

复分析在三维断裂和接触问题积分计算中的应用*

李翔宇, 周德龙, 袁江宏

(西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 611756)

(本刊编委李翔宇来稿)

摘要: 本文旨在利用复分析计算现代势理论方法基础理论中的两个典型积分. 在高等数学框架下, 这些定积分较难计算, 它们通常作为结论直接应用于三维断裂和接触问题中. 综合利用复分析中的留数定理、大圆弧引理和小圆弧引理, 获得定积分的显式表达式. 该工作进一步完善了三维断裂和接触问题的理论基础, 彰显了复分析在计算定积分方面的独特优势.

关键词: 复分析; 现代势理论方法; 定积分; 断裂; 接触

中图分类号: O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460228

Applications of Complex Analysis in Integral Calculation for 3D Fracture and Contact Problems

LI Xiangyu, ZHOU Delong, YUAN Jianghong

(School of Mechanics and Aerospace, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 611756, P.R.China)

(Contributed by LI Xiangyu, M.AMM Editorial Board)

Abstract: Two typical definite integrals are calculated with the method of modern potential theory by virtue of complex analysis. In the context of calculus, the integrals in consideration are difficult to calculate and are usually directly applied as established results in fracture and contact problems. However, they may be expressed explicitly by means of the residue theorem, the infinite arc lemma and the infinitesimal arc lemma in the context of complex analysis. This work perfects the theoretical fundamentals of 3D fracture and contact problems, and further demonstrates the intrinsic advantages of complex analysis in calculation of definite integrals.

Key words: complex analysis; method of modern potential theory; definite integral; fracture; contact

0 引 言

复分析作为处理弹性力学平面问题的有力数学工具, 借助复势函数^[1-3]与保角变换^[4-5]等方法, 在平面断裂与接触问题的解析求解中具有重要作用. 势理论作为调和分析的重要分支, 是求解 Laplace 方程的重要

* 收稿日期: 2025-12-16; 修订日期: 2025-12-20

基金项目: 中国交通教育研究会交通教育科学研究重点课题 (JT2024ZD051); 四川省研究生教育教学改革重点项目 (YJGXM24-B003); 四川省高等教育人才培养质量和教学改革重点项目 (JG2024-0265)

作者简介: 李翔宇 (1979—), 男, 教授, 博士, 博士生导师 (通信作者. E-mail: lixiangyu@swjtu.edu.cn).

引用格式: 李翔宇, 周德龙, 袁江宏. 复分析在三维断裂和接触问题积分计算中的应用 [J]. 应用数学和力学, 2026, 47(4): 496-504.

工具^[6].自1980年代 Fabrikant 提出现代势理论方法以来^[7-8],该方法已成为处理三维非轴对称弹性力学问题的有效手段.关于现代势理论方法在三维断裂力学与接触力学中的应用,有兴趣的读者可参考综述文献^[9-10].

本文主要针对三维断裂和接触问题中的两个典型积分,它们在高等数学框架下较难计算.虽然可以利用积分手册查出积分结果,但是积分手册没有给出求解步骤.本文综合利用复分析中的留数定理、小圆弧引理和大圆弧引理,详尽地给出了求解步骤,巧妙地得到积分结果,为三维弹性力学求解框架中复分析工具的应用提供了具体算例与参考.

1 多值函数的积分

Fabrikant 现代势理论方法的核心思想是将 Euclid 空间中两点 $(\rho, \phi, 0)$ 和 $(\rho_0, \phi_0, 0)$ 之间距离倒数的 $1 + \mu$ 次幂表示为如下积分^[7]

$$\frac{1}{R^{1+\mu}} = \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi\mu}{2} \right) \int_0^{\min(\rho, \rho_0)} \frac{\lambda(x^2/(\rho\rho_0), \phi - \phi_0) x^\mu}{[(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)]^{(1+\mu)/2}} dx, \quad -1 < \mu < 1, \quad (1)$$

其中 $R = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\phi - \phi_0)}$. 对于 Gibson 地基等幂律梯度材料半空间在 $(\rho_0, \phi_0, 0)$ 处作用单位集中力,弹性半空间的竖向位移基本解正比于 $1/R^{1+\mu}$. 因此, $1/R^{1+\mu}$ 作为核函数出现在非均匀材料半空间断裂和接触问题相应的微分-积分方程和积分方程中^[11-12]. 当 $\mu = 0$ 时, R 代表两点间距离,问题则退化为均匀材料的混合边值问题. $\lambda(\cdot, \cdot)$ 为 Poisson 核也称为边界影响函数,有

$$\lambda(k, \psi) = \frac{1 - k^2}{1 + k^2 - 2k \cos \psi}. \quad (2)$$

该函数代表着在单位圆盘边界 $r = 1$, 极角 ϕ 处作用点热源或点电荷,在圆盘内部点 (k, ϕ_0) 处引起的温度或电势.

在 Fabrikant 的专著^[7]中,关于式(1)的证明仅给出了中间步骤,即利用换元法

$$\eta(x) = \sqrt{(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)}/x, \quad (3)$$

当 $x = \min(\rho_0, \rho)$ 时, $\eta = 0$; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\eta \rightarrow \infty$. 通过引入变量 η , 将一个依赖于空间参数 ρ_0 和 ρ 的有限区间转化为一个标准的、参数无关的半无穷区间积分形式,便于进行后续围道积分. 将 η 作为积分变量进行变量替换,得到

$$dx = \frac{x^3 \eta}{x^4 - \rho^2 \rho_0^2} d\eta, \quad \lambda\left(\frac{x^2}{\rho\rho_0}, \phi - \phi_0\right) = -\frac{x\eta}{R^2 + \eta^2} \frac{d\eta}{dx}. \quad (4)$$

将式(4)代入式(1),则式(1)右端可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi\mu}{2} \right) \int_0^{\min(\rho, \rho_0)} \frac{\lambda(x^2/(\rho\rho_0), \phi - \phi_0) x^\mu}{[(\rho^2 - x^2)(\rho_0^2 - x^2)]^{(1+\mu)/2}} dx = \\ & \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi\mu}{2} \right) \int_0^\infty \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

若要证明式(1)成立,即需证明下式成立:

$$\frac{1}{R^{1+\mu}} = \frac{2}{\pi} \left(\cos \frac{\pi\mu}{2} \right) \int_0^\infty \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta, \quad -1 < \mu < 1. \quad (6)$$

证明式(6)成立的关键是计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta. \quad (7)$$

在微积分框架下,该积分较难算出.但我们可利用复分析中留数定理这一有力的工具来达成目标.为此,

考虑如下围道积分:

$$\oint_C \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz, \quad (8)$$

其中 $z^{-\mu} = (\eta + i\varepsilon)^{-\mu}$ 为定义在复平面上的多值函数, $i = \sqrt{-1}$; 围道 C 为积分路径, 由逆时针方向的大圆弧 C_{R_0} ($|z| = R_0, 0 \leq \arg z < 2\pi$)、顺时针方向的小圆弧 C_δ ($|z| = \delta, 0 \leq \arg z < 2\pi$)、有向线段 $(\delta, 0) \rightarrow (R_0, 0)$ 和 $(R_0, 0) \rightarrow (\delta, 0)$ 组成, 如图 1 所示.

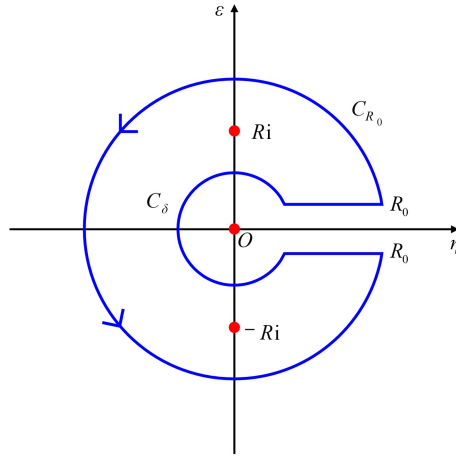


图 1 式(8)对应的复平面、围道积分路径和奇点示意图

Fig. 1 The schematic diagram of the complex plane, the contour integral path and the singularities of the integrand in eq.(8)

注意到 $z^{-\mu}$ 为多值函数, 式(8)可以转化为

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz &= \int_\delta^{R_0} \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta + \int_{C_{R_0}} \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz + \\ &\int_{R_0}^\delta \frac{(\eta e^{i2\pi})^{-\mu}}{R^2 + (\eta e^{i2\pi})^2} d\eta + \int_{C_\delta} \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz. \end{aligned} \quad (9)$$

合并同类项, 式(9)可简化为

$$\oint_C \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz = (1 - e^{-i2\pi\mu}) \int_\delta^{R_0} \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta + \int_{C_{R_0}} \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz + \int_{C_\delta} \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz. \quad (10)$$

若 $\delta < R < R_0$, 在围道 C 内有两个单极点 $z_{1,2} = \pm Ri$. 相应的留数分别为

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2}, Ri\right) = \frac{1}{2iR^{1+\mu}} e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}, \quad (11)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2}, -Ri\right) = -\frac{1}{2iR^{1+\mu}} e^{-i\frac{3\pi}{2}\mu}. \quad (12)$$

由留数定理^[13]知

$$\oint_C \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2}, Ri\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2}, -Ri\right) \right], \quad (13)$$

将式(11)和(12)代入式(13)可得到

$$\oint_C \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{R^{1+\mu}} (e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} - e^{-i\frac{3\pi}{2}\mu}). \quad (14)$$

由于被积函数具有如下性质:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(z \cdot \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^{1-\mu}}{R^2 + z^2} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \cdot \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^{1-\mu}}{R^2 + z^2} = 0. \quad (15)$$

分别根据小圆弧引理和大圆弧引理^[13]可得

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{C_{R_0}} \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz = 0. \quad (16)$$

在式(10)两端同时令 $R_0 \rightarrow \infty$ 且 $\delta \rightarrow 0$ 并利用式(16)可得

$$\oint_C \frac{z^{-\mu}}{R^2 + z^2} dz = (1 - e^{-i2\pi\mu}) \int_0^\infty \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta. \quad (17)$$

联合式(14)和(17)可得

$$(1 - e^{-i2\pi\mu}) \int_0^\infty \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta = \frac{\pi}{R^{1+\mu}} (e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} - e^{-i\frac{3\pi}{2}\mu}). \quad (18)$$

两端同乘 $e^{i\pi\mu}$, 并利用 Euler 公式可得

$$\sin(\pi\mu) \int_0^\infty \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta = \frac{\pi}{R^{1+\mu}} \sin \frac{\pi\mu}{2}. \quad (19)$$

利用倍角公式,式(19)可简化为

$$\frac{1}{R^{1+\mu}} = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi\mu}{2} \int_0^\infty \frac{\eta^{-\mu}}{R^2 + \eta^2} d\eta. \quad (20)$$

得证.

2 含三角函数有理式的积分

试证明

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - k^2}{1 - 2k\cos\theta + k^2} d\theta = 1, \quad 0 \leq k < 1. \quad (21)$$

该结论在断裂力学和接触力学问题中经常遇到,例如,在三维弹性力学框架内,计算受均布载荷作用下币状裂纹的张开位移时,需要运用式(21)的结果^[7].在稳态热弹性场中,求解无限大介质内币状裂纹在裂纹面上的法向应力,同样需要式(21)的帮助^[14].此外,在多铁性复合材料的接触问题中,式(21)被应用于求解广义应力分量、总接触力、总电荷量和总磁通量^[15].

运用复分析中的留数定理,很容易计算出式(21)中的积分.若设 $z = e^{i\theta}$ 利用 Euler 公式可得

$$\cos\theta = \frac{1 + z^2}{2z}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}. \quad (22)$$

将式(22)代入式(21)左端(以后用符号 I 表示),原积分可转化为复平面上围道为单位圆的复变积分.当实变数 θ 从 0 变化到 2π 时,对应的复变数 $z = e^{i\theta}$ 从起点 $z = 1$ 出发,沿单位圆 $|z| = 1$ 逆时针绕行一周后返回 $z = 1$.由此,实变定积分转化为如图 2 所示的复变围道积分

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - k^2}{1 - 2k\cos\theta + k^2} d\theta = \frac{1 - k^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{1 + k^2 - k(1 + z^2)/z} \frac{dz}{z}. \quad (23)$$

式(23)化简可得

$$I = -\frac{1 - k^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z - k)(kz - 1)} dz. \quad (24)$$

显然被积函数有两个单极点 $z_1 = k < 1$, $z_2 = 1/k > 1$.围道内仅有一个极点 $z_1 = k$, 且留数为

$$\text{Res}\left[\frac{1}{(z - k)(kz - 1)}, k\right] = \frac{1}{k^2 - 1}. \quad (25)$$

由留数定理可得

$$I = -\frac{1 - k^2}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}\left[\frac{1}{(z - k)(kz - 1)}, k\right]. \quad (26)$$

将式(25)代入式(26)即可证明式(21)成立.

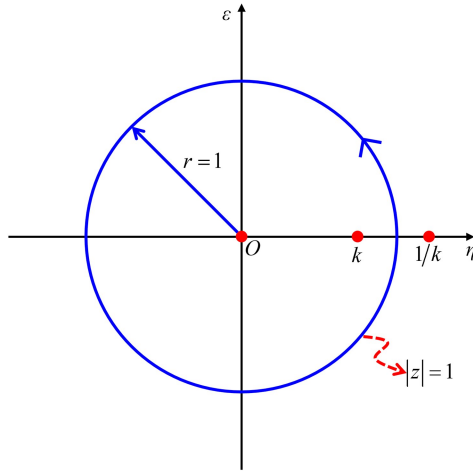


图2 围道为单位圆的复变积分(式(24))示意图

Fig. 2 The schematic diagram of the complex integral of the unit circular contour (eq. (24))

3 解的一致性

式(6)和(21)中的积分也可以通过查阅积分手册^[16]而得到积分结果.这里通过对比本文解和积分手册中的结果,来验证解的有效性.

积分手册 3.241.2 项给出如下结果(该结果同样可采用复分析方法证明得到,具体过程见附录 A):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\alpha}} dx = \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{cosec} \frac{\beta\pi}{\alpha}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0, \quad (27)$$

其中 $\operatorname{Re}(\cdot)$ 为变量的实部.若在式(27)中令 $\alpha = 2$ 且 $\beta = 1 - \mu$ ($-1 < \mu < 1$), 此时条件 $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$ 成立.于是,由式(27)可得

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\mu}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \frac{(1-\mu)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos(\mu\pi/2)}. \quad (28)$$

在式(6)中令 $\eta = Rx$ 可得

$$\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi\mu}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\mu}}{1+x^2} dx = 1, \quad (29)$$

它与式(28)一致.

积分手册 3.613.2 项给出如下结果(该结果同样可采用复分析方法证明得到,具体过程见附录 B)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1-2a\cos x + a^2} dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2} \quad (a^2 < 1, n \geq 0). \quad (30)$$

令 $n = 0$ 且 $k = a$, 上式转化为

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1-2k\cos x + k^2} dx = \frac{\pi}{1-k^2}. \quad (31)$$

由对称性可知

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2k\cos x + k^2} dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{1-2k\cos x + k^2} dx. \quad (32)$$

由式(31)和(32)得

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2k\cos x + k^2} dx = \frac{2\pi}{1-k^2}, \quad (33)$$

这与式(21)一致.

4 结 论

本文利用复分析中留数定理这一强大的工具计算了现代势理论方法中求解断裂和接触问题的两个典型积分,所得结果与积分手册^[16]中的结果一致.本文结果进一步夯实了现代势理论方法基本理论的基础,丰富了弹性力学和数学物理方法的教学内容.

复分析方法在三维弹性力学问题中的应用,不仅限于文中所示的两类积分,还具有较强的推广潜力.该方法可进一步拓展至其他类型的高阶奇异积分或三维断裂和接触问题中.此类解析解可用于验证边界元法和有限元法等数值方法的准确性.将实数域具有较高挑战性的积分(例如,奇异积分、瑕积分)通过复分析转化为复平面上的围道积分,获得显式表达式,从而明晰函数依赖关系.本文获得的积分表达式可嵌入 Mathematica 和 Maple 等数值计算软件中,进一步提升这些软件处理复杂问题的能力.未来在多场耦合力学、多孔介质力学等复杂三维边值问题中,复分析方法将展现出更广阔的应用前景.

附 录 A

证明:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{1+x^\alpha} dx = \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{cosec} \frac{\beta\pi}{\alpha}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0. \tag{A1}$$

令 $x^\alpha = t$, 则式(A1)可转化为

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}}{1+x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{t^{\beta/\alpha-1}}{1+t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{1+t} dt. \tag{A2}$$

构建如下围道积分

$$\oint_C \frac{z^{k-1}}{z+1} dz, \tag{A3}$$

其中 $z^{k-1} = (x+iy)^{k-1}$ 为定义在复平面上的多值函数, $i = \sqrt{-1}$, $k = \alpha/\beta \in (0, 1)$; 围道 C 为积分路径, 由逆时针方向的大圆弧 C_{R_0} ($|z| = R_0, 0 \leq \arg z < 2\pi$)、顺时针方向的小圆弧 C_δ ($|z| = \delta, 0 \leq \arg z < 2\pi$)、有向线段 $(\delta, 0) \rightarrow (R_0, 0)$ 和 $(R_0, 0) \rightarrow (\delta, 0)$ 组成, 如图 A1 所示.

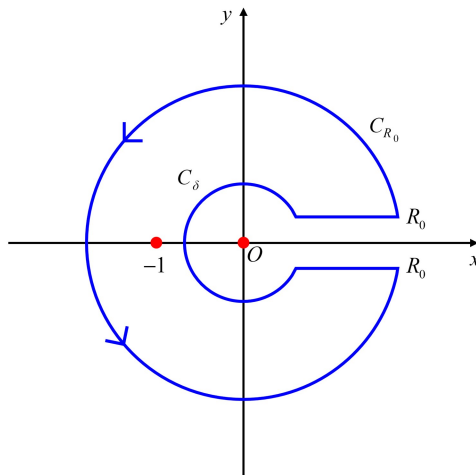


图 A1 式(A3)对应的复平面、围道积分路径和奇点示意图

Fig. A1 The schematic diagram of the complex plane, the contour integral path and the singularity of the integrand in eq.(A3)

注意到 z^{k-1} 为多值函数, 式(A3)可以转化为

$$\oint_C \frac{z^{k-1}}{z+1} dz = \int_{\delta}^{R_0} \frac{x^{k-1}}{x+1} dx + \int_{C_{R_0}} \frac{z^{k-1}}{z+1} dz + \int_{R_0}^{\delta} \frac{(xe^{i2\pi})^{k-1}}{xe^{i2\pi}+1} dx + \int_{C_{\delta}} \frac{z^{k-1}}{z+1} dz =$$

$$(1 - e^{i2\pi k}) \int_{\delta}^{R_0} \frac{x^{k-1}}{x+1} dx + \int_{C_{R_0}} \frac{z^{k-1}}{z+1} dz + \int_{C_{\delta}} \frac{z^{k-1}}{z+1} dz. \quad (\text{A4})$$

若 $\delta < R < R_0$, 在围道 C 内有一个单极点 $z_0 = -1$, 由留数定理得

$$\oint_C \frac{z^{k-1}}{z+1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^{k-1}}{z+1}, -1\right) = 2\pi i (-1)^{k-1} = -2\pi i e^{i\pi k}. \quad (\text{A5})$$

由于被积函数具有如下性质:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(z \cdot \frac{z^{k-1}}{z+1}\right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^k}{z+1} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \cdot \frac{z^{k-1}}{z+1}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^k}{z+1} = 0. \quad (\text{A6})$$

分别根据小圆弧引理和大圆弧引理可得

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\delta}} \frac{z^{k-1}}{z+1} dz = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{C_{R_0}} \frac{z^{k-1}}{z+1} dz = 0. \quad (\text{A7})$$

在式(A4)两端同时令 $R_0 \rightarrow \infty$ 且 $\delta \rightarrow 0$ 并利用式(A7)可得

$$\oint_C \frac{z^{k-1}}{z+1} dz = (1 - e^{i2\pi k}) \int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x+1} dx. \quad (\text{A8})$$

联合式(A5)和式(A8)可得

$$(1 - e^{i2\pi k}) \int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x+1} dx = -2\pi i e^{i\pi k}. \quad (\text{A9})$$

两端同乘 $e^{-i\pi k}$, 并利用 Euler 公式可得

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(k\pi)} = \pi \operatorname{cosec}(k\pi). \quad (\text{A10})$$

将式(A10)代入式(A2)可得

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\alpha}} dx = \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{cosec} \frac{\beta\pi}{\alpha}, \quad (\text{A11})$$

得证.

附录 B

证明:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1-2a\cos x+a^2} dx = \frac{\pi a^n}{1-a^2} \quad (a^2 < 1, n \geq 0). \quad (\text{B1})$$

由于被积函数 $g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{1-2a\cos x+a^2}$ 为偶函数, 所以 $\int_0^{\pi} g_n(x) dx = \int_{-\pi}^0 g_n(x) dx$, 因而

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1-2a\cos x+a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1-2a\cos x+a^2} dx. \quad (\text{B2})$$

根据 Euler 公式, $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$, 可将上述积分转化为

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1-2a\cos x+a^2} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{1-2a\cos x+a^2} dx - i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{1-2a\cos x+a^2} dx \right]. \quad (\text{B3})$$

因为虚部 $h_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1-2a\cos x+a^2}$ 为奇函数, 在对称区间积分为 0, 故有

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{1-2a\cos x+a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx}}{1-2a\cos x+a^2} dx. \quad (\text{B4})$$

设 $z = e^{ix}$, 则

$$\cos x = \frac{1+z^2}{2z}, \quad dx = \frac{dz}{iz}, \quad e^{inx} = z^n. \quad (\text{B5})$$

将式(B5)代入式(B4)右端(以下记作 I_n), 原积分可转化为复平面上围道为单位圆的复变积分, 如图 B1 所示.

当实变数 x 从 0 变化到 2π 时,对应的复变数 $z = e^{ix}$ 从起点 $z = 1$ 出发,沿单位圆 $|z| = 1$ 逆时针绕行一周后返回 $z = 1$. 由此,实变定积分转化为如图 B1 所示的复变围道积分:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{1 - 2a\cos x + a^2} dx = -\frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{(az-1)(z-a)} dz. \quad (\text{B6})$$

显然被积函数有两个单极点 $z_1 = a, z_2 = 1/a$. 因 $|a| < 1$, 则 $z_2 = 1/a$ 在单位圆外,因此围道内仅有一个极点 $z_1 = a$, 其留数为

$$\text{Res} \left[\frac{z^n}{(az-1)(z-a)}, a \right] = \frac{a^n}{a^2-1}, \quad (\text{B7})$$

由留数定理可得

$$I_n = -\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \text{Res} \left[\frac{z^n}{(az-1)(z-a)}, a \right] = \frac{\pi a^n}{1-a^2}, \quad (\text{B8})$$

即式(B1)成立.

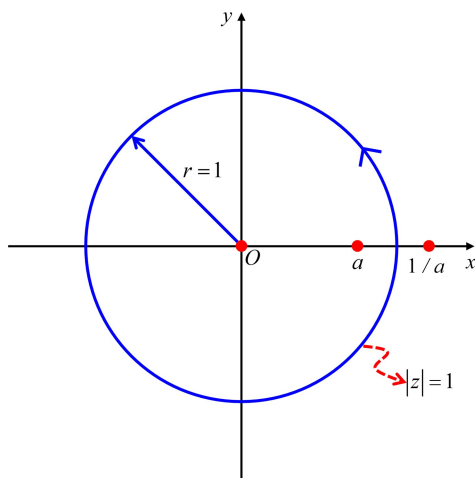


图 B1 围道为单位圆的复变积分(式(B6))示意图

Fig. B1 The schematic diagram of the complex integral of the unit circular contour (eq.(B6))

参考文献 (References):

- [1] MUSKHELISHVILI N I, RADOK J R M. *Singular Integral Equations: Boundary Problems of Function Theory and Their Application to Mathematical Physics* [M]. North Chelmsford, MA: Courier Corporation, 2008: 282-321.
- [2] STEVENSON A C. Complex potentials in two-dimensional elasticity[J]. *Proceedings of the Royal Society of London (Series A): Mathematical and Physical Sciences*, 1945, **184**(997): 129-179.
- [3] BI S F, CUI X T, HUANG Y, et al. Analytical solution for the stress fields of a hypocycloidal hole with two radial cracks in an infinite plate[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2025, **321**: 111134.
- [4] MUSKHELISHVILI N I, RADOK J R M. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* [M]. Groningen: P Noordhoff, 1953: 176-194.
- [5] GUO J H, LU Z X. Anti-plane analysis of multiple cracks originating from a circular hole in a magnetoelastic solid[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(14/15): 1847-1856.
- [6] KELLOGG O D. *Foundations of Potential Theory* [M]. Berlin: J Springer, 1929: 121-206.
- [7] FABRIKANT V I. *Applications of Potential Theory in Mechanics: a Selection of New Results* [M]. Dordrecht Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1989: 227-448.
- [8] FABRIKANT V I. *Mixed Boundary Value Problems of Potential Theory and Their Applications in Engineering* [M]. Dordrecht Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991: 270-367.

- [9] CHEN W Q, ZHU J, LI X Y. General solutions for elasticity of transversely isotropic materials with thermal and other effects: a review[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2019, **42**(1): 90-106.
- [10] CHEN W Q, DING H J. Potential theory method for 3D crack and contact problems of multi-field coupled media: a survey[J]. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2004, **5**(9): 1009-1021.
- [11] LI X Y, CHEN W Q, WANG H Y, et al. Crack tip plasticity of a penny-shaped Dugdale crack in a power-law graded elastic infinite medium[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2012, **88**: 1-14.
- [12] CHEN S H, YAN C, ZHANG P, et al. Mechanics of adhesive contact on a power-law graded elastic half-space [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2009, **57**(9): 1437-1448.
- [13] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法[M]. 3版. 北京: 北京大学出版社, 2019: 84-102. (WU Chongshi, GAO Chunyuan. *Methods of Mathematical Physics* [M]. 3rd ed. Beijing: Peking University Press, 2019: 84-102. (in Chinese))
- [14] LI X Y, LI P D, KANG G Z, et al. Steady-state thermo-elastic field in an infinite medium weakened by a penny-shaped crack: complete and exact solutions[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, **84**: 167-182.
- [15] WU F, LI X Y, CHEN W Q, et al. Indentation on a transversely isotropic half-space of multiferroic composite medium with a circular contact region[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2018, **123**: 236-289.
- [16] GRADSHTEYN I S, RYZHIK I M. *Table of Integrals, Series, and Products* [M]. 8th ed. Academic Press, 2014: 324-393.