

# 一类 Fermi 气体光晶格非线性机制的 轨线研究\*

史娟荣<sup>1</sup>, 朱敏<sup>2</sup>, 莫嘉琪<sup>2</sup>

(1. 安徽机电职业技术学院, 安徽 芜湖 241002;  
2. 安徽师范大学 数学系, 安徽 芜湖 241003)

**摘要:** 研究了一类 Fermi 气体光晶格轨线的非线性扰动模型. 首先求得了 Fermi 气体光晶格在无扰动情形下模型轨线的精确解. 然后引入一组广义泛函分析同伦映射, 构造一组迭代系统, 得到了 Fermi 气体光晶格非线性扰动模型轨线的任意次渐近解. 最后讨论了一个微扰系统. 该文在方法上可较方便地得到轨线的渐近表示式.

**关键词:** 扰动; 轨线; 泛函

**中图分类号:** O414

**文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.370046

## 引 言

激光冷却技术使 Bose-Einstein 凝聚 (BEC) 理论得到很大的发展<sup>[1]</sup>. 近来, 国内外学者在冷原子研究中对光晶格超流 Fermi 气体和它的凝聚体的动力学特性做了较多的讨论, 包括量子相变, 波的干涉和演化, Josephson 效应, 利用 Feshbach 共振技术控制光晶格特性、调节原子间的相互作用, 光晶格中 Fermi 气体 BCS 和 BEC 间过渡的稳定性和隧穿性态, Bloch 振荡, 超流-绝缘的相变, 通过相平面的分析和周期性的调制研究 BCS-unitarity 跨越区的一些现象等<sup>[2-15]</sup>. Landau-Zener 隧穿效应是超流 Fermi 凝聚体一个很有意义的量子现象, 它是描述在外场驱动下系统相邻能级间的量子隧穿. 这样的隧穿普遍地存在于各类系统中, 并具有十分广泛的应用价值. 而双势阱又为研究这种隧穿现象提供了良好的效果. 包括非线性振荡、强耦合周期驱动、自俘获现象和阱间的 Landau-Zener 隧穿现象等<sup>[11]</sup>. 近来一些学者还利用非线性动力学的解析理论来研究一类 Fermi 气体光晶格扰动系统模型, 并求得了渐近解, 从而可得到其他有关物理量更广泛的性态. 莫嘉琪等利用非线性渐近解析方法研究了有关的非线性物理问题<sup>[16-31]</sup>. 本文利用一个简单而有效的方法得到了一类 Fermi 气体光晶格扰动系统中轨线的渐近表示.

## 1 Fermi 气体光晶格系统

研究光晶格凝聚的 Fermi 气体, 对凝聚的钠原子, Cooper 对尺度相对光晶格尺度足够小和

\* 收稿日期: 2016-02-13; 修订日期: 2016-03-13

**基金项目:** 国家自然科学基金 (41275062; 11202106); 安徽省高等学校省级自然科学基金项目 (KJ2015A418); 国家高级访问学者项目

**作者简介:** 史娟荣 (1981—), 女, 副教授, 硕士 (E-mail: ahjdshjr@126.com);  
莫嘉琪 (1937—), 男, 教授 (通讯作者, E-mail: mojiaci@mail.ahnu.edu.cn).

温度足够低的情况下, Fermi 气体分子体系从 BCS 到 unitarity 渡越时的动力学行为可以用非线性 Schrödinger 方程来描述:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{4m} \left( \hbar \frac{\partial}{\partial x} - 2ia_L t \right)^2 \psi + V_0 \cos(2k_L x) \psi + \mu \psi, \quad (1)$$

这里  $t, x$  分别为时间和空间变量,  $\psi$  为凝聚体的波函数, 而  $\hbar, m, a_L, k_L, \mu$  和  $V_0$  的物理意义参见文献[12-13]. 在一定的情况下, 从 BCS 区过渡到 unitarity 区的化学势, 非线性 Schrödinger 方程(1)便为布局数差  $s$  与相对相位  $z$  应满足的无量纲系统<sup>[11,15]</sup>:

$$\frac{ds}{d\bar{t}} = -\tilde{v} \sqrt{1-s^2} \sin z, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{d\bar{t}} = \frac{\bar{v}s}{\sqrt{1-s^2}} \cos z + \frac{d_1}{4k_L^2} s + \frac{d_2}{16k_L^2} s(1-s^2) - f(s, z), \quad (3)$$

其中  $\bar{v}, \tilde{v}, d_i (i=1, 2)$  为一已知的无量纲数值, 而  $f(s, z)$  为扰动函数, 设它为充分光滑函数.

## 2 光晶格系统轨线

由式(2)可得

$$d\bar{t} = -\frac{ds}{\tilde{v} \sqrt{1-s^2} \sin z}.$$

将它代入式(3), 便可得到光晶格扰动系统在  $s, z$  相平面上轨线满足的方程:

$$\frac{d \cos z}{ds} = \frac{s}{1-s^2} \cos z + \frac{1}{\tilde{v}} \left( \frac{d_1}{4k_L^2} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{d_2}{16k_L^2} s \sqrt{1-s^2} \right) - \frac{f(s, z)}{\tilde{v} \sqrt{1-s^2}}. \quad (4)$$

考虑 Fermi 气体光晶格在无扰动系统的情形, 即  $f(s, z) = 0$ . 于是由轨线方程(4)有

$$\frac{d \cos z}{ds} = \frac{s}{1-s^2} \cos z + \frac{1}{\tilde{v}} \left( \frac{d_1}{4k_L^2} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{d_2}{16k_L^2} s \sqrt{1-s^2} \right). \quad (5)$$

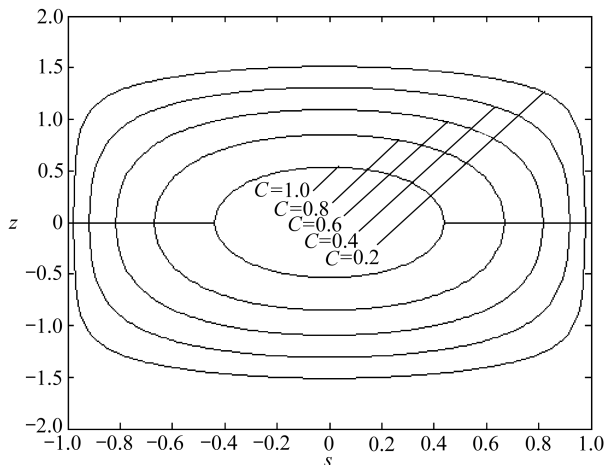


图1 在光晶格无扰动机制时 Fermi 气体的轨线曲线 ( $C = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ )

Fig. 1 The path curve of a Fermi gas in optical lattice with non-disturbed mechanism

( $C = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ )

由式(5), 不难得到 Fermi 气体光晶格在无扰动情形下轨线的精确解表示式:

$$z = \pm \arccos \left[ C(1 - s^2)^{-1/2} - \frac{1}{64\bar{v}k_L^2} (8d_1(1 - s^2) + d_2(1 - s^2)^2) \right]. \quad (6)$$

选取无量纲参数为  $d_1 = d_2 = \bar{v} = k_L = 1$ , 当常数  $C = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$  时, Fermi 气体光晶格无扰动情形轨线的精确解(6)在相平面  $s, z (-1 \leq s \leq 1)$  上的闭轨线曲线(极限环)如图 1 所示.

### 3 扰动系统同伦映射

现在考虑 Fermi 气体光晶格在具有扰动系统下的情形. 此时  $s, z$  相平面上轨线满足式(4), 由于扰动系统函数  $f(s, z) \neq 0$ , 下面用广义泛函同伦分析映射方法<sup>[32-34]</sup>来寻求 Fermi 气体光晶格扰动模型(4)对应轨线的渐近表示式.

首先对式(4)作变换, 令  $Z = \cos z$ , 得

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{s}{1 - s^2} Z + \frac{1}{\bar{v}} \left( \frac{d_1}{4k_L^2} \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} + \frac{d_2}{16k_L^2} s \sqrt{1 - s^2} \right) - \frac{f(s, \cos^{-1} Z)}{\bar{v} \sqrt{1 - s^2}}. \quad (7)$$

引入一个广义泛函分析同伦映射  $H(Z, p) : \mathbf{R} \times I \rightarrow \mathbf{R}$ :

$$H(Z, p) = L(Z) - L(Y) + p \left( L(Y) + \frac{1}{\bar{v}} \left( \frac{d_1}{4k_L^2} \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} + \frac{d_2}{16k_L^2} s \sqrt{1 - s^2} \right) - \frac{f(s, \cos^{-1} Z)}{\bar{v} \sqrt{1 - s^2}} \right), \quad (8)$$

这里  $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ ,  $I = [0, 1]$ , 算子

$$L(Z) = \frac{dZ}{ds} - \frac{s}{1 - s^2} Z,$$

$Y$  为初始函数. 不难看出,  $H(Z, 1) = 0$  与光晶格扰动系统在相平面上的轨线方程(4)相同. 因此方程(4)的解就是  $H(Z, p) = 0$  的解当  $p \rightarrow 1$  的情形.

由方程(5)的一个精确解, 选取初始函数  $Y(s) = Z_0(s)$ ,

$$Z_0(s) = \arccos \left[ C(1 - s^2)^{-1/2} - \frac{1}{64\bar{v}k_L^2} (8d_1(1 - s^2) + d_2(1 - s^2)^2) \right], \quad (9)$$

并设

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(s) p^i. \quad (10)$$

将式(10)代入广义泛函分析同伦映射(8), 合并  $p$  的同次幂系数并设其为 0. 由于  $p$  的零次幂系数为 0, 故可以选取

$$Y_0(s) \equiv Z_0(s) = \arccos \left[ C(1 - s^2)^{-1/2} - \frac{1}{64\bar{v}k_L^2} (8d_1(1 - s^2) + d_2(1 - s^2)^2) \right]. \quad (11)$$

由式(8),  $H(Z, p)$  中  $p$  的一次幂系数等于 0, 得

$$L(Z_1) = - \frac{f(s, \cos^{-1} Z_0(s))}{\bar{v} \sqrt{1 - s^2}}. \quad (12)$$

由式(12), 可得满足零初始条件的解为

$$Z_1(s) = - \int_0^s \left[ \frac{f(r, \cos^{-1} Z_0(r))}{\bar{v} \sqrt{1 - r^2}} \right] dr. \quad (13)$$

由式(8),  $H(Z, p)$  中  $p$  的二次幂系数等于 0, 得

$$L(Z_2) = -F_1, \quad (14)$$

$$\text{其中 } F_1 = \frac{\partial}{\partial p} \left[ f(r, \cos^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(r) p^i) \right]_{p=0}.$$

于是方程(14)满足零初始条件的解为

$$Z_2(s) = - \int_0^s F_1 dr. \quad (15)$$

由式(11)、(13)、(15)和式(10),再令  $p = 1$  便得到方程(7)解的一次、二次渐近式  $Y_1, Y_2$ :

$$Y_1(s) = \arccos \left[ C(1-s^2)^{-1/2} - \frac{1}{64\bar{v}k_L^2} (8d_1(1-s^2) + d_2(1-s^2)^2) - \int_{-1}^s \left[ \frac{f(r, \cos^{-1} Z_0(r))}{\bar{v} \sqrt{1-r^2}} \right] dr \right], \quad (16)$$

$$Y_2(s) = \arccos \left[ C(1-s^2)^{-1/2} - \frac{1}{64\bar{v}k_L^2} (8d_1(1-s^2) + d_2(1-s^2)^2) - \int_{-1}^s \left[ \frac{f(r, \cos^{-1} Z_0(r))}{\bar{v} \sqrt{1-r^2}} + F_1 \right] dr \right]. \quad (17)$$

用同样的方法,可以得到方程(7)的更高次渐近解  $Y_n(s)$  ( $n = 3, 4, \dots$ ), 再由变换  $Z = \cos z$ , 便得到 Fermi 气体光晶格在扰动系统下轨线解  $z(s)$  的第  $n$  次渐近解  $z_n$ :

$$z_n = \arccos[Y_n], \quad n = 1, 2, \dots. \quad (18)$$

## 4 Fermi 气体光晶格微扰模型

考虑在 Fermi 气体光晶格微扰调制的情形,它的微扰项为  $f(s, z) = \varepsilon \sin^2 z$  的周期调制,其中  $\varepsilon$  为小的正参数.这时 Fermi 气体光晶格扰动系统(2)、(3)表示为

$$\frac{ds}{d\bar{t}} = -\bar{v} \sqrt{1-s^2} \sin z, \quad (19)$$

$$\frac{dz}{d\bar{t}} = \frac{\bar{v}s}{\sqrt{1-s^2}} \cos z + \frac{d_1}{4k_L^2} s + \frac{d_2}{16k_L^2} s(1-s^2) - \varepsilon \sin^2 z, \quad (20)$$

作变换  $Z = \cos z$ , 对应式(7)为

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{s}{1-s^2} Z + \frac{1}{\bar{v}} \left( \frac{d_1}{4k_L^2} \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{d_2}{16k_L^2} s \sqrt{1-s^2} \right) - \varepsilon \frac{1-Z^2}{\bar{v} \sqrt{1-s^2}}. \quad (21)$$

由广义泛函分析同伦映射式(8)和(11),Fermi 气体光晶格模型(21)解的初始函数为

$$Y_0(s) \equiv Z_0(s) = \arccos \left[ C(1-s^2)^{-1/2} - \frac{1}{64\bar{v}k_L^2} (8d_1(1-s^2) + d_2(1-s^2)^2) \right]. \quad (22)$$

由式(10),可得到广义泛函分析同伦映射(8)的  $Z_1(s)$ :

$$Z_1(s) = -\varepsilon \int_{-1}^s \frac{1-Z_0^2(r)}{\bar{v} \sqrt{1-r^2}} dr, \quad (23)$$

其中  $Z_0$  由式(22)表示.

由式(14),便得到 Fermi 气体光晶格模型(21)解的一次渐近式  $Y_1(s)$  为

$$Y_1(s) = \arccos \left[ C(1-s^2)^{-1/2} - \frac{1}{64\bar{v}k_L^2} (8d_1(1-s^2) + d_2(1-s^2)^2) - \right.$$

$$\varepsilon \int_{-1}^s \frac{1 - Z_0^2(r)}{\bar{v} \sqrt{1 - r^2}} dr \Big]. \tag{24}$$

选取无量纲参数为  $d_1 = d_2 = \bar{v} = k_L = 1, C = 0.5$ , 当小参数  $\varepsilon = 0.1, 0.3$  时, Fermi 气体光晶格模型 (21) 的精确解  $Y(s) = Y_{\text{exa}}(s)$  和同伦映射的零次  $Y_0(s) = Y_{\text{hom}0}(s)$ 、一次  $Y_1(s) = Y_{\text{hom}1}(s)$  渐近解在  $OsY$  坐标系的曲线如图 2、图 3 所示。

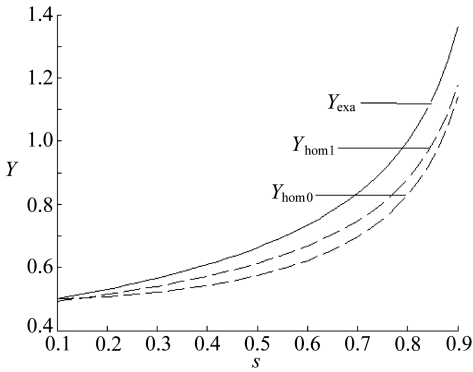


图 2 精确解  $Y_{\text{exa}}(s)$ , 零次、一次渐近解  $Y_{\text{hom}0}(s)$ ,  $Y_{\text{hom}1}(s)$  的曲线比较 ( $\varepsilon = 0.3$ )

Fig. 2 The comparative curves of the exact, first and second approximate solutions  $Y_{\text{exa}}(s), Y_{\text{hom}0}(s), Y_{\text{hom}1}(s)$  ( $\varepsilon = 0.3$ )

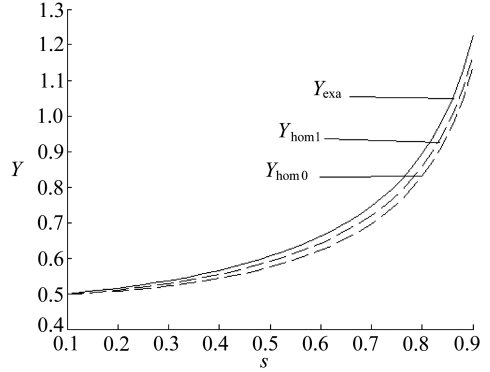


图 3 精确解  $Y_{\text{exa}}(s)$ , 零次、一次渐近解  $Y_{\text{hom}0}(s)$ ,  $Y_{\text{hom}1}(s)$  曲线的比较 ( $\varepsilon = 0.1$ )

Fig. 3 The comparative curves of the exact, first and second approximate solutions  $Y_{\text{exa}}(s), Y_{\text{hom}0}(s), Y_{\text{hom}1}(s)$  ( $\varepsilon = 0.1$ )

由图 2、图 3 所示的曲线比较可以直观地看出: 同伦映射的一次渐近曲线比零次渐近曲线更接近于精确解, 特别当小参数越小时, 这种“接近”更明显。

由式 (10), 可得到广义泛函分析同伦映射 (8) 的  $Z_2(s)$ :

$$Z_2(s) = 2\varepsilon \int_{-1}^s \frac{Z_0(r)Z_1(r)}{\bar{v} \sqrt{1 - r^2}} dr, \tag{25}$$

再由式 (15), 便得到 Fermi 气体光晶格模型 (21) 解的二次渐近式  $Y_2(s)$  为

$$Y_2(s) = \arccos \left[ C(1 - s^2)^{-1/2} - \frac{1}{64\bar{v}k_L^2} (8d_1(1 - s^2) + d_2(1 - s^2)^2) - \varepsilon \int_{-1}^s \frac{1 - Z_0^2(r) + 2Z_0(r)Z_1(r)}{\bar{v} \sqrt{1 - r^2}} dr \right]. \tag{26}$$

同样, 还可依次得到 Fermi 气体光晶格模型 (21) 的更高次的渐近解  $Y_n(n = 3, 4, \dots)$ , 而对应系统 (19)、(20) 的第  $n$  次轨线渐近解  $z_n(s)$  的表达式为

$$z_n = \arccos [ Y_n(s) ], \quad n = 1, 2, \dots.$$

利用摄动理论<sup>[34-35]</sup>可以证明, 在 Fermi 气体光晶格微扰周期调制系统 (19)、(20) 的第  $n$  次轨线渐近解  $z_n(s)$  与其轨线精确解  $z(s)$  之间有如下的误差估计:

$$z(s) = z_n(s) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots; 0 < \varepsilon \ll 1.$$

### 5 同伦方法对模型解的意义

Fermi 气体光晶格非线性模型是一个复杂的自然现象, 因此需要把它简化为一个非线性的基本模式, 并且用渐近方法求解它. 广义泛函分析同伦映射方法就是一个有效的方法. 用此

方法来求非线性方程物理问题的近似解析解是近代发展起来的一种新方法,并且此方法的理论还在不断的发展、创新中。

本方法得到的是数学近似解析式,所以它能够得到与原未知函数有关物理量的近似解析表达式。然而,用常规的差分法、有限元法、Runge-Kutta 法等数值模拟方法一般是不能达到的。特别地,本文的广义泛函分析映射迭代方法对于解具有突变型的近似解析表达式能较简便地得到。但使用一般的数值模拟方法,其计算过程就比较繁杂,而且这些古典方法在具有突变等性态的区域内的解,如孤子波、冲击波、转向点层等的邻域内,其物理特性也往往会被忽略,因此在相关区域中与真实解会有较大偏差。

利用解析式来表达非线性物理问题的解,目前已有一些研究,例如双曲函数法、 $G'/G$  展开法、Jacobi 椭圆函数法、修正的 CK 方法、齐次平衡法等。这些方法在一定场合下,能得到较好的结果,但是往往只用于特殊非线性方程,求解面有一定限制。然而,本文所涉及的广义泛函分析同伦映射方法求近似解的面就比较广,甚至对方程的非线性项不必很具体,就能通过本方法的广义泛函迭代通式得到相应问题的各次渐近解。

广义泛函分析同伦映射迭代方法还有一个与其他方法不同的特点:它是建立在泛函分析的函数空间下讨论的,故讨论的对象可在泛函分析的广义函数空间意义下进行。量子力学、热力学、弹性力学、激光理论等学科中的许多方面都涉及到广义函数的概念,譬如“点源  $\delta(x)$  函数”就是在现代物理各学科中出现的一个广义函数。

同时,用广义泛函迭代方法求解广义 Fermi 气体光晶格系统轨线,在一定的情况下可得到精度较高的近似解。正如在本文的举例中就说明了这一点。

在采用广义同伦映射分析方法得到非线性模型的渐近解时,初始近似的选取是很重要的。本文对 Fermi 气体光晶格扰动模型轨线的初始近似函数是选用无扰动情形下的精确解。这是很自然的。又因 Fermi 气体光晶格扰动系统在相平面上渐近轨线函数是解析表达式,因而对其还能进行解析运算,得到更进一步的相关物理量的状态,如:计算超流 Fermi 气体体系由分子 BCS 渡越到 unitarity 的化学势;计算周期调制下由 Josephson 振荡到自俘获的临界耦合系数和在外场驱动下系统的相邻能级间的量子隧穿等。

## 6 结 论

本文对 Fermi 气体光晶格非线性扰动系统求轨线的渐近表示式中,使用了广义泛函分析同伦映射迭代方法。这种解法与一般的简单数值模拟方法不同。用本方法得到的解是解析表示式,因而它还可以继续用例如积分、微分等各种解析运算的工具来引伸出其他各种物理量的相关性态。

用本文的方法求系统轨线的渐近解简单可行。在构造的同伦映射方法中,初始近似函数是采用对应的非扰动系统的轨线精确解。它保证了非线性扰动光晶格系统轨线表示式能较快地求得在要求的精度范围内的渐近解。这样的效果也更现实。

### 参考文献 (References):

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor[J]. *Science*, 1995, **269**(5221): 198-201.
- [2] MEN Fu-dian, LIU Hui, FAN Zhao-lan, et al. Relativistic thermodynamic properties of a weakly interacting Fermi gas[J]. *Chinese Physics B*, 2009, **18** (7): 2649-2653.

- [3] 马云, 傅立斌, 杨志安, 等. 玻色-爱因斯坦凝聚体自囚禁现象的动力学相变及其量子纠缠特性[J]. 物理学报, 2006, **55**(11): 5623-5628. (MA Yun, FU Li-bing, YANG Zhi-an, et al. Dynamical phase changes of the self-trapping of Bose-Einstein condensates and its characteristic of entanglement[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(11): 5623-5628. (in Chinese))
- [4] WEN Wen, SHEN Shun-qing, HUANG Guo-xiang. Propagation of sound and supersonic bright solitons in superfluid Fermi gases in BCS-BEC crossover[J]. *Physical Review B*, 2010, **81**(1): 014528.
- [5] 臧小飞, 李菊萍, 谭磊. 偶极-偶极相互作用下双势阱中旋量玻色-爱因斯坦凝聚磁化率的非线性动力学性质[J]. 物理学报, 2007, **56**(8): 4348-4352. (ZANG Xiao-fei, LI Ju-ping, TAN Lei. Nonlinear dynamical properties of susceptibility of a spinor Bose-Einstein condensate with dipole-dipole interaction in a double-well potential[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(8): 4348-4352. (in Chinese))
- [6] WANG Guan-fang, FU Li-bin, LIU Jie. Periodic modulation effect on self-trapping of two weakly coupled Bose-Einstein condensates[J]. *Physical Review A*, 2006, **73**(1): 013619-1-013619-7.
- [7] QI Peng-tang, DUAN Wen-shan. Tunneling dynamics and phase transition of a Bose-Fermi mixture in a double well[J]. *Physical Review A*, 2011, **84**(3): 033627-1-033627-8.
- [8] Adhikari S K, Malomed B A, Salasnich L, et al. Spontaneous symmetry breaking of Bose-Fermi mixtures in double-well potentials[J]. *Physical Review A*, 2010, **81**(5): 053630-1-053630-9.
- [9] CHENG Yong-shan, Adhikari S K. Localization of a Bose-Fermi mixture in a bichromatic optical lattice[J]. *Physical Review A*, 2011, **84**(2): 023632-1-023632-7.
- [10] QI Ran, YU Xiao-lu, Li Z B, et al. Non-Abelian Josephson effect between two  $F=2$  spinor Bose-Einstein condensates in double optical traps[J]. *Physical Review Letters*, 2009, **102**(18): 185301-1-185301-4.
- [11] 王文元, 蒙红娟, 杨阳, 等. 空间变尺度因子球坐标系与四维时空度规[J]. 物理学报, 2012, **61**(8): 087302. (WANG Wen-yuan, MENG Hong-juan, YANG Yang, et al. Variable space scale factor spherical coordinates and time-space metric[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(8): 087302. (in Chinese))
- [12] 黄芳, 李海彬. 双势阱中玻色-爱因斯坦凝聚的绝热隧穿[J]. 物理学报, 2011, **60**(2): 020303. (HUANG Fang, LI Hai-bing. Adiabatic tunneling of Bose-Einstein condensate in double-well potential[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(2): 020303. (in Chinese))
- [13] Modugno G, Roati G, Riboli F, et al. Collapse of a degenerate Fermi gas[J]. *Science*, 2002, **297**(5590): 2240-2243.
- [14] Volz T, Dürr S, Ernst S, et al. Characterization of elastic scattering near a Feshbach resonance in Rb-87[J]. *Physical Review A*, 2003, **68**(1): 010702.
- [15] 苟学强, 闫明, 令伟栋, 等. 费米气体在光晶格中的自俘获现象及其周期调制[J]. 物理学报, 2013, **62**(13): 130308. (GOU Xue-qiang, YAN Ming, LING Wei-dong, et al. Self-trapping and periodic modulation of Fermi gases in optical lattices[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(13): 130308. (in Chinese))
- [16] MO Jia-qi. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems[J]. *Science in China(Ser A)*, 1989, **32**(11): 1306-1315.
- [17] MO Jia-qi. Homotopy mapping solving method for gain fluency of a laser pulse amplifier[J]. *Science in China(Ser G)*, 2009, **39**(7): 1007-1010.
- [18] MO Jia-qi, LIN Shu-rong. The homotopy mapping solution for the solitary wave for a generalized nonlinear evolution equation[J]. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(9): 3628-3631.

- [19] 莫嘉琪, 陈贤峰. 一类广义非线性扰动色散方程孤立波的近似解[J]. 物理学报, 2010, **50**(3): 1403-1408. (MO Jia-qi, CHEN Xian-feng. Approximate solution of solitary wave for a class of generalized nonlinear disturbed dispersive equation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **50**(3): 1403-1408. (in Chinese))
- [20] MO Jia-qi, CHEN Xian-feng. Homotopic mapping method of solitary wave solutions for generalized complex Burgers equation[J]. *Chinese Physics B*, 2010, **19**(10): 100203.
- [21] MO Jia-qi. Solution of travelling wave for nonlinear disturbed long-wave system[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2011, **55**(3): 387-390.
- [22] MO Jia-qi, LIN Wan-tao, LIN Yi-hua. Asymptotic solution for the El Niño time delay sea-air oscillator model[J]. *Chinese Physics B*, 2011, **20**(7): 070205.
- [23] 莫嘉琪. 扰动 Vakhnenko 方程物理模型的行波解[J]. 物理学报, 2011, **60**(9): 090203. (MO Jia-qi. Travelling wave solution of disturbed Vakhnenko equation for physical model travelling wave solution of disturbed Vakhnenko equation for physical model[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(9): 090203. (in Chinese))
- [24] 莫嘉琪, 程荣军, 葛红霞. 具有控制项的弱非线性发展方程行波解[J]. 物理学报, 2011, **60**(5): 050204. (MO Jia-qi, CHENG Rong-jun, GE Hong-xia. Travelling wave solution of the weakly nonlinear evolution equation with control term[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(5): 050204. (in Chinese))
- [25] 莫嘉琪. 一类非线性尘埃等离子体孤波解[J]. 物理学报, 2011, **60**(3): 030203. (MO Jia-qi. The solution for a class of nonlinear solitary waves in dusty plasma[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(3): 030203. (in Chinese))
- [26] MO Jia-qi. Solution of travelling wave for nonlinear disturbed long-wave system[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2011, **55**(2): 387-390.
- [27] 史娟荣, 石兰芳, 莫嘉琪. 一类非线性强阻尼扰动展方程的解[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 1046-1054. (SHI Juan-rong, SHI Lan-fang, MO Jia-qi. The solutions for a class of nonlinear disturbed evolution equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1046-1054. (in Chinese))
- [28] 史娟荣, 吴钦宽, 莫嘉琪. 非线性扰动广义 NNV 系统的孤子渐近行波解[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(9): 1003-1010. (SHI Juan-rong, WU Qin-kuan, MO Jia-qi. Asymptotic travelling wave solution of soliton for the nonlinear disturbed generalized NNV system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(9): 1003-1010. (in Chinese))
- [29] 史娟荣, 朱敏, 莫嘉琪. 广义 Schrödinger 扰动耦合系统孤子解[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(3): 319-330. (SHI Juan-rong, ZHU Ming, MO Jia-qi. Solitary solutions to generalized Schrödinger disturbed coupled systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(3): 319-330. (in Chinese))
- [30] SHI Juan-rong, LIN Wan-tao, MO Jia-qi. The singularly perturbed solution for a class of quasi-linear nonlocal problem for higher two parameters[J]. *J Nankai Univ*, 2015, **48**(1): 85-91.
- [31] 石兰芳, 陈贤峰, 韩祥临, 等. 一类 Fermi 气体在非线性扰动机制中轨线的渐近表示[J]. 物理学报, 2014, **63**(6): 060204. (SHI Lan-fang, CHEN Xian-feng, HAN Xiang-lin, et al. Asymptotic expressions of path curve for a class of Fermi gases in nonlinear disturbed mechanism[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(6): 060204. (in Chinese))
- [32] Liao S J. *Beyond Perturbation-Introduction to the Homotopy Analysis Method*[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [33] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*[M]. New

York: CRC Press Co, 2004.

- [34] Liao S J. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*[M]. Heidelberg: Springer & Higher Education Press, 2012.
- [35] de Jager E M, JIANG Fu-ru. *The Theory of Singular Perturbation*[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1996.
- [36] Barbu L, Morosanu G. *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems*[M]. Basel: Birkhausem Verlag AG, 2007.

## Study on Path Curves of a Class of Fermi Gases in Optical Lattices With Nonlinear Mechanism

SHI Juan-rong<sup>1</sup>, ZHU Min<sup>2</sup>, MO Jia-qi<sup>2</sup>

(1. *Anhui Technical College of Mechanical and Electrical Engineering,*

*Wuhu, Anhui 241002, P.R.China;*

2. *Department of Mathematics, Anhui Normal University,*

*Wuhu, Anhui 241003, P.R.China)*

**Abstract:** A nonlinear disturbed model for a class of Fermi gases in optical lattices was investigated. Firstly, in the non-disturbed case, the exact solution of the model path curves of Fermi gases in optical lattices was given. Secondly, the generalized functional analysis homotopic mapping was introduced and an iterative system was constructed, the arbitrary order asymptotic solution to the nonlinear disturbed model for the path curves of Fermi gases in optical lattices was obtained. Finally, a nonlinear small disturbance system was studied. With the proposed method, the asymptotic expressions of the path curves can be conveniently formulated and further extended.

**Key words:** disturbed; path curve; functional

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(41275062;11202106)

---

引用本文/Cite this paper:

史娟荣, 朱敏, 莫嘉琪. 一类 Fermi 气体光晶格非线性机制的轨线研究[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(4): 477-485.

SHI Juan-rong, ZHU Min, MO Jia-qi. Study on path curves of a class of Fermi gases in optical lattices with nonlinear mechanism[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(4): 477-485.