应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Vallis系统的不变代数曲面研究

杨　静，谈文慧，魏周超

Invariant Algebraic Surfaces of the Vallis System

YANG Jing, TAN Wenhui, and WEI Zhouchao

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.420112 http://www.applmathmech.cn

Vallis 系统的不变代数曲面研究*

杨　静，　谈文慧，　魏周超

（中国地质大学（武汉）数学与物理学院，武汉 430074）

摘要：　该文研究了 Vallis 系统的 Darboux 多项式和不变代数曲面问题. 在证明中, 使用加权齐次多项式和特征曲线的方法, 通过求解线性偏微分方程, 得到了在适当的参数条件下, Vallis 系统存在三类 Darboux 多项式.

关　键　词：　不变代数曲面；　Darboux 多项式；　Vallis 系统
中图分类号：　O151　　**文献标志码：**　A　　DOI：10.21656/1000-0887.420112

Invariant Algebraic Surfaces of the Vallis System

YANG Jing,　TAN Wenhui,　WEI Zhouchao
(*School of Mathematics and Physics*, *China University of Geosciences*(*Wuhan*), *Wuhan* 430074, *P.R.China*)

Abstract: The Darboux polynomials and invariant algebraic surfaces of the Vallis system were investigated. In the proofs, the weighted homogeneous polynomials and the characteristic curve method were used to solve linear partial differential equations. Finally, 3 types of Darboux polynomials for the Vallis system were obtained under suitable conditions of parameters.

Key words: invariant algebraic surface; Darboux polynomial; Vallis system

引　　言

一些经典的三维混沌系统虽然形式很简单, 但其动力学性质却极为复杂[1-2]. 为了便于研究, 学者们往往会通过证明系统的可积性, 以及寻找系统的不变代数曲面, 从而将系统降维, 以此达到简化系统的目的. 此外, 若一个微分系统有足够多的首次积分, 则可证明此微分系统是可积的, 从而就可以找到系统的不变代数曲面. 通过将系统限制在不变代数曲面上, 然后研究不变代数曲面上的动力学性质, 这对我们研究系统的整体动力学性质起着非常重要的辅助作用. 因此, 研究微分系统的可积性和不变代数曲面是非常有必要的. 在学者们的研究过程中, 如何去寻找系统的首次积分就成了问题的关键, 但遗憾的是, 目前并没有一个通用有效的方法可以解决此问题. Darboux 多项式与首次积分的联系密切, 可以通过研究系统的 Darboux 多项式来寻找系统的首次积分, 或者通过证明系统不存在 Darboux 多项式, 进而推出系统不存在首次积分. 但同样地, 寻找系统的 Darboux 多项式也是一个困难的问题, 目前仍有许多难题需要被解决.

学者们对动力系统的代数可积性及不变代数曲面问题的研究, 可以追溯到 Darboux[3] 和 Poincaré[4]

* **收稿日期：**　2021-04-28; **修订日期：**　2021-06-22
基金项目：　国家自然科学基金 (12172340; 11772306; 11832002)
作者简介：　杨静 (1995—), 女 (E-mail: 865097354@qq.com);
谈文慧 (1998—), 女 (E-mail: 1944694147@qq.com);
魏周超 (1984—), 男, 教授, 博士, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: weizhouchao@163.com).
引用格式：　杨静, 谈文慧, 魏周超. Vallis 系统的不变代数曲面研究[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(1): 84-93.

的研究: Darboux 最早给出了代数几何与寻找首次积分之间的联系; Poincaré 则研究了有理首次积分, 并提出: 寻找一个多项式向量场的 Darboux 多项式是一项非常困难的任务, 目前还没有找到一个有效的方法去计算它. 1996 年, Labrunie 通过初等微分代数方法[5], 计算出了 Lotka-Volterra 系统的所有多项式一阶积分[6]. 1999 年, Ollagnier 基于代数和组合学的思想, 研究了 Lotka-Volterra 系统的齐次有理首次积分[7]. 2000 年, Llibre 等利用求解线性偏微分方程的特征曲线方法, 描述了 Rikitake 系统的所有不变代数曲面. 此外, Llibre 等还证明出在某些参数条件下, 系统存在一个多项式首次积分或有理首次积分[8]. 2002 年, Llibre 等使用加权齐次多项式和特征曲线的方法, 通过求解线性偏微分方程, 对经典 Lorenz 系统的所有 Darboux 不变量、不可约 Darboux 多项式、有理首次积分及代数可积性进行了分类讨论[9]. 2002 年, Swinnerton-Dyer 通过对多项式权值的重新定义, 分析并计算了 Lorenz 系统的不变代数曲面[10]. 2007 年, Lü等通过使用加权齐次多项式和特征曲线法, 研究了 Chen 系统的 Darboux 多项式和代数可积性问题[11]. 2011 年, Deng 等通过对多项式权值的重新定义, 求出了 Chen 系统的所有不变代数曲面[12]. 2018 年, Murilo 等研究了一个金融模型的不变代数曲面和 Hopf 分岔问题, 并基于加权齐次多项式和特征曲线的方法, 证明出该模型对于任何参数值都不存在不变代数曲面[13]. 2018 年, Aybar 等利用计算机代数工具, 研究了一个二次自相互作用的二饵一捕食者系统的动力学性质, 并给出了该系统存在不变代数曲面的条件[14]. 2019 年, Ferragut 等研究了一类平面多项式向量场的 Darboux 首次积分问题, 证明了这些向量场具有扩展的约简过程, 并给出计算系统 Darboux 首次积分的算法[15]. 2020 年, Dias 等利用 Poincaré紧化, 对一个病毒系统做全局分析, 证明出对于两组参数值, 系统具有不变代数曲面[16]. 同年, Dias 等利用三维空间中的 Poincaré 紧化, 对 Maxwell-Bloch 系统进行了全局分析, 证明出对于某些参数值, 该系统具有首次积分和不变代数曲面[17].

ENSO (El Niño southern oscillation) 现象是指太平洋东部和中部大规模变暖的现象, 这种现象的产生与热带太平洋海洋-大气系统的无序性和地球上最突出的气候变化有关, 一般会持续几个月. ENSO 现象会对当地渔业及海洋生物的迁移产生巨大的影响, 并且热带海洋表面温度场对全球气候也会产生不容忽视的影响, 这些影响使学者们对 ENSO 现象产生了极大的兴趣. 在文献 [18-21] 中, 学者们都针对 ENSO 现象提出了模型, 并成功地解决了部分问题, 但这些模型都比较复杂. 1988 年, Vallis 在研究 ENSO 现象时, 提出了一个简化的微分方程组, 即 Vallis 模型[22]. Vallis 系统是一个三维微分系统, 它模拟了太平洋热带地区的大气动力学与年降水量、气温和风力的变化有关. 本文引入 Vallis 系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y,z) = by - c(x+P), \\ \dot{y} = Q(x,y,z) = -y + xz, \\ \dot{z} = R(x,y,z) = -z - xy + 1, \end{cases} \tag{1}$$

式中变量x表示风力, 变量y表示太平洋东西部近水面温差, 变量z表示近水面平均温度, 参数b和c为正实数, P为实数.

尽管 Vallis 模型忽略了地球自转、压力场和波动现象等一些影响, 但它提供了对观测到的过程的正确描述, 并描述出许多观测到的 ENSO 现象. 2008 年, Krishchenko 等利用 Vallis 模型, 研究了右侧可微时变系统紧不变集的局部化问题[23]. 在文献 [24] 中, Euzebio 等讨论了 Vallis 系统的周期解的存在性及稳定性问题. 2015 年, Garay 等研究了 Vallis 模型的混沌问题[25]. 2017 年, Borghezan 等分析了 Vallis 系统的混沌与周期性, 证明了嵌入在混沌区域的周期结构的存在性, 并且这些周期结构是以周期相加序列的形式存在的[26]. 2019 年, Rajagopal 等研究了 Vallis 模型的反单调性、分岔性和多稳定性问题, 分别给出了当 P 为 0 和不为 0 时产生 Hopf 分岔的参数条件[27]. 在本文中, 我们将从代数学方面, 研究系统 (1) 的 Darboux 多项式和不变代数曲面问题.

本论文构造如下: 第 1 节给出了一些 Darboux 多项式的相关定义及求解线性偏微分方程的特征方法, 并给出了本文的主要定理; 第 2 节给出了主要定理的证明; 第 3 节给出了本文的总结.

1　主要结论和定义

设$f(x,y,z)$是关于变量x,y,z的实多项式, 若$\frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q + \frac{\partial f}{\partial z}R = kf$, 我们称$f$是系统 (1) 的 Darboux 多项式,

其中$k(x,y,z)$是实多项式, k称为f的余因子. 由于系统 (1) 是三维二次系统, 则由$\dfrac{\partial f}{\partial x}P+\dfrac{\partial f}{\partial y}Q+\dfrac{\partial f}{\partial z}R=kf$ 可知, 余因子$k(x,y,z)$的阶数至多为 1. 若$f(x,y,z)$ 是 Darboux 多项式且$f=0$是曲面, 那么它就是不变的, 我们称为不变代数曲面.

对$X\in R^n$, 若存在$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in N^n, m\in\mathbf{N}$, 对所有$\alpha\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$, 有$g(\alpha^s X)=g(\alpha^{s_1}x_1,\alpha^{s_2}x_2,\cdots,\alpha^{s_n}x_n)=\alpha^m g(X)$, 则多项式$g(X)$被称为加权齐次的, 其中 $\mathbf{R}$ 代表实数域, $\mathbf{N}$代表正整数集. 我们称s为g的权, m表示加权阶数, $X\to\alpha^s X$表示赋予变量新的加权次数.

为了方便读者理解, 我们将求解线性偏微分方程的特征方法总结如下. 考虑一阶线性偏微分方程:

$$a(x,y,z)A_x+b(x,y,z)A_y+c(x,y,z)A_z+d(x,y,z)A=f(x,y,z), \tag{2}$$

这里$A=A(x,y,z), a,b,c,d,f$是C^1函数, A_x,A_y,A_z分别是$A(x,y,z)$关于x,y,z的一阶偏导.

对于xyz空间中的曲线$(x(t),y(t),z(t))$, 若对曲线上的每一点(x_0,y_0,z_0), 向量$(a(x_0,y_0,z_0),b(x_0,y_0,z_0),c(x_0,y_0,z_0))$与曲线相切, 则曲线$(x(t),y(t),z(t))$被称为线性偏微分方程 (2) 的特征曲线. 并且, 特征曲线是如下系统的解:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x(t),y(t),z(t)),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b(x(t),y(t),z(t)),\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=c(x(t),y(t),z(t)). \tag{3}$$

为了方便起见, 我们将z代替t作为新的自变量, 将系统 (3) 简化为如下方程 (这里假设$c(x(t),y(t),z(t))\neq 0$):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{a(x(t),y(t),z(t))}{c(x(t),y(t),z(t))},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{b(x(t),y(t),z(t))}{c(x(t),y(t),z(t))}, \tag{4}$$

则常微分方程 (4) 称为偏微分方程 (2) 的特征方程.

假设方程 (4) 有隐式解$g(x,y,z)=c_1, h(x,y,z)=c_2$, 其中$c_1,c_2$是任意常数. 现考虑如下变量替换:

$$u=g(x,y,z),\ v=h(x,y,z),\ w=z, \tag{5}$$

且变换 (5) 的逆变换为$x=p(u,v,w), y=q(u,v,w), z=s(u,v,w)$. 于是我们将方程 (2) 变成关于w的常微分方程 (对于固定的u,v):

$$\bar{c}(u,v,w)\bar{A}_w+\bar{d}(u,v,w)\bar{A}=\bar{f}(u,v,w), \tag{6}$$

这里$\bar{c},\bar{A},\bar{d},\bar{f}$是关于$u,v,w$的函数, 且分别与$c,A,d,f$等价, $\bar{A}_w$是$\bar{A}$关于w的一阶偏导.

若$\bar{A}=\bar{A}(u,v,w)$是常微分方程 (6) 的解, 那么$A(x,y,z)=\bar{A}(g(x,y,z),h(x,y,z),z)$为偏微分方程 (2) 的解.

本文的主要定理如下.

定理 1 当有以下条件之一成立时, 系统 (1) 有不变代数曲面.

(ⅰ) 当$c=1/2, P=0$时, 系统 (1) 的 Darboux 多项式为$a_n(x^2+2bz-2b)^{2n}$, 对应的余因子为$k=-2n$; 另一个 Darboux 多项式为$a_n(x^2+2bz-2b)^{2n-1}$, 对应的余因子为$-2n+1$, 其中a_n为任意非零实数.

(ⅱ) 当$c=1, P=0$时, 系统 (1) 的 Darboux 多项式为$a_0\left(y^2+z^2-2z+1-\dfrac{x^2}{b}\right)^n$, 对应的余因子为$k=-2n$, 其中$a_0$为任意非零实数.

2 定理 1 的证明

通过变量替换

$$x=\widetilde{x},\ y=\widetilde{y},\ z=1-\widetilde{z}, \tag{7}$$

我们将系统 (1) 变为

$$\begin{cases}\dot{\widetilde{x}}=b\widetilde{y}-c(\widetilde{x}+P),\\ \dot{\widetilde{y}}=-\widetilde{y}+\widetilde{x}-\widetilde{x}\,\widetilde{z},\\ \dot{\widetilde{z}}=\widetilde{x}\,\widetilde{y}-\widetilde{z}.\end{cases} \tag{8}$$

接下来, 我们继续对系统 (8) 做变量替换:

$$\widetilde{x}=\alpha^{-1}X,\ \widetilde{y}=\alpha^{-2}Y,\ \widetilde{z}=\alpha^{-2}Z,\ t=\alpha T, \tag{9}$$

则系统 (8) 变为

$$\begin{cases}\dot{X}=bY-c\alpha X-cP\alpha^2,\\ \dot{Y}=-XZ-\alpha Y+\alpha^2X,\\ \dot{Z}=XY-\alpha Z,\end{cases} \tag{10}$$

其中上标点表示变量对 T 的导数.

若 $f(x,y,z)$是系统 (1) 的一个 Darboux 多项式, 其余因子为 $k(x,y,z)$.不失一般性, 我们假设 $k(x,y,z)=k_0+k_1x+k_2y+k_3z$. 令$F(X,Y,Z)=\alpha^l f(\alpha^{-1}X,\alpha^{-2}Y,\alpha^{-2}Z)$, $K(X,Y,Z)=\alpha^2 k(\alpha^{-1}X,\alpha^{-2}Y,\alpha^{-2}Z)$, 其中$l$为$f$的权齐次分量中的最高权次, (x,y,z) 的权次为$(1,2,2)$. 假设$F=F_0+\alpha F_1+\alpha^2F_2+\cdots+\alpha^m F_m$, 这里$F_i$是一个权齐次多项式, 其权次为$l-i$, 且$i=0,1,\cdots,m,l\geqslant m$. 由 Darboux 多项式定义, 我们可以得到以下等式:

$$(by-c\alpha x-cP\alpha^2)\sum_{i=0}^{m}\alpha^i\frac{\partial F_i}{\partial x}+(-xz-\alpha y+\alpha^2x)\sum_{i=0}^{m}\alpha^i\frac{\partial F_i}{\partial y}+(xy-\alpha z)\sum_{i=0}^{m}\alpha^i\frac{\partial F_i}{\partial z}=$$
$$(k_1x+k_2\alpha^{-1}y+k_3\alpha^{-1}z+\alpha k_0)\sum_{i=0}^{m}\alpha^iF_i, \tag{11}$$

式中, 我们仍用x,y,z代替X,Y,Z. 比较等式 (11) 两边α^{-1}的系数, 可以证明$k_2=k_3=0$. 再比较等式 (11) 两边$\alpha^i,i=0,1,\cdots,m+2$ 的系数, 我们有

$$\begin{cases}L[F_0]=k_1xF_0,\\ L[F_1]=k_1xF_1+k_0F_0+cx\dfrac{\partial F_0}{\partial x}+y\dfrac{\partial F_0}{\partial y}+z\dfrac{\partial F_0}{\partial z},\\ L[F_j]=k_1xF_j+k_0F_{j-1}+cx\dfrac{\partial F_{j-1}}{\partial x}+y\dfrac{\partial F_{j-1}}{\partial y}+z\dfrac{\partial F_{j-1}}{\partial z}+cP\dfrac{\partial F_{j-2}}{\partial x}-x\dfrac{\partial F_{j-2}}{\partial y},\end{cases} \tag{12}$$

其中$j=2,3,\cdots,m+2$; 当$j>m$时, $F_j=0$; L 是线性偏微分算子,

$$L=by\frac{\partial}{\partial x}-xz\frac{\partial}{\partial y}+xy\frac{\partial}{\partial z}. \tag{13}$$

那么与线性偏微分算子 (13) 相关的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\frac{by}{xy},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{-xz}{xy}. \tag{14}$$

经计算, 特征方程 (14) 的通解为$x^2-2az=d_1$, $y^2+z^2=d_2$, 此处d_1和d_2是积分常数. 接下来, 我们做变量替换:

$$u=x^2-2bz,\ v=y^2+z^2,\ w=z, \tag{15}$$

则变换 (15) 的逆变换是

$$x=\pm\sqrt{u+2bw},\ y=\pm\sqrt{v-w^2},\ z=w. \tag{16}$$

在后面的计算中, 为了方便, 我们只考虑

$$x=\sqrt{u+2bw},\ y=\sqrt{v-w^2},\ z=w. \tag{17}$$

通过变换 (15) 和 (17), 方程 (12) 的第一个方程变为如下常微分方程 (对于固定的u,v):

$$\sqrt{v-w^2}\frac{\mathrm{d}\overline{F_0}}{\mathrm{d}w}=k_1\overline{F_0}, \tag{18}$$

其中$\overline{F_0}(u,v,w)=F_0(x,y,z)$. 经计算,

$$\overline{F_0}=\overline{G_0}\exp\left(k_1\arcsin\frac{w}{\sqrt{v}}\right), \tag{19}$$

这里$\overline{G_0}$是关于u,v的任意光滑函数. 为了使$\overline{F_0}$是一个权齐次多项式, 我们必须使$k_1=0$, 于是有

$$F_0(x,y,z)=\overline{F_0}(u,v,w)=\overline{G_0}(x^2-2bz,y^2+z^2).$$

因此, 系统 (1) 的每个 Darboux 多项式的余因子是一个常数. 由于u和v在x,y,z中的权次分别是 2 和 4, 则F_0的权次应为$l=4n$ 或$l=4n-2,n\in\mathbf{N}$. 所以F_0 的形式为

$$F_0=\sum_{i=0}^{n}a_i(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i}, \tag{20}$$

此处$l=4n$, 且当$i=0,1,\cdots,n$时, a_i是任意实数; 或

$$F_0=\sum_{i=1}^{n}a_i(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i},\tag{21}$$

此处$l=4n-2$, 且当$i=1,2,\cdots,n$时, a_i是任意实数.

对于这两种不同的情况, 我们将证明分为两部分.

2.1 F_0的形式为式 (20)

将F_0代入式 (12) 的第二个方程, 我们可以证明

$$L[F_1]=\sum_{i=0}^{n}(k_0+4ic+2(n-i))a_i(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i}+\sum_{i=1}^{n}(8cbi-4bi)a_i(x^2-2az)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i}z.\tag{22}$$

使用变换 (15) 和 (17), 以类似求解$\overline{F_0}$的方法, 我们得到常微分方程 (对于固定的u,v):

$$\sqrt{u+2bw}\,\sqrt{v-w^2}\,\frac{\mathrm{d}\overline{F_1}}{\mathrm{d}w}=\sum_{i=0}^{n}(k_0+4ic+2(n-i))a_iu^{2i-1}v^{n-i}+\sum_{i=1}^{n}(8cbi-4bi)a_iu^{2i-2}v^{n-i}w.\tag{23}$$

将方程 (23) 对w积分, 我们得到

$$\begin{aligned}\overline{F_1}=&\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{b}(k_0+4ic+2(n-i))a_iu^{2i}v^{n-i-1}\sqrt{u+2bw}\,\sqrt{v-w^2}+\sum_{i=0}^{n-1}\Big((8cb-4b)\times\\&(i+1)a_{i+1}+\frac{1}{b}(k_0+4ic+2(n-i))a_i\Big)u^{2i+1}v^{n-i-1}\int\frac{w\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\,\sqrt{v-w^2}}+\\&\frac{1}{b}(k_0+4cn)a_nu^{2n}v^{-1}\int\frac{w\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\,\sqrt{v-w^2}}+\\&\sum_{i=0}^{n-1}3(k_0+4ic+2(n-i))a_iu^{2i}v^{n-i-1}\int\frac{w^2\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\,\sqrt{v-w^2}}+\overline{G_1}(u,v),\end{aligned}\tag{24}$$

此处$\overline{G_1}(u,v)$是关于u,v的任意光滑函数. 为了使F_1 是一个权齐次多项式, 其权次为$4n-1$, 则有$\overline{G_1}(u,v)=0$, 且

$$\begin{cases}(k_0+4cn)a_n=0,\\4b(i+1)(2c-1)a_{i+1}+\dfrac{1}{b}(k_0+4ic+2(n-i))a_i=0,\qquad i=0,1,\cdots,n-1,\\(k_0+4ic+2(n-i))a_i=0,\qquad i=0,1,\cdots,n-1.\end{cases}\tag{25}$$

进一步, 条件 (25) 可等同以下条件:

(ⅰ) $c=1/2$, $k_0=-2n$, 且存在$i_0\in0,1,\cdots,n$, 使得$a_{i_0}\neq0$;

(ⅱ) $c\neq1/2$, $k_0=-2n$, $a_0\neq0$, 对$i=1,2,\cdots,n$, 有$a_i=0$.

这里对两个条件进行说明, 我们首先假设$2c-1=0$. 于是条件 (25) 可以被简化为

$$\begin{cases}(k_0+2n)a_n=0,\\\dfrac{1}{b}(k_0+2n)a_i=0,\qquad i=0,1,\cdots,n-1.\end{cases}\tag{26}$$

由式 (26) 可以看出, 当$k_0\neq-2n$时, 对$i=0,1,\cdots,n$, 有$a_i=0$, 此时$F_0=0$. 将$F_0=0$代入式 (11), 可以发现, 对$i=1,2,\cdots,n$, 有$F_i=0$, 则$F=0$, Darboux 多项式不存在; 当$k_0=-2n$时, 对$i=0,1,\cdots,n$, a_i可以为任意实数, 但须存在$i_0\in0,1,\cdots,n$, 使得$a_{i_0}\neq0$(否则有$F_0=0$), 即为条件 (ⅰ); 现在我们假设$2c-1\neq0$, 由式 (25) 的第二个式子可以看出, 若$a_0=0$, 则一定有$a_1=0$, 同理递推, 对$i=2,3,\cdots,n$, 有$a_i=0$, 所以$a_0\neq0$(否则有$F_0=0$); 在式 (25) 的第二个式子和第三个式子中, 令$i=0$, 则有

$$\begin{cases}4b(2c-1)a_1+\dfrac{1}{b}(k_0+2n)a_0=0,\\(k_0+2n)a_0=0.\end{cases}\tag{27}$$

由于$a_0\neq0$, 则必须有$k_0+2n=0$, 于是可以得到$a_1=0$, 递推有$a_i=0,i=2,3,\cdots,n$, 即为条件 (ⅱ).

接下来, 我们分别在这两个条件下进行计算.

条件（ⅰ） 当$c=1/2,k_0=-2n$, 且存在$i_0\in0,1,\cdots,n$, 使得$a_{i_0}\neq0$时, 有$F_1=0$. 由式 (11), 当$j=2$时, 计算得

$$L[F_2]=\sum_{i=0}^{n}4icPa_ix(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i}-\sum_{i=0}^{n}2a_i(n-i)xy(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i-1}.$$

通过使用变换 (15) 和 (17), 我们得到以下常微分方程:

$$\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}\frac{\mathrm{d}\overline{F_2}}{\mathrm{d}w}=-\sum_{i=0}^{n}2a_i(n-i)\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}u^{2i}v^{n-i-1}+\sum_{i=0}^{n}4icPa_i\sqrt{u+2bw}u^{2i-1}v^{n-i}. \tag{28}$$

将方程 (28) 关于w求积分, 得到

$$F_2(x,y,z)=\overline{F_2}(u,v,w)=-\sum_{i=0}^{n-1}2a_i(n-i)u^{2i}v^{n-i-1}w+\sum_{i=0}^{n}4icPa_iu^{2i-1}v^{n-i}\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{v-w^2}}+\overline{G_2}(u,v), \tag{29}$$

其中$\overline{G_2}(u,v)$是光滑函数. 由于$F_2(x,y,z)=\overline{F_2}(u,v,w)$是权次为$4n-2$的权齐次多项式, 则有

$$4icPa_i=0,\qquad i=0,1,\cdots,n. \tag{30}$$

由条件 (ⅰ), 我们得到$P=0$, 且有

$$F_2(x,y,z)=-\sum_{i=0}^{n-1}2a_i(n-i)(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i-1}z+\sum_{i=1}^{n}b_i(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i}, \tag{31}$$

这里b_i是实常数, 其中$i=0,1,\cdots,n-1$. 同样地, 由式 (11), 当$j=3$时, 计算得

$$L[F_3]=\sum_{i=0}^{n-1}2a_i(n-i)(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i-1}z-\sum_{i=1}^{n}b_i(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i}.$$

类似地, 通过计算, 我们得到

$$\overline{F_3}(u,v,w)=\sum_{i=0}^{n-1}2(n-i)a_iu^{2i}v^{n-i-1}\int\frac{w\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}-\sum_{i=1}^{n}b_iu^{2i-1}v^{n-i}\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+\overline{G_3}(u,v). \tag{32}$$

由于F_3是权次为$4n-3$的权齐次多项式, 则有$\overline{G_3}(u,v)=0$, 且

$$\begin{cases}2(n-i)a_i=0, & i=0,1,\cdots,n-1,\\ b_i=0, & i=1,2,\cdots,n,\end{cases} \tag{33}$$

这表明$F_2=0,F_3=0$. 循环计算, 当$i=4,5,\cdots,m$时, 我们可以得到$F_i=0$. 由式 (33) 的第一个式子得到, 对$i=0,1,\cdots,n-1$, 有$a_i=0$. 结合条件, 存在$i_0\in 0,1,\cdots,n$, 使得$a_{i_0}\neq 0$. 由此可得, 系统 (8) 的 Darboux 多项式为$F=a_n(x^2-2bz)^{2n}$, 对应的余因子为$-2n$. 回到系统 (1), 我们得到系统 (1) 的 Darboux 多项式为$F=a_n(x^2+2bz-2b)^{2n}$, 对应的余因子为$-2n$.

条件（ⅱ）当$c\neq 1/2$, $k_0=-2n$, $a_0\neq 0$, 且对$i=1,2,\cdots,n$, 有$a_i=0$时, 我们有$F_0=a_0(y^2+z^2)^n,F_1=0$. 由式 (11), 当$j=2$时, 计算得

$$L[F_2]=-2nxya_0(y^2+z^2)^{n-1}. \tag{34}$$

由于F_2是权次为$4n-2$的权齐次多项式, 则有

$$F_2=-2na_0(y^2+z^2)^{n-1}z+\sum_{i=1}^{n}b_i(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i}, \tag{35}$$

这里b_i是实常数, 其中$i=0,1,\cdots,n-1$. 接下来, 由式 (11), 当$j=3$时, 计算得

$$L[\overline{F_3}]=2na_0v^{n-1}w+\sum_{i=1}^{n}(2i(2c-1)-2c)b_iu^{2i-1}v^{n-i}+\sum_{i=1}^{n}2b(2c-1)(2i-1)b_iu^{2i-2}v^{n-i}w. \tag{36}$$

于是我们有

$$\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}\frac{\mathrm{d}\overline{F_3}}{\mathrm{d}w}=2na_0v^{n-1}w+\sum_{i=1}^{n}(2i(2c-1)-2c)b_iu^{2i-1}v^{n-i}+\sum_{i=1}^{n}2b(2c-1)(2i-1)b_iu^{2i-2}v^{n-i}w. \tag{37}$$

将方程 (37) 关于w求积分, 得到

$$\overline{F_3}=\sum_{i=1}^{n}(2i(2c-1)-2c)b_iu^{2i-1}v^{n-i}\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+\sum_{i=1}^{n}2b(2c-1)(2i-1)b_iu^{2i-2}v^{n-i}\int\frac{w\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+2na_0v^{n-1}\int\frac{w\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+\overline{G_3}(u,v).\tag{38}$$

由于F_3是权次为$4n-3$的权齐次多项式, 则有$\overline{G_3}(u,v)=0$, 且

$$\begin{cases}2na_0+2b(2c-1)b_1=0,\\(2i(2c-1)-2c)b_i=0, & i=1,2,\cdots,n,\\2b(2c-1)(2i-1)b_i=0, & i=2,3,\cdots,n,\end{cases}\tag{39}$$

这表明$F_3=0$. 因为$a_0\neq0$, $c\neq1/2$, 由式 (39) 的第一个式子知, $b_1\neq0$; 由式 (39) 的第三个式子知$b_i=0, i=2,3,\cdots,n$, 由式 (39) 的第二个式子, 令$i=1$, 有$(c-1)b_1=0$, 于是求得$c=1$, $b_1=-a_0n/b$. 代入式 (35), 我们有

$$F_2=-2na_0(y^2+z^2)^{n-1}z-\frac{na_0}{b}(x^2-2bz)(y^2+z^2)^{n-1}=-a_0n(y^2+z^2)^{n-1}\left(\frac{x^2}{b}\right)=a_0C_n^1(y^2+z^2)^{n-1}\left(-\frac{x^2}{b}\right).\tag{40}$$

将F_3代入式 (11), 当$j=4$时, 我们求得

$$L[F_4]=-2na_0P\left(\frac{x}{b}\right)(y^2+z^2)^{n-1}+2n(n-1)a_0\left(\frac{x^3}{b}\right)y(y^2+z^2)^{n-2}.\tag{41}$$

与F_3类似的求解方法, 我们求得

$$\overline{F_4}=-\frac{2na_0P}{b}v^{n-1}\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{v-w^2}}+2n(n-1)a_0\left(\frac{u}{b}+w\right)wv^{n-2}+\overline{G_4}(u,v),\tag{42}$$

其中$\overline{G_4}(u,v)$是关于u, v的光滑函数. 由于F_4是权次为$4n-4$的权齐次多项式, 于是我们有$-2na_0P/b=0$, 即$P=0$, 那么$\overline{F_4}$ 可写成

$$\overline{F_4}=2n(n-1)a_0\left(\frac{u}{b}+w\right)wv^{n-2}+\sum_{i=0}^{n-1}b_i^{(2)}(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i-1},\tag{43}$$

这里$b_i^{(2)}$是任意实数, 其中$i=1,2,\cdots,n-1$. 将F_3, F_4代入式 (11), 当$j=5$ 时, 我们通过计算得到

$$F_5=\left[\frac{2n(n-1)a_0}{b}uv^{n-2}+\sum_{i=0}^{n-1}4bib_i^{(2)}u^{2i-1}v^{n-i-1}\right]\int\frac{w\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+\sum_{i=0}^{n-1}2(i-1)b_i^{(2)}u^{2i}v^{n-i-1}\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+\overline{G_5}(u,v),\tag{44}$$

此处$\overline{G_5}(u,v)$是关于u, v的光滑函数. 由于F_5是权次为$4n-5$的权齐次多项式, 于是我们有$\overline{G_5}(u,v)=0$, 且有

$$\begin{cases}2(i-1)b_i^{(2)}=0, & i=0,1,\cdots,n-1,\\\dfrac{2n(n-1)a_0}{b}uv^{n-2}+\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}4bib_i^{(2)}u^{2i-1}v^{n-i-1}=0, & i=0,1,\cdots,n-1,\end{cases}\tag{45}$$

这表明$F_5=0$. 在式 (45) 的第二个式子中, 令$i=1$, 得到$\left(\dfrac{2n(n-1)a_0}{b}-4bb_1^{(2)}\right)uv^{n-2}=0$, 于是有

$$\begin{cases}b_1^{(2)}=\dfrac{n(n-1)a_0}{2b^2},\\b_i^{(2)}=0, & i=0,1,\cdots,n-1.\end{cases}\tag{46}$$

将$b_i^{(2)}$代入F_4中, 我们有

$$F_4=a_0C_n^2(y^2+z^2)^{n-2}\left(-\frac{x^2}{b}\right)^2.\tag{47}$$

循环计算, 我们得到

$$F_{2i}=a_0C_n^i(y^2+z^2)^{n-i}\left(-\frac{x^2}{b}\right)^i,\ F_{2i+1}=0,\qquad i\geqslant 5,\ 2i\leqslant m. \tag{48}$$

因此系统 (8) 的 Darboux 多项式为

$$F=\sum_{i=0}^{n}C_n^ia_0(y^2+z^2)^{n-i}\left(-\frac{x^2}{b}\right)^i=a_0\left(y^2+z^2-\frac{x^2}{b}\right)^n, \tag{49}$$

对应的余因子为$-2n$. 回到系统 (1), 我们得到系统 (1) 的 Darboux 多项式为$F=a_0\left(y^2+z^2-2z+1-\dfrac{x^2}{b}\right)^n$, 对应的余因子为$-2n$.

2.2 F_0的形式为式 (21)

将F_0代入式 (11) 的第二个方程, 我们计算得到

$$L[F_1]=\sum_{i=1}^{n}(k_0+2(2i-1)c+2(n-i))a_i(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i}+\sum_{i=1}^{n}(4bc-2b)(2i-1)a_i(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i}z. \tag{50}$$

与上一种情况计算方法相似, 我们求出

$$\begin{aligned}\overline{F_1}=&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b}(k_0+2(2i-1)c+2(n-i))a_iu^{2i-1}v^{n-i-1}\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}+\\&\sum_{i=0}^{n}\left((4bc-2b)(2i+1)a_{i+1}+\frac{1}{b}(k_0+2(2i-1)c+2(n-i))a_i\right)u^{2i+1}v^{n-i-1}\int\frac{w\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+\\&\sum_{i=1}^{n}3(k_0+2(2i-1)c+2(n-i))a_iu^{2i-1}v^{n-i-1}\int\frac{w^2\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+\overline{G_1}(u,v),\end{aligned} \tag{51}$$

这里$\overline{G_1}(u,v)$是关于u,v的任意光滑函数. 由于F_1是一个权次为$4n-3$的权齐次多项式, 有$\overline{G_1}(u,v)=0$, 且

$$\begin{cases}2b(2c-1)(2i+1)a_{i+1}+\dfrac{1}{b}(k_0+2(2i-1)c+2(n-i))a_i=0, & i=0,1,\cdots,n,\\3(k_0+2(2i-1)c+2(n-i))a_i=0, & i=1,2,\cdots,n,\end{cases} \tag{52}$$

其中$a_0=a_{n+1}=0$. 进一步, 条件 (52) 可以等同以下条件:

(ⅰ) $c=1/2$, $k_0=-2n+1$, 且存在$i_0\in 1,2,\cdots,n$, 使得$a_{i_0}\neq 0$;

(ⅱ) $c\neq 1/2$, $F_0=0$.

这里对两个条件进行说明. 我们首先假设$2c-1=0$, 于是条件 (52) 可以被简化为

$$(k_0-1+2n)a_i=0,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{53}$$

若$k_0-1+2n\neq 0$, 则对$i=1,2,\cdots,n$, 必须有$a_i=0$, 此时$F_0=0$, Darboux 多项式不存在. 若$k_0-1+2n=0$, 则须存在$i_0\in 1,2,\cdots,n$,使得$a_{i_0}\neq 0$, 否则$F_0=0$, 即为条件 (ⅰ). 现在假设$2c-1\neq 0$, 于是由$a_0=a_{n+1}=0$和条件 (52) 的第一个式子, 可以看出, 对$i=1,2,\cdots,n$, 有$a_i=0$, 则有$F_0=0$, 即为条件 (ⅱ). 显而易见, 当$F_0=0$时, 系统 (8) 不存在 Darboux 多项式, 所以对条件情况 (ⅱ) 不再进行分析. 现在我们计算系统 (10) 在条件 (ⅰ) 下的 Darboux 多项式.

当$c=1/2$, $k_0=-2n+1$, 且存在$i_0\in 1,2,\cdots,n$, 使得$a_{i_0}\neq 0$时, 有$F_1=0$. 由式 (11), 当$j=2$时, 计算得

$$L[F_2]=\sum_{i=1}^{n}2cPa_i(2i-1)x(x^2-2bz)^{2i-2}(y^2+z^2)^{n-i}-\sum_{i=1}^{n-1}a_i(n-i)2xy(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i-1}. \tag{54}$$

按照之前类似的计算, 我们能够得到

$$\frac{\mathrm{d}\overline{F_2}}{\mathrm{d}w}=\sum_{i=1}^{n}2cPa_i(2i-1)\frac{1}{\sqrt{v-w^2}}u^{2i-2}v^{n-i}-\sum_{i=1}^{n-1}2a_i(n-i)u^{2i-1}v^{n-i-1}. \tag{55}$$

将式 (55) 关于w求积分, 得到

$$\overline{F_2}=\sum_{i=1}^{n}2cPa_i(2i-1)\arctan\left(\frac{w}{\sqrt{v-w^2}}\right)u^{2i-2}v^{n-i}-\sum_{i=1}^{n-1}2a_i(n-i)u^{2i-1}v^{n-i-1}w+\overline{G_2}(u,v). \tag{56}$$

由于F_2是权次为$4n-4$的权齐次多项式, 则有

$$2cPa_i(2i-1)=0. \tag{57}$$

由于存在$i_0\in 1,2,\cdots,n$, 使得$a_{i_0}\neq 0$, 且$c=1/2$, 则$P=0$. 于是F_2可写为

$$F_2=-\sum_{i=1}^{n-1}2(n-i)a_i(x^2-2bz)^{2i-1}(y^2+z^2)^{n-i-1}z+\sum_{i=0}^{n-1}b_i(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i-1}, \tag{58}$$

这里b_i是实常数, 其中$i=0,1,\cdots,n-1$. 接下来, 由式 (11), 当$j=3$时, 计算得

$$L[F_3]=\sum_{i=1}^{n-1}2(n-i)a_i(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i-1}-\sum_{i=0}^{n-1}b_i(x^2-2bz)^{2i}(y^2+z^2)^{n-i-1}z. \tag{59}$$

类似地, 我们得到常微分方程 (对于固定的u,v):

$$\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}\frac{\mathrm{d}\overline{F_3}}{\mathrm{d}w}=\sum_{i=1}^{n-1}2(n-i)a_iu^{2i}v^{n-i-1}-\sum_{i=0}^{n-1}b_iu^{2i}v^{n-i-1}w. \tag{60}$$

将方程 (60) 关于w求积分, 得到

$$\overline{F_3}(u,v,w)=\sum_{i=1}^{n-1}2(n-i)a_iu^{2i}v^{n-i-1}\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}-\sum_{i=0}^{n-1}b_iu^{2i}v^{n-i-1}\int\frac{w\mathrm{d}w}{\sqrt{u+2bw}\sqrt{v-w^2}}+\overline{G_3}(u,v). \tag{61}$$

由于F_3是权数为$4n-5$的权齐次多项式, 则有$\overline{G_3}(u,v)=0$, 并且有

$$\begin{cases}b_i=0, & i=0,1,\cdots,n-1,\\ 2(n-i)a_i=0, & i=1,2,\cdots,n-1,\end{cases} \tag{62}$$

这表明$F_3=0$, 且对$i=1,2,\cdots,n-1$, 有$a_i=0$, 对$i=0,1,\cdots,n-1$, 有$b_i=0$. 此时$F_2=0$. 循环计算, 可以得到$F_i=0, i=4,5,\cdots,n$. 根据条件 (ⅰ), 存在$i_0\in 1,2,\cdots,n$, 使得$a_{i_0}\neq 0$, 于是有$a_n\neq 0$, 因此系统 (8) 的 Darboux 多项式为$F=a_n(x^2-2bz)^{2n-1}$, 余因子为$-2n+1$. 回到系统 (1), 我们得到系统 (1) 的 Darboux 多项式为$F=a_n(x^2+2bz-2b)^{2n-1}$, 对应的余因子为$-2n+1$.

定理 1 证毕.

3 结　论

基于加权齐次多项式和特征曲线的方法, 通过求解线性偏微分方程, 研究了 Vallis 系统的 Darboux 多项式和不变代数曲面问题. 最终, 在适当的参数条件下, 我们得到了 Vallis 系统的三类 Darboux 多项式. 除了 Darboux 多项式和不变代数曲面问题, Vallis 系统的首次积分和代数可积性等问题也值得思考.

参考文献(References):

[1] 李小虎, 张定一, 宋自根. 时滞耦合惯性项神经系统的多混沌路径共存[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(6): 636-645. (LI Xiaohu, ZHANG Dingyi, SONG Zigen. Multistage coexistence of different chaotic routes in a delayed neural system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(6): 636-645.(in Chinese))

[2] 李海涛, 丁虎, 陈立群, 等. 三稳态能量收集系统的同宿分岔及混沌动力学分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(12): 1311-1322. (LI Haitao, DING Hu, CHEN Liqun, et al. Homoclinic bifurcations and chaos thresholds of tristable piezoelectric vibration energy harvesting systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(12): 1311-1322.(in Chinese))

[3] DARBOUX G. Mémorire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré(mélanges)[J]. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1878, **2**(10): 60-200.

[4] POINCARÉ H. Sur I'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré

Ⅰ[J]. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1891, **5**: 161-191.

[5] 马文秀. 一族Liouville可积的有限维Hamilton系统[J]. 应用数学和力学, 1992, **13**(4): 349-357.（MA Wenxiu. A hierarchy of Liouville integrable finite-dimensional hamiltonian systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, **13**(4): 349-357.(in Chinese))

[6] LABRUNIE S. On the polynomial first integrals of the (a, b, c) Lotka-Volterra system[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1996, **37**(11): 5539-5550.

[7] OLLAGNIER J M. Rational integration of the Lotka-Volterra system[J]. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 1999, **123**(6): 437-466.

[8] LLIBRE J, ZHANG X. Invariant algebraic surfaces of the Rikitake system[J]. *Journal of Physics A*: *Mathematical and Theoretical*, 2000, **33**(42): 7613-7635.

[9] LLIBRE J, ZHANG X. Invariant algebraic surfaces of the Lorenz system[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2002, **43**(3): 1622-1645.

[10] SWINNERTON-DYER P. The invariant algebraic surfaces of the Lorenz system[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2002, **132**(3): 385-393.

[11] LÜ T H, ZHANG X. Darboux polynomials and algebraic integerability of the Chen system[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, **17**(8): 2739-2748.

[12] DENG X J, CHEN A Y. Invariant algebraic surfaces of the Chen system[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, **21**(6): 1645-1651.

[13] MURILO C, LLIBRE J, CLAUDIA V. Invariant algebraic surfaces and Hopf bifurcation of a finance model[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, **28**(12): 1850150.

[14] AYBAR I K, AYBAR O O, DUKARIC M, et al. Dynamical analysis of a two prey-one predator system with quadratic self interaction[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, **333**(15): 118-132.

[15] FERRAGUT A, GALINDO C, MONSERRAT F. On the computation of Darboux first integrals of a class of planar polynomial vector fields[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, **478**(2): 743-763.

[16] DIAS F S, LLIBRE J, VALLS C. Global dynamics of a virus model with invariant algebraic surfaces[J]. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*(*Series 2*), 2020, **69**: 535-546.

[17] DIAS F S, VALLS C. Global dynamics of the Maxwell-Bloch system with invariant algebraic surfaces[J]. *Dynamical Systems*, 2020, **35**(4): 668-681.

[18] EGGER J. Stochastically driven large-scale circulations with multiple equilibria[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1981, **38**(12): 2606-2618.

[19] MCREARY J P, ANDERSON D L T. A simple model of El Niño and the southern oscillation[J]. *Monthly Weather Review*, 1984, **112**: 934-946.

[20] CANE M A, ZEBIAK S E. A theory for El Niño and the southern oscillation[J]. *Science*, 1985, **228**(4703): 1085-1087.

[21] ANDERSON D L T, MCREARY J P. Slowly propagating disturbances in a coupled ocean atmosphere model[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1985, **42**(6): 615-630.

[22] VALLIS G K. Conceptual models of El Niño and the southern oscillation[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1988, **93**: 13979-13991.

[23] KRISHCHENKO A, STARKOV K. Localization of compact invariant compact sets of nonlinear time varying systems[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, **18**(5): 1599-1604.

[24] EUZEBIO R, LLIBRE J. Periodic solutions of El Niño model through the Vallis differential system[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*: *A*, 2014, **34**(9): 3455-3469.

[25] GARAY B, INDIG B. Chaos in Vallis' asymmetric Lorenz model for El Niño[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2015, **75**: 253-262.

[26] BORGHEZAN M, RECH P C. Chaos and periodicity in Vallis model for El Niño[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2017, **97**: 15-18.

[27] RAJAGOPAL K, JAFARI S, PHAM V, et al. Anti-monotonicity, bifurcation and multistability in the Vallis model for El Niño[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, **29**(3): 1950032.