **32**(1): 5-9. (FENG Jingshan, BAI Yila, LI Bing. Study on numerical simulation of growth in thickness of ice caps in reservoirs of cold regions[J]. *Journal of Bohai University (Natural Science Edition)*, 2011, **32**(1): 5-9. (in Chinese))
- [21] LIN L, YANG D, LUO Z, et al. Numerical study on melting and heat transfer characteristics of vertical cylindrical PCM with a focus on the solid-liquid interface heat transferrate[J]. *Journal of Energy Storage*, 2023, **72**: 108370.
- [22] VAKILZADEH A H, SARVESTANI A B, JAVAHERDEH K, et al. Heat transfer and fluid flow in a PCM-filled enclosure: effect of heated wall configuration[J]. *Journal of Energy Storage*, 2024, **87**: 111448.
- [23] 李志军, 孙万光, 许士国, 等. 短期水文气象资料估算哈尔滨至同江冰厚度[J]. 水科学进展, 2009, **20**(3): 428-433. (LI Zhijun, SUN Wanguang, XU Shiguo, et al. Calculating river ice thickness from Harbin to Tongjiang using short-term hydrological and meteorological data[J]. *Advances in Water Science*, 2009, **20**(3): 428-433. (in Chinese))