　http://www.applmathmech.cn

磁微极流方程组紧的拉回吸收集的存在性*

田从洋,　孙文龙

(长江大学 信息与数学学院, 湖北 荆州 434023)

摘要: 在二维有界区域上研究了磁微极流方程组的拉回动力学行为.运用半群方法和 ε- 正则性方法,结合 Sobolev 空间嵌入理论,在不同条件下,分别证明了空间 $\hat{H}$ 和空间 $\hat{V}$ 中紧的拉回吸收集的存在性.

关　键　词: 磁微极流方程组; 紧的拉回吸收集; 半群方法; ε- 正则性方法

中图分类号: O175.29　　**文献标志码:** A　　DOI: 10.21656/1000-0887.450334

Existence of the Compact Pullback Absorbing Family for Magneto-Micropolar Fluid Equations

TIAN Congyang,　SUN Wenlong

(*School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou, Hubei* 434023, *P.R.China*)

Abstract: The pullback dynamics of magneto-micropolar fluid equations was studied in 2D bounded domains. Exactly, the existence of the compact pullback absorbing family in space $\hat{H}$ and space $\hat{V}$ was proved with the semigroup method and the ε- regularity method combined with the Sobolev space embedding theory under different conditions, respectively.

Key words: magneto-micropolar fluid; compact pullback absorbing family; semigroup method, ε- regularity method

0　引　　言

本文研究了二维有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 上的非自治磁微极流方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - (\kappa + \chi)\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla \boldsymbol{u} + \nabla\left(p + \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{h}|^2\right) = 2\chi\,\nabla\times\omega + \gamma\,\boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{h} + \boldsymbol{f}, \\ k\dfrac{\partial \omega}{\partial t} - \mu\Delta\omega + 4\chi\omega + k\boldsymbol{u}\cdot\nabla\omega = 2\chi\,\nabla\times\boldsymbol{u} + g, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} - \alpha\Delta\boldsymbol{h} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{h} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期:** 2024-12-18; **修订日期:** 2025-01-21

基金项目: 国家自然科学基金(12301294);湖北省自然科学基金(2022CFB661);湖北省教育厅科学研究计划青年人才基金项目(Q20231309)

作者简介: 田从洋(1999—),男,硕士(E-mail: yangtze24@126.com);
孙文龙(1988—),男,副教授,博士(通讯作者. E-mail: wenlongsun1988@163.com).

引用格式: 田从洋, 孙文龙. 磁微极流方程组紧的拉回吸收集的存在性[J]. 应用数学和力学, 2025, **46**(11): 1491-1500.

其中未知函数 $\boldsymbol{u}=((u_1(x,t),u_2(x,t)),\omega=\omega_3(x,t)$ 和 $\boldsymbol{h}=(h_1(x,t),h_2(x,t))$ 分别表示速度、粒子旋转角速度和磁场强度, $p=p(x,t)$ 表示压力, $\boldsymbol{f}=(f_1(x,t),f_2(x,t))$ 和 $g=g_3(x,t)$ 分别表示外力和力矩, $\kappa,\chi,\gamma,k,\mu,\alpha$ 是正常数,简便起见,令 $\gamma=k=1$.另外

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2},\nabla\times\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_2},-\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right).$$

磁微极流方程组是由 Galdi 和 Rionero[1] 首次提出的,它可以用来描述在磁场下导电微极流的运动.从物理上讲,微极流是具有微观结构的流体,它表示由悬浮在黏性介质中的刚性、随机粒子组成的流体[2-4].如果磁场 $h=0$, 则方程组(1)便退化为微极流方程组.

磁微极流普遍存在于现实生产、生活中,研究其解的适定性及其动力学行为具有重要的理论价值和现实指导意义,这也一直是从事相关工作的学者们广泛关注与研究的内容.例如: 文献[5-7]等研究了磁微极流方程组解的存在性、唯一性和正则性.与此同时,磁微极流方程组解的动力学行为也受到了广泛的研究.例如 Łukaszewicz 和 Sadowski[8] 利用能量方法在二维无界区域上证明了一致吸引子的存在性.Matsuura[9] 证明了二维有界区域上磁微极流方程组指数吸引子的存在性.最近,Yang 等[10] 证明了三维磁微极流方程组轨道吸引子的存在性.更多结果可参见文献[11-12]及其参考文献.

考虑区域 Ω 的边界光滑并满足如下初边值条件:

$$\boldsymbol{w}(x,\tau)=(\boldsymbol{u}(x,\tau),\omega(x,\tau),\boldsymbol{h}(x,\tau))\coloneqq(\boldsymbol{u}_\tau,\omega_\tau,\boldsymbol{h}_\tau),\quad x\in\Omega,\ \tau\in\mathbb{R},\tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}(x,t)=\omega(x,t)=\boldsymbol{h}(x,t)=\boldsymbol{0},\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[\tau,+\infty).\tag{3}$$

文献[13-14]分别在如下假设条件(H1)和(H2)下证明了系统(1)—(3)在空间 $\hat{H}$ 和空间 $\hat{V}$ 中拉回吸收集的存在性,见后文引理 4 和引理 8.

(H1) $(\boldsymbol{u}_\tau(x),\omega_\tau(x),\boldsymbol{h}_\tau(x))\in\hat{H}$, $(\boldsymbol{f},g,\boldsymbol{0})\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\hat{V}^*)$, $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\lambda_1\delta_1\theta}\|(\boldsymbol{f},g,\boldsymbol{0})\|^2_{\hat{V}^*}\mathrm{d}\theta<+\infty$;

(H2) $(\boldsymbol{u}_\tau(x),\omega_\tau(x),\boldsymbol{h}_\tau(x))\in\hat{V}$, $(\boldsymbol{f},g,\boldsymbol{0})\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\hat{H})$, $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\lambda_1\delta_1\theta}\|(\boldsymbol{f},g,\boldsymbol{0})\|^2\mathrm{d}\theta<+\infty$.

适当提高外力 $\boldsymbol{f}$ 及力矩 g 的正则性,即假设

(H3) $(\boldsymbol{u}_\tau,\omega_\tau,\boldsymbol{h}_\tau)\in\hat{H}$,存在 $p>2$ 使得 $(\boldsymbol{f},g,\boldsymbol{0})\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\hat{V}^*)$ 且 $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\lambda_1\delta_1\theta}\|(\boldsymbol{f},g,\boldsymbol{0})\|^2_{\hat{V}^*}\mathrm{d}\theta<+\infty$;

(H4) $(\boldsymbol{u}_\tau,\omega_\tau,\boldsymbol{h}_\tau)\in\hat{V}$, 存在 $p>2$ 使得 $(\boldsymbol{f},g,\boldsymbol{0})\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\hat{H})$ 且 $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\lambda_1\delta_1\theta}\|(\boldsymbol{f},g,\boldsymbol{0})\|^2\mathrm{d}\theta<+\infty$.

本文将运用半群方法和 ε- 正则化方法,结合空间嵌入理论,分别在假设条件(H3)和(H4)下证明空间 $\hat{H}$ 和空间 $\hat{V}$ 中紧的拉回吸收集的存在性.

本文剩余部分安排如下: 第 1 节,做了一些准备工作;第 2 节, 证明了系统(1)—(3)紧的拉回吸收集的存在性.

1 预 备 知 识

本节中,我们将首先引入一些相关记号,然后定义几个重要的算子,并给出相关估计,最后引入一些重要的定义及相关结论.

在本文中, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{N}$ 表示自然数集; $L^p(\Omega)$ 和 $W^{m,p}(\Omega)$ 分别表示 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间(参见文献[1]).特别地, $H^m(\Omega)\coloneqq W^{m,2}(\Omega)$.令:

$\mathcal{V}\coloneqq\{\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\times\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\mid\varphi=(\varphi_1,\varphi_2),\nabla\cdot\varphi=0\}$;

$H\coloneqq\mathcal{V}$ 在 $L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 范数下的完备化空间,范数为 $\|\cdot\|_H$, 对偶空间记为 H^*;

$V\coloneqq\mathcal{V}$ 在 $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ 范数下的完备化空间,范数为 $\|\cdot\|_V$,对偶空间记为 V^*;

$\hat{H}\coloneqq H\times L^2(\Omega)\times H$,范数为 $\|\cdot\|_{\hat{H}}$,对偶空间记为 $\hat{H}$;

$\hat{V}\coloneqq V\times H_0^1(\Omega)\times V$,范数为 $\|\cdot\|_{\hat{V}}$,对偶空间记为 $\hat{V}^*$.

为了记号的简便, 在不引起混淆的情况下, 范数 $\|\cdot\|_{L^2}$, $\|\cdot\|_H$ 和 $\|\cdot\|_{\hat{H}}$ 简记为 $\|\cdot\|$. 另外,$(\cdot,\cdot)$和

$\langle\cdot,\cdot\rangle$分别表示空间的内积和对偶积.令 X 表示一般的 Banach 空间:

$L^p(I;X)$:=取值于 X 空间中,在区间 I 上 p 次可积的函数全体,其范数为

$$\|\varphi\|_{L^p(I;X)}=\left(\int_I\|\varphi\|_X^p\mathrm{d}t\right)^{1/p},\qquad\forall\varphi(t,x)\in L^p(I;X),1\leqslant p<\infty;$$

$\mathcal{C}(I;X)$:=取值于 X 空间中,在区间 I 上连续的函数全体, 其范数为

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}(I;X)}=\max_{t\in I}\|\varphi(t,x)\|_X;$$

$L_{\mathrm{loc}}^{\ 2}(I;X)$:=取值于 X 空间中,在区间 I 上局部二次可积的函数全体;

$\hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow$表示两个空间之间的紧嵌入关系.

然后,对于任意的 $\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{u},\omega,\boldsymbol{h})\in\hat{V}$, 定义算子 A 和算子 S 如下:

$$\langle A(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{\Phi}\rangle:=(\kappa+\chi)(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\xi)+\mu(\nabla\omega,\nabla\eta)+\alpha(\nabla\boldsymbol{h},\nabla\zeta),\qquad\forall\boldsymbol{\Phi}:=(\xi,\eta,\zeta)\in\hat{V},$$

$$\langle S(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{\Phi}\rangle:=-2\chi(\nabla\times\omega,\xi)-2\chi(\nabla\times\boldsymbol{u},\eta)+4\chi(\omega,\eta),\qquad\forall\boldsymbol{\Phi}=(\xi,\eta,\zeta)\in\hat{V}.$$

注 1　根据算子 A 的定义和椭圆算子的谱理论,存在由 A 的特征值构成的序列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\hat{H}$ 空间的标准正交基构成的序列 $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset D(A):=(H^2(\Omega))^5\cap\hat{V}$, 满足 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n,\cdots\}$ 在 $\hat{V}$ 空间中稠密.对任意的 $n\in\mathbb{N}$, 有

$$A\boldsymbol{e}_n=\lambda_n\boldsymbol{e}_n,\qquad 0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots,$$

且当 $n\to\infty$ 时,$\lambda_n\to\infty$.

另外,对于任意 $\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{u},\omega,\boldsymbol{h}),\boldsymbol{v}=(\phi,\varphi,\psi),\boldsymbol{\Phi}=(\xi,\eta,\zeta)\in\hat{V}$, 定义双线性算子 $B:\hat{V}\times\hat{V}\to\hat{V}^*$ 如下:

$$\langle B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),\Phi\rangle=b_1(\boldsymbol{u},\phi,\xi)+b_2(\boldsymbol{u},\varphi,\eta)+b_1(\boldsymbol{u},\psi,\zeta)-b_1(\boldsymbol{h},\phi,\zeta)-b_1(\boldsymbol{h},\psi,\xi),$$

其中

$$b_1(\boldsymbol{u},\phi,\xi):=\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega u_i\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\xi_j\mathrm{d}x,\qquad\forall\boldsymbol{u},\phi,\xi\in V,$$

$$b_2(\boldsymbol{u},\varphi,\eta):=\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega u_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\eta\mathrm{d}x,\qquad\forall\boldsymbol{u}\in V,\ \varphi,\eta\in H_0^1(\Omega).$$

不难验证

$$b_1(\boldsymbol{u},\phi,\xi)=-b_1(\boldsymbol{u},\xi,\phi),\ b_1(\boldsymbol{u},\phi,\phi)=0,\qquad\forall\boldsymbol{u},\phi,\xi\in V,$$

$$b_2(\boldsymbol{u},\varphi,\eta)=-b_2(\boldsymbol{u},\eta,\varphi),\ b_2=(\boldsymbol{u},\varphi,\varphi)=0,\qquad\forall\boldsymbol{u}\in V,\ \varphi,\eta\in H_0^1(\Omega).$$

因此

$$\langle B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}\rangle=0,\qquad\forall\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\in\hat{V}.$$

关于算子 A,B 和 S 有如下重要的估计,可参见文献[13,16-17].

引理 1　① 存在正常数 c_1, 使得

$$|\langle B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{\Phi}\rangle|\leqslant\begin{cases}c_1\|A\boldsymbol{w}\|\,\|\boldsymbol{v}\|_{\hat{V}}\|\boldsymbol{\Phi}\|,&\forall\boldsymbol{w}\in D(A),\ \boldsymbol{v}\in\hat{V},\ \boldsymbol{\Phi}\in\hat{H},\\ c_1\|\boldsymbol{w}\|^{1/2}\|\boldsymbol{w}\|_{\hat{V}}^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{\hat{V}}^{1/2}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\hat{V}},&\forall\boldsymbol{w},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\Phi}\in\hat{V}.\end{cases}$$

② 存在正常数 $\delta_1=\min\{\kappa,\mu,\alpha\}$,$\delta_2:=\delta_2(\chi,\Omega)$,$c_2$ 和 c_3, 使得

$$\delta_1\|\boldsymbol{w}\|_{\hat{V}}^2\leqslant\langle A\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\rangle+\langle S(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{w}\rangle,\qquad\forall\boldsymbol{w}\in\hat{V},$$

$$\|S(\boldsymbol{w})\|\leqslant\delta_2\|\boldsymbol{w}\|_{\hat{V}},\qquad\forall\boldsymbol{w}\in\hat{V},$$

$$c_2\langle A\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\rangle\leqslant\|\boldsymbol{w}\|_{\hat{V}}\leqslant c_3\langle A\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\rangle,\qquad\forall\boldsymbol{w}\in\hat{V}.$$

基于上述算子,系统(1)—(3)在分布 $D'((\tau,+\infty),\hat{V}^*)$ 意义下的弱形式可表示如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{w}(t)+A\boldsymbol{w}(t)+B(\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{w}(t))+S(\boldsymbol{w}(t))=\boldsymbol{F}(t),\\ \boldsymbol{w}(\tau)=(\boldsymbol{u}(\tau),\omega(\tau),\boldsymbol{h}(\tau)):=\boldsymbol{w}_\tau,\qquad\tau\in\mathbb{R},\\ \boldsymbol{u}(x,t)=\omega(x,t)=\boldsymbol{h}(x,t)=\boldsymbol{0},\qquad(x,t)\in\partial\Omega\times[\tau,+\infty),\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{w}(x,t):=(\boldsymbol{u}(x,t),\omega(x,t),\boldsymbol{h}(x,t)),\boldsymbol{F}(t):=(\boldsymbol{f}(t),g(t),\boldsymbol{0})$.

定义 1　对于任意的 $T>\tau$, 我们称函数 $\boldsymbol{w}:=(\boldsymbol{u},\omega,\boldsymbol{h})$ 为系统(4)的弱解,如果

$$\boldsymbol{w} \in L^{\infty}(\tau,T;\hat{H}) \cap L^{2}(\tau,T;\hat{V}),$$

且在分布 $\mathcal{D}'(\tau,+\infty)$ 意义下成立,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{\Psi}) + \langle A\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{\Psi}\rangle + \langle B(\boldsymbol{w}(t),\boldsymbol{w}(t)),\boldsymbol{\Psi}\rangle + \langle S(\boldsymbol{w}(t)),\boldsymbol{\Psi}\rangle = \langle \boldsymbol{F}(t),\boldsymbol{\Psi}\rangle,$$

$$\forall\, \boldsymbol{\Psi} \in \hat{V}.$$

进一步,若 $\boldsymbol{w}$ 为系统弱解,且对任意 $T>\tau$,有 $\boldsymbol{w} \in L^{\infty}(\tau,T;\hat{V}) \cap L^{2}(\tau,T;D(A))$,则称 $\boldsymbol{w}$ 为系统(4)的强解.

系统(4)解的存在唯一性已经在文献[6-7,13]中通过 Galerkin 方法得到.

引理 2 ① 若 $\boldsymbol{F}(t) \in L^{2}(\tau,T;\hat{V}^{*})$ 且 $\boldsymbol{w}_{\tau} \in \hat{H}$,则系统(4)存在连续依赖于初值的唯一弱解 $\boldsymbol{w}(t;\tau,w_{\tau})$,且满足对任意 $T>\tau$,有

$$\boldsymbol{w}(t;\tau,\boldsymbol{w}_{\tau}) \in \mathcal{C}([\tau,T];\hat{H}) \cap L^{2}(\tau,T;\hat{V}).$$

② 若 $\boldsymbol{F}(t) \in L^{2}(\tau,T;\hat{H})$ 且 $\boldsymbol{w}_{\tau} \in \hat{V}$,则系统(4)存在连续依赖于初值的唯一强解 $\boldsymbol{w}(t;\tau,w_{\tau})$,满足对任意 $T>\tau$,有

$$\boldsymbol{w}(t;\tau,\boldsymbol{w}_{\tau}) \in \mathcal{C}([\tau,T];\hat{V}) \cap L^{2}(\tau,T;D(A)).$$

定义 2 称 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是空间 X 上的过程,如果它满足以下性质:

(i) $U(t,\tau):X\to X,\ \forall\,\tau\leqslant t$;

(ii) $U(\tau,\tau)$ 是恒等映射;

(iii) $U(t,s)U(s,\tau)=U(t,\tau),\ \forall\,\tau\leqslant s\leqslant t$.

此外,对任意的 $t\geqslant\tau$,若 $U(t,\tau)$ 是 X 上的连续映射,则称 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 为 X 上的连续过程.

根据引理 2,在空间 $\hat{H}$ 和空间 $\hat{V}$ 上可定义如下连续过程:

$$U(t,\tau):(\boldsymbol{u}_{\tau},\boldsymbol{\omega}_{\tau},\boldsymbol{h}_{\tau}) \mapsto U(t,\tau)(\boldsymbol{u}_{\tau},\boldsymbol{\omega}_{\tau},\boldsymbol{h}_{\tau}) =$$

$$(\boldsymbol{u}(t;\tau,\boldsymbol{u}_{\tau}),\boldsymbol{\omega}(t;\tau,\boldsymbol{\omega}_{\tau}),\boldsymbol{h}(t;\tau,\boldsymbol{h}_{\tau})) := (\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{h}(t)), \qquad \forall\, t\geqslant\tau.$$

令 X 表示 $\hat{H}$ 空间或 $\hat{V}$ 空间,$\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的所有非空子集构成的集合族,$\mathcal{D}^{X}$ 表示由非空集族 $\hat{D}=\{D(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{P}(X)$ 构成的集合类,其中 $D(t)$ 中的函数满足如下性质:

$$\lim_{\tau\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1\delta_1\tau}\sup_{w\in D(\tau)}\|\boldsymbol{w}\|^{2}\right)=0.$$

定义 3 设 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是空间 X 上的过程,若 X 上的集合族 $\hat{D}_0=\{D_0(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\subset\mathcal{P}(X)$ 满足:对任意 $t\in\mathbb{R}$ 和 $\hat{D}=\{D(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\in\mathcal{D}$,存在 $\tau_0(t,\hat{D})\leqslant t$ 使得 $U(t,\tau)D(\tau)\subset D_0(t),\ \forall\,\tau\leqslant\tau_0(t,\hat{D})$,则称 $\hat{D}_0$ 是过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 的拉回 $\mathcal{D}$- 吸收集.

2 紧的拉回吸收集的存在性

本节将研究系统(4)解算子产生过程 $U(t,\tau)$ 的拉回吸收集与系统外力及力矩 (f,g) 正则性的关系.具体地,我们将运用 ϵ- 正则性方法[18]和半群方法[19],分别在(H3)和(H4)的假设条件下,证明空间 $\hat{H}$ 和空间 $\hat{V}$ 中紧的拉回吸收集的存在性.为此,我们首先定义一个分形维数空间 $D(A^{\alpha})$,作为算子 A^{α} 和解析半群 e^{-At} 的定义域.

定义 4 给定 $\alpha>0$,令

$$D(A^{\alpha})=\left\{\boldsymbol{w}\in\hat{H}\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{2\alpha}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{e}_n)^{2}<+\infty\right\},$$

并对任意 $\boldsymbol{w}\in D(A^{\alpha})$,$A^{\alpha}\boldsymbol{w}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\alpha}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\in\hat{H}$,其中 $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n\geqslant1}$ 由注 1 给定.

注 2 对任意 $\alpha>0$,$D(A^{\alpha})$ 是一个 Hilbert 空间,其内积定义为

$$(\boldsymbol{w},\varphi)_{D(A^{\alpha})}=(A^{\alpha}\boldsymbol{w},A^{\alpha}\varphi),$$

$D(A^{-\alpha})$ 表示 $D(A^{\alpha})$ 的对偶空间.特别地,$D(A^{0})=\hat{H}$,$D(A^{1/2})=\hat{V}$,$D(A^{-1/2})=\hat{V}^{*}$.

为了记号的方便,记 $\|\varphi\|_{\alpha}:=\|A^{\alpha}\varphi\|$.

定义 5　对任意的 $\boldsymbol{w} \in \hat{H}$ 和 $t \geqslant 0$, 令 $\mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{w} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n t}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n \in \hat{H}$.

2.1　空间 $\hat{H}$ 上紧的拉回吸收集的存在性

本小节致力于证明在(H3)的假设条件下,过程 $U(t,\tau)$ 在 $\hat{H}$ 空间中的紧的拉回吸收集的存在性.为此,我们首先给出解的如下先验估计,详见文献[13].

引理 3　假设(H1)成立且 $\boldsymbol{w}:=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{h})$ 是系统(4)的弱解,则对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\hat{D} = \{D(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \in \mathfrak{D}^{\hat{H}}$, 存在 $\tau_0(\hat{D},t) < t-2$, 使得对任意 $\tau \leqslant \tau_0(\hat{D},t)$, $\boldsymbol{w}_\tau \in D(\tau)$, 有

$$\| \boldsymbol{w}(r;\tau,\boldsymbol{w}_\tau) \|^2 \leqslant \rho_1(t), \qquad \forall r \in [t-2,t], \tag{5}$$

$$\int_{r-1}^{r} \| \boldsymbol{w}(s;\tau,\boldsymbol{w}_\tau) \|_V^2 \mathrm{d}s \leqslant \rho_2(t), \qquad \forall r \in [t-1,t], \tag{6}$$

其中

$$\rho_1(t) = 1 + \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1\delta_1(t-2)}}{\delta_1}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\lambda_1\delta_1 s} \| \boldsymbol{F}(s) \|_{V^*}^2 \mathrm{d}s,$$

$$\rho_2(t) = \frac{1}{\delta_1}\left(\max_{\theta\in[t-2,t]}\rho_1(\theta) + \frac{1}{\delta_1}\int_{t-2}^{t} \| \boldsymbol{F}(s) \|_{V^*}^2 \mathrm{d}s\right).$$

引理 4[13]　在引理 3 的条件下,集合族 $\hat{D}_0 = \{D_0(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $D_0(t) = \bar{\mathcal{B}}(0,\mathscr{R}_{\hat{H}}(t))$ 是空间 $\hat{H}$ 中关于过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 的拉回 $\mathfrak{D}^{\hat{H}}$- 吸收集,其中

$$\bar{\mathcal{B}}_{\hat{H}}(0,\mathscr{R}_{\hat{H}}(t)) = \{\boldsymbol{w} \in \hat{H} \mid \| \boldsymbol{w} \|^2 \leqslant \mathscr{R}_{\hat{H}}(t)\},$$

$$\mathscr{R}_{\hat{H}}(t) := 1 + \frac{\mathrm{e}^{-\delta_1\lambda_1(t-2)}}{\delta_1}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\delta_1\lambda_1\theta} \| \boldsymbol{F}(\theta) \|_{V^*}^2 \mathrm{d}\theta$$

是空间 $\hat{H}$ 中的闭球.

下面关于算子 A 和 B 的估计已在文献[20]的引理 3.3 和引理 3.4 中得到了验证,为了读者的方便,我们在此给出详细的证明过程.

引理 5　① 对任意的 $\beta > 0$, 有 $\| A^\beta \mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{w} \| \leqslant c_\beta^{-\beta} \| \boldsymbol{w} \|$, $\forall \boldsymbol{w} \in \hat{H}$;

② 对任意的 $0 < \varepsilon < 1/4$, 存在常数 $\bar{c}_\varepsilon$ 和 $\tilde{c}_\varepsilon$, 使得

$$B: D(A^\varepsilon) \times D(A^\varepsilon) \to D(A^{-(1-2\varepsilon)}), \ \| B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) \|_{-(1-2\varepsilon)} \leqslant \bar{c}_\varepsilon \| \boldsymbol{w} \|_\varepsilon^2,$$

$$S: D(A^\varepsilon) \to D(A^{-(1-2\varepsilon)}), \ \| S(\boldsymbol{w}) \|_{-(1-2\varepsilon)} \leqslant \tilde{c}_\varepsilon \| \boldsymbol{w} \|_\varepsilon.$$

证明　对任意 $\boldsymbol{w} \in \hat{H}$, $\boldsymbol{w} = \sum_{n=1}^{\infty}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n$, 有

$$\| A^\beta \mathrm{e}^{-At}\boldsymbol{w} \| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\beta \mathrm{e}^{-\lambda_n t}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n \right\| = \left\| t^{-\beta}\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n t)^\beta \mathrm{e}^{-\lambda_n t}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n \right\| \leqslant$$

$$t^{-\beta} \sup_{\gamma\in[0,+\infty)} \gamma^\beta \mathrm{e}^{-\gamma} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\boldsymbol{w},\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n \right\| = c_\beta t^{-\beta} \| \boldsymbol{w} \|,$$

其中 $c_\beta := \sup_{\gamma\in[0,\infty]} \gamma^\beta \mathrm{e}^{-\gamma}$.故①的结论成立.

对任意的 $\varepsilon \in (0,1/4)$, 有

$$D(A^{1-2\varepsilon}) \hookrightarrow W^{2-4\varepsilon,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1/2\varepsilon}(\Omega), \ D(A^\varepsilon) \hookrightarrow W^{2\varepsilon,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2/(1-2\varepsilon)}(\Omega).$$

因此,对任意 $\varphi \in D(A^{1-2\epsilon})$, 由上述 Sobolev 空间嵌入关系和 Hölder 不等式,可知

$$| \langle B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}),\varphi \rangle | = | \langle B(\boldsymbol{w},\varphi),\boldsymbol{w} \rangle | \leqslant$$

$$\| \boldsymbol{w} \|_{L^{2/(1-2\epsilon)}(\Omega)} \| \boldsymbol{w} \|_{L^{2/(1-2\epsilon)}(\Omega)} \| \nabla\varphi \|_{L^{1/2\epsilon}} \leqslant \bar{c}_\epsilon \| \boldsymbol{w} \|_\epsilon^2 \| \varphi \|_{1-2\epsilon},$$

$$| \langle S(\boldsymbol{w}),\varphi \rangle | = | -2\chi(\nabla\times\boldsymbol{\omega},\xi) - 2\chi(\nabla\times\boldsymbol{u},\eta) + 4\chi(\boldsymbol{\omega},\eta) | \leqslant$$

$$c_\chi \int_\Omega | \boldsymbol{w} | \cdot | \nabla\varphi | \, \mathrm{d}x \leqslant c \| \boldsymbol{w} \|_{L^{(1/1-2\epsilon)}(\Omega)} \| \nabla\varphi \|_{L^{1/2\epsilon}(\Omega)} \leqslant \tilde{c}_\epsilon \| \boldsymbol{w} \|_\epsilon \| \varphi \|_{1-2\epsilon},$$

其中 $\bar{c}_\varepsilon$ 和 $\tilde{c}_\varepsilon$ 是正常数.②的结论成立,引理得证. □

接下来,我们证明系统解的如下重要估计.

引理 6 假设(H3)成立,则对任意 $\varepsilon < \min\{1/4, 1/2 - 1/p\}$, $t \in \mathbb{R}$ 和 $\hat{D} \in \mathbb{D}^{\hat{H}}$,有 $\{U(t,\tau)\boldsymbol{w}_\tau \mid \boldsymbol{w}_\tau \in D(\tau), \tau \leqslant \tau_0(\hat{D},t)\}$ 在 $D(A^\epsilon)$ 中有界,其中 $\tau_0(\hat{D},t)$ 来自引理 3.

证明 其证明过程类似于文献[20]中的引理 3.5.首先,对于任意固定的 $t \in \mathbb{R}$, $\hat{D} \in \mathbb{D}^{\hat{H}}$, $\tau \leqslant \tau_0(\hat{D},t)$, $\boldsymbol{w}_\tau \in D(\tau)$,记 $\boldsymbol{w}_\sigma(s) = \boldsymbol{w}(\sigma + s;\tau,\boldsymbol{w}_\tau)$, $\boldsymbol{F}_\sigma(s) = \boldsymbol{F}(\sigma + s)$.由常数变差公式,系统(4)的弱解 $\boldsymbol{w}$ 可表示为

$$\boldsymbol{w}(t) = \mathrm{e}^{-A(t-s)}\boldsymbol{w}(s) + \int_s^t \mathrm{e}^{-A(t-\theta)}[\boldsymbol{F}(\theta) - B(\boldsymbol{w}(\theta),\boldsymbol{w}(\theta)) - S(\boldsymbol{w}(\theta))]\mathrm{d}\theta, \quad \forall s \in [\tau,t]. \tag{7}$$

特别地,存在 $\sigma > \tau$(稍后确定),使得对任意 $s \in [0, t-\sigma]$,有

$$\boldsymbol{w}_\sigma(s) = \mathrm{e}^{-As}\boldsymbol{w}_\sigma(0) + \int_0^s \mathrm{e}^{-A(s-\theta)}[\boldsymbol{F}_\sigma(\theta) - B(\boldsymbol{w}_\sigma(\theta),\boldsymbol{w}_\sigma(\theta)) - S(\boldsymbol{w}_\sigma(\theta))]\mathrm{d}\theta. \tag{8}$$

由式(5)和(6)可知,对任意 $\sigma \in [t-1, t)$, $s \in [0, t-\sigma]$,有

$$\| \boldsymbol{w}_\sigma(s) \| \leqslant \rho_1^{1/2}(t), \int_0^s \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_V^2 \mathrm{d}\theta \leqslant \rho_2(t). \tag{9}$$

根据引理 5,取 $\sigma \in [t-1, t)$ 且 $s \leqslant t - \sigma$,将式(8)在 $D(A^\varepsilon)$ 空间中取范数并乘以 s^ε,可得

$$\begin{aligned} & s^\varepsilon \| \boldsymbol{w}_\sigma(s) \|_\varepsilon \leqslant \\ & s^\varepsilon \| \mathrm{e}^{-As}\boldsymbol{w}_\sigma(0) \|_\varepsilon + s^\varepsilon \int_0^s \| \mathrm{e}^{-A(s-\theta)}[\boldsymbol{F}_\sigma(\theta) - B(\boldsymbol{w}_\sigma(\theta),\boldsymbol{w}_\sigma(\theta)) - S(\boldsymbol{w}_\sigma(\theta))] \|_\varepsilon \mathrm{d}\theta \leqslant \\ & c_\varepsilon \| \boldsymbol{w}_\sigma(0) \| + c_{1-\varepsilon} s^\varepsilon \int_0^s (s-\theta)^{-(1-\varepsilon)} [\| B(\boldsymbol{w}_\sigma(\theta),\boldsymbol{w}_\sigma(\theta)) \|_{-(1-2\varepsilon)} + \\ & \| S(\boldsymbol{w}_\sigma(\theta)) \|_{-(1-2\varepsilon)}] \mathrm{d}\theta + c_{1/2+\varepsilon} s^\varepsilon \int_0^s (s-\theta)^{-1/2-\epsilon} \| \boldsymbol{F}_\sigma(\theta) \|_{\hat{V}^*} \mathrm{d}\theta \leqslant L_1 + L_2 + L_3, \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned} L_1 &:= c_\varepsilon \rho_1^{1/2}(t) + c_{1/2+\varepsilon} s^\varepsilon \int_0^s (s-\theta)^{-1/2-\epsilon} \| \boldsymbol{F}_\sigma(\theta) \|_{\hat{V}^*} \mathrm{d}\theta, \\ L_2 &:= c_{1-\varepsilon} \bar{c}_\varepsilon s^\varepsilon \int_0^s (s-\theta)^{-(1-\varepsilon)} \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_\varepsilon^2 \mathrm{d}\theta, \\ L_3 &:= c_{1-\varepsilon} \tilde{c}_\varepsilon s^\varepsilon \int_0^s (s-\theta)^{-(1-\epsilon)} \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_\varepsilon \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

为了找到 $s^\varepsilon \| \boldsymbol{w}_\sigma(s) \|_\varepsilon$ 的一个上界,下面分别估计 L_1, L_2 和 L_3.首先,由于 $0 < \varepsilon < 1/2 - 1/p$,因此,对于任意的 $s \in [0, t-\sigma] \subset [0,1]$ 有

$$\begin{aligned} L_1 & \leqslant c_\epsilon \rho_1^{1/2}(t) + c_{1/2+\epsilon} \left(\int_0^s (s-\theta)^{(-1/2-\epsilon)/(1-1/p)} \mathrm{d}\theta \right)^{1-1/p} \left(\int_0^s \| \boldsymbol{F}_\sigma(\theta) \|_{\hat{V}^*}^p \mathrm{d}\theta \right)^{1/p} \leqslant \\ & c_\epsilon \rho_1^{1/2} + c_{1/2+\epsilon} \left(\int_0^s r^{(-1/2-\epsilon)/(1-1/p)} \mathrm{d}r \right)^{1-1/p} \left(\int_{t-1}^t \| \boldsymbol{F}(r) \|_{\hat{V}^*}^p \mathrm{d}r \right)^{1/p} := \varphi_1(t). \end{aligned} \tag{11}$$

不难验证,对于任意 $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(t)$ 在假设(H3)的条件下有界.另外,由式(9)和如下插值不等式(见文献[21]中式(2.24)):

$$\| \boldsymbol{w}(\theta) \|_\varepsilon^{1/2} \leqslant \| \boldsymbol{w}(\theta) \|^{1/2-\varepsilon} \| \boldsymbol{w}(\theta) \|_{\hat{V}}^{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0, 1/4],$$

可得

$$\begin{aligned} L_2 & \leqslant \bar{c}_\varepsilon c_{1-\varepsilon} s^\varepsilon \int_0^s (s-\theta)^{-(1-\varepsilon)} \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_\epsilon^{3/2} \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|^{1/2-\epsilon} \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_{\hat{V}}^{\epsilon} \mathrm{d}\theta \leqslant \\ & \bar{c}_\varepsilon c_{1-\varepsilon} s^\varepsilon \rho_1^{(1-2\varepsilon)/4}(t) \left(\int_0^s \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_{\hat{V}}^2 \mathrm{d}\theta \right)^{\varepsilon/2} \left(\int_0^s (s-\theta)^{-2(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)} \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_\varepsilon^{3/(2-\varepsilon)} \mathrm{d}\theta \right)^{1-\varepsilon/2} \leqslant \\ & \varphi_2(\sigma,t) s^\varepsilon \left(\int_0^s (s-\theta)^{-2(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)} \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_\varepsilon^{3/(2-\varepsilon)} \mathrm{d}\theta \right)^{1-\varepsilon/2}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\varphi_2(\sigma,t) := \{\bar{c}_\varepsilon, \tilde{c}_\varepsilon\} c_{1-\varepsilon} \rho_1^{(1-2\varepsilon)/4}(t) \left(\int_\sigma^t \| \boldsymbol{w}(\theta) \|_{\hat{V}}^2 \mathrm{d}\theta \right)^{\varepsilon/2}$.类似地,

$$L_3 \leqslant \tilde{c}_\varepsilon c_{1-\varepsilon} s^\varepsilon \rho_1^{(1-2\varepsilon)/4} \left(\int_0^s \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_{\hat{V}}^2 \mathrm{d}\theta \right)^{\varepsilon/2} \left(\int_0^s (s-\theta)^{-2(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)} \| \boldsymbol{w}_\sigma(\theta) \|_\varepsilon^{1/(2-\varepsilon)} \mathrm{d}\theta \right)^{1-\varepsilon/2} \leqslant$$

$$\varphi_2(\sigma,t)s^{\varepsilon}\left(\int_0^s(s-\theta)^{2(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)}\parallel \boldsymbol{w}_{\sigma}(\theta)\parallel_{\varepsilon}^{1/(2-\varepsilon)}\mathrm{d}\theta\right)^{1-\varepsilon/2}. \tag{13}$$

令 $X(s):=s^{\varepsilon}\parallel \boldsymbol{w}_{\sigma}(s)\parallel_{\varepsilon}$, 将式(11)—(13)代入式(10),可得

$$X(s)\leqslant \varphi_1(t)+\varphi_2(\sigma,t)s^{\varepsilon}\left[\left(\int_0^s(s-\theta)^{-2(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)}\theta^{-3\varepsilon/(2-\varepsilon)}X^{3/(2-\varepsilon)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1-\varepsilon/2}+\left(\int_0^s(s-\theta)^{-2(1-\varepsilon)//(2-\varepsilon)}\theta^{-\varepsilon/(2-\varepsilon)}X^{1/(2-\varepsilon)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1-\varepsilon/2}\right].$$

接下来,引入一个重要结论(详细证明见本小节末尾).

命题 1　对于任意 $s\in[0,t-\sigma]$, 若存在连续函数 $Y(s)$ 满足 $Y(0)>X(0)$ 且

$$Y(s)\geqslant \varphi_1(t)+\varphi_2(\sigma,t)s^{\varepsilon}\left[\left(\int_0^s(s-\theta)^{-2(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)}\theta^{-3\varepsilon/(2-\varepsilon)}Y^{3/(2-\varepsilon)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1-\varepsilon/2}+\left(\int_0^s(s-\theta)^{-2(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)}\theta^{-\varepsilon/(2-\varepsilon)}Y^{1/(2-\varepsilon)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1-\varepsilon/2}\right],$$

则 $Y(s)\geqslant X(s)$, $\forall s\in[0,t-\sigma]$.特别地,对于任意固定的 $k_0>1$, 成立 $k_0\varphi_1(t)\geqslant X(s)$, $\forall s\in[0,t-\sigma]$.

综上可得,对任意 $w_{\tau}\in D(\tau),\tau\leqslant\tau_0(\hat{D}_0,t)$, 有

$$\parallel A^{\varepsilon}\boldsymbol{w}(t;\tau,w_{\tau})\parallel=(t-\sigma)^{-\varepsilon}X(t-\sigma)\leqslant k_0(t-\sigma)^{-\varepsilon}\varphi_1(t).$$

由 $\varphi_1(t)$ 的有界性,可知引理 6 成立. □

定理 1　设(H3)成立,则过程 $U(t,\tau)$ 在 $\hat{H}$ 空间中存在紧的拉回吸收集.

证明　基于引理 6,由空间紧嵌入关系 $D(A^{\varepsilon})\hookrightarrow\hookrightarrow\hat{H}$, 可得空间 $\hat{H}$ 中紧的拉回吸收集的存在性.定理得证. □

命题 1 的证明　若此命题不成立, 则存在 $s_0\in[0,t-\sigma]$, 使得 $X(s_0)>Y(s_0)$.令 $\hat{s}=\sup\{s\in[0,t-\sigma]\mid X(r)<Y(r),\forall r\in[0,s)\}>0$, 则由 $Y(s)$ 的连续性,有

$$X(\hat{s})=Y(\hat{s}),\text{且 } X(s)<Y(s),\qquad \forall s\in[0,\hat{s}).$$

另外

$$\begin{aligned}X(\hat{s})&\leqslant \varphi_1(t)+\varphi_2(\sigma,t)\,s^{\epsilon}\left(\int_0^{\hat{s}}(\hat{s}-\theta)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}\theta^{-3\epsilon/(2-\epsilon)}X^{3/(2-\epsilon)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1-\epsilon/2}+\\&\varphi_2(\sigma,t)\left(\int_0^{\hat{s}}(\hat{s}-\theta)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}\theta^{-\epsilon/(2-\epsilon)}X^{1/(2-\epsilon)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1-\epsilon/2}<\\&\varphi_1(t)+\varphi_2(\sigma,t)s^{\epsilon}\left(\int_0^{\hat{s}}(\hat{s}-\theta)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}\theta^{-3\epsilon/(2-\epsilon)}Y^{3/(2-\epsilon)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1-\epsilon/2}+\\&\varphi_2(\sigma,t)s^{\epsilon}\left(\int_0^{\hat{s}}(\hat{s}-\theta)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}\theta^{-\epsilon/(2-\epsilon)}Y^{1/(2-\epsilon)}(\theta)\mathrm{d}\theta\right)^{1-\epsilon/2}\leqslant Y(\hat{s}).\end{aligned}$$

上式与 $X(\hat{s})=Y(\hat{s})$ 矛盾,因此假设不成立,故 $Y(s)\geqslant X(s)$, $\forall s\in[0,t-\sigma]$.

对于 $\forall s\in[0,t-\sigma]$, 令 $Y(s):=k_0\varphi_1(t)$, $k_0>1$.显然,当 $s=0$ 时,有 $Y(0)>X(0)$.接下来,我们验证:对于 $\forall s\in(0,t-\sigma]\subset(0,1]$, $\epsilon\in(0,1/4]$, 以下不等式成立:

$$k_0\varphi_1(t)\geqslant \varphi_1(t)+k_0\sqrt{k_0}\varphi_1^{3/2}(t)\varphi_2(\sigma,t)s^{\epsilon}\left(\int_0^s(s-\theta)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}\theta^{-3\epsilon/(2-\epsilon)}\mathrm{d}\theta\right)^{1-\epsilon/2}+\sqrt{k_0}\varphi_1^{1/2}(t)\varphi_2(\sigma,t)s^{\epsilon}\left(\int_0^s(s-\theta)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}\theta^{-\epsilon/(2-\epsilon)}\mathrm{d}\theta\right)^{1-\epsilon/2}. \tag{14}$$

首先,令 $\theta=sr$, 则有

$$\begin{aligned}&s^{\epsilon}\left(\int_0^s(s-\theta)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}\theta^{-3\epsilon/(2-\epsilon)}\mathrm{d}\theta\right)^{1-\epsilon/2}=\\&s^{\epsilon}\left(\int_0^1 s^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}(1-r)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}s^{-3\epsilon/(2-\epsilon)}r^{-3\epsilon/(2-\epsilon)}s\mathrm{d}r\right)^{1-\epsilon/2}=\\&\left(\int_0^1(1-r)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}r^{-3\epsilon/(2-\epsilon)}\mathrm{d}r\right)^{1-\epsilon/2}=a_{\epsilon},\\&s^{\epsilon}\left(\int_0^s(s-\theta)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}\theta^{-\epsilon/(2-\epsilon)}\mathrm{d}\theta\right)^{1-\epsilon/2}=\end{aligned}$$

$$s^{\epsilon}\left(\int_0^1 s^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}(1-r)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}s^{-\epsilon/(2-\epsilon)}r^{-\epsilon/(2-\epsilon)}s\mathrm{d}r\right)^{1-\epsilon/2}=$$

$$s^{\epsilon}\left(\int_0^1(1-r)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}r^{-\epsilon/(2-\epsilon)}\mathrm{d}r\right)^{1-\epsilon/2}\leqslant$$

$$\left(\int_0^1(1-r)^{-2(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}r^{-\epsilon/(2-\epsilon)}\mathrm{d}r\right)^{1-\epsilon/2}=b_{\epsilon}.$$

为证明式(14)成立,只需证明

$$k_0\sqrt{k_0}\varphi_1^{1/2}(t)\varphi_2(\sigma,t)a_{\epsilon}+\sqrt{k_0}\varphi_1^{-1/2}(t)\varphi_2(\sigma,t)b_{\epsilon}\leqslant k_0-1,\qquad k_0>1. \tag{15}$$

类似于文献[22]中的式(21),我们可证得:对于 $\forall\varepsilon>0$, $t\in\mathbb{R}$, $\hat{D}\in\mathbb{D}^{\hat{H}}$,存在 $\sigma:=\sigma(\varepsilon,t,\hat{D})\in(t-1,t)$,使得

$$\varphi_2(\sigma,t)=\{\bar{c}_{\varepsilon},\tilde{c}_{\varepsilon}\}c_{1-\varepsilon}\rho_1^{(1-2\varepsilon)/4}(t)\left(\int_{\sigma}^{t}\|\boldsymbol{w}(\theta)\|_{\hat{V}}^{2}\mathrm{d}\theta\right)^{\varepsilon/2}\leqslant\varepsilon,\qquad\forall\tau\in\tau_0(\hat{D},t),\ \boldsymbol{w}_{\tau}\in D(\tau).$$

由 ε 的任意性,可知存在 σ,使得式(15)成立,继而式(14)成立,命题 1 得证.

2.2 空间 $\hat{V}$ 上紧的拉回吸收集的存在性

本小节我们将进一步证明当提升系统初值以及外力和力矩的正则性时,过程 $U(t,\tau)$ 在 $\hat{V}$ 空间中紧的拉回吸收集的存在性.

给定假设条件(H2),对于系统(4)的解有如下正则性估计,见文献[14]中的引理 3.2.

引理 7 假设(H2)成立,则对任意 $t\in\mathbb{R}$ 和 $\hat{D}=\{D(t)\mid t\in\mathbb{R}\}\in\mathbb{D}^{\hat{H}}$,存在 $\tau_0'(\hat{D},t)<t-2$,使得对任意 $\tau\leqslant\tau_0'(\hat{D},t)$ 和 $w_{\tau}\in D(\tau)$ 成立,则

$$\|\boldsymbol{w}(r;\tau,\boldsymbol{w}_{\tau})\|_{\hat{V}}^{2}\leqslant\rho_3(t),\qquad\forall r\in[t-2,t],$$

其中

$$\rho_3(t):=\max_{r\in[t-2,t]}g\left\{c(\delta_2,\delta_1,\lambda_1)\left(\rho_1(r)+\int_{r-1}^{r}\|\boldsymbol{F}(\theta)\|^{2}\mathrm{d}\theta\right)\times\right.$$

$$\left.\exp\left[c(c_3,\delta_1,\lambda_1)(\rho_1^2(r)+\rho_1(r)\int_{r-1}^{r}\|\boldsymbol{F}(\theta)\|^{2}\mathrm{d}\theta)\right]g\right\}.$$

基于引理 7,令 $\{\bar{\mathbb{B}}_{\hat{H}}(0,\rho_1(t))\mid t\in\mathbb{R}\}:=\{\boldsymbol{w}\in\hat{H}\mid\|\boldsymbol{w}(t)\|^{2}\leqslant\rho_1(t)\}\in\mathbb{D}^{\hat{H}}$,可得

引理 8 假设(H2)成立,则集合族

$$\hat{D}_{0,\hat{V}}:=\{D_{0,\hat{V}}(t)=\bar{\mathbb{B}}_{\hat{H}}(0,\rho_1(t))\cap\hat{V}\mid t\in\mathbb{R}\}\in\mathbb{D}^{\hat{H},\hat{V}},$$

并且对任意 $t\in\mathbb{R}$, $\hat{D}\in\mathbb{D}^{\hat{H}}$,存在 $\tau_0'(\hat{D},t)<t$,使得

$$U(t,\tau)D(\tau)\subset\hat{D}_{0,\hat{V}}(t),\qquad\forall\tau\leqslant\tau_0'(\hat{D},t).$$

特别地, $\hat{D}_{0,\hat{V}}$ 关于过程 $\{U(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是拉回 $\mathbb{D}^{\hat{H},\hat{V}}$- 吸收的.

接下来,我们证明有关算子 B, S 和 A 的估计.

引理 9 对任意的 $\epsilon>0$,存在常数 $\bar{\bar{c}}_{\epsilon}$ 和 $\tilde{\tilde{c}}_{\epsilon}$,使得

$$B:\hat{V}\times\hat{V}\to D(A^{-\epsilon}),\ \|B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})\|_{-\epsilon}\leqslant\bar{\bar{c}}\|\boldsymbol{w}\|_{\hat{V}}^{2},\qquad\forall\boldsymbol{w}\in\hat{V},$$

$$S:\hat{V}\to D(A^{-\epsilon}),\ \|S(\boldsymbol{w})\|_{-\epsilon}\leqslant\tilde{\tilde{c}}_{\epsilon}\|\boldsymbol{w}\|_{\hat{V}},\qquad\forall\boldsymbol{w}\in\hat{V}.$$

证明 首先,对任意 $\epsilon>0$,有

$$W^{1,2}(\Omega)\hookrightarrow L^{1/\epsilon},\ D(A^{\epsilon})\hookrightarrow L^{2/(1-2\epsilon)}(\Omega),\ L^{2}(\Omega)\hookrightarrow L^{2/(1+2\epsilon)}(\Omega),$$

结合 Hölder 不等式,可得

$$|\langle B(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}),\boldsymbol{\Phi}\rangle|\leqslant\|\boldsymbol{w}\|_{L^{1/\epsilon}(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{w}\|\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L^{2/(1-2\epsilon)}(\Omega)}\leqslant$$

$$\|\boldsymbol{w}\|_{L^{1/\epsilon}(\Omega)}\|\nabla\boldsymbol{w}\|\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\epsilon}\leqslant\bar{\bar{c}}_{\epsilon}\|\boldsymbol{w}\|_{\hat{V}}^{2}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\epsilon},\qquad\forall\boldsymbol{w}\in\hat{V},\ \boldsymbol{\Phi}\in D(A^{\epsilon}),$$

$$|\langle S(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{\Phi}\rangle|=|-2\chi(\nabla\times\omega,\boldsymbol{\xi})-2\chi(\nabla\times\boldsymbol{u},\eta)+4\chi(\omega,\eta)|\leqslant$$

$$c\|\nabla\boldsymbol{w}\|_{L^{2/(1+2\epsilon)}(\Omega)}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L^{2/(1-2\epsilon)}(\Omega)}\leqslant\tilde{\tilde{c}}_{\epsilon}\|\boldsymbol{w}\|_{\hat{V}}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{\epsilon},$$

$$\forall\boldsymbol{w}\in\hat{V},\ \boldsymbol{\Phi}=(\xi,\eta,\zeta)\in D(A^{\epsilon}).$$

引理得证. □

引理 10　假设(H4)成立,且 $\delta < \min\{1/4, 1/2 - 1/p\}$, 则对任意 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\hat{D} \in \mathfrak{D}^{\hat{H}}$, $\{U(t,\tau)D(\tau) \mid \tau \leqslant \tau_0'(\hat{D},t)\}$ 在 $D(A^{1/2+\delta})$ 中有界.

证明　将式(7)在空间 $D(A^{1/2+\delta})$ 中取范数,并选取 ϵ 使得 $\delta + \epsilon < 1/2$, 由 Hölder 不等式,得

$$
\begin{aligned}
&\| \boldsymbol{w}(t) \|_{1/2+\delta} \leqslant \| \mathrm{e}^{-A}\boldsymbol{w}(t-1) \|_{1/2+\delta} + \int_{t-1}^{t} \| \mathrm{e}^{-A(t-\theta)}\boldsymbol{F}(\theta) \|_{1/2+\delta}\mathrm{d}\theta + \\
&\int_{t-1}^{t} \| \mathrm{e}^{-A(t-\theta)}[B(\boldsymbol{w}(\theta),\boldsymbol{w}(\theta)) + S(\boldsymbol{w}(\theta))] \|_{1/2+\delta}\mathrm{d}\theta \leqslant \\
&c_\delta \| \boldsymbol{w}(t-1) \|_{\hat{V}} + c_{1/2+\delta+\epsilon}\int_{t-1}^{t} (t-\theta)^{-1/2-\delta-\epsilon} \| B(\boldsymbol{w}(\theta),\boldsymbol{w}(\theta)) \|_{-\epsilon}\mathrm{d}\theta + \\
&c_{1/2+\delta+\epsilon}\int_{t-1}^{t} (t-\theta)^{-1/2-\delta-\epsilon} \| S(\boldsymbol{w}(\theta)) \|_{-\epsilon}\mathrm{d}\theta + c_{1/2+\delta}\int_{t-1}^{t} (t-\theta)^{-1/2-\delta} \| \boldsymbol{F}(\theta) \|\mathrm{d}\theta \leqslant \\
&c_\delta \rho_5^{1/2}(t) + c_{1/2+\delta+\epsilon}\bar{\bar{c}}_\epsilon \rho_3(t)\int_{t-1}^{t} (t-\theta)^{1/2-\delta-\epsilon}\mathrm{d}\theta + c_{1/2+\delta+\epsilon}\tilde{\tilde{c}}_\epsilon \rho_3^{1/2}(t)\int_{t-1}^{t} (t-\theta)^{-1/2-\delta-\epsilon}\mathrm{d}\theta + \\
&c_{1/2+\delta}\left[\int_{t-1}^{t} (t-\theta)^{-p(1/2+\delta)/(p-1)}\mathrm{d}\theta\right]^{(p-1)/p}\left[\int_{t-1}^{t} \| \boldsymbol{F}(\theta) \|^p\mathrm{d}\theta\right]^{1/p} \leqslant \\
&\left(c_\delta + \frac{2c_{1/2+\delta+\epsilon}\tilde{\tilde{c}}_\epsilon}{1-2\delta-2\epsilon}\right)\rho_3^{1/2}(t) + \frac{2c_{1/2+\delta+\epsilon}\bar{\bar{c}}_\epsilon}{1-2\delta-2\epsilon}\rho_3(t) + \\
&c_{1/2+\delta}\left[\frac{2(p-1)}{(1-2\delta)p-2}\right]^{(p-1)/p}\left[\int_{t-1}^{t} \| \boldsymbol{F}(\theta) \|^p\mathrm{d}\theta\right]^{1/p} < +\infty .
\end{aligned}
$$

引理得证. □

定理 2　设(H4)成立,则过程 $U(t,\tau)$ 在 $\hat{V}$ 空间中存在紧的拉回吸收集.

证明　基于引理 10,由空间紧嵌入关系 $D(A^{1/2+\delta}) \hookrightarrow\hookrightarrow \hat{V}$, 可得空间 $\hat{V}$ 中紧的拉回吸收集的存在性.定理得证. □

参考文献(References):

[1] GALDI G P, RIONERO S. A note on the existence and uniqueness of solutions of the micropolar fluid equations[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1977, **15**(2): 105-108.

[2] COWIN S C. Polar fluids[J]. *The Physics of Fluids*, 1968, **11**(9): 1919-1927.

[3] ERINGEN A. Theory of micropolar fluids[J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 1966, **16**(1): 16001.

[4] ŁUKASZEWICZ G. *Micropolar Fluids: Theory and Applications*[M]. Boston: Birkhäuser, 1999.

[5] JIA C M, TAN Z, ZHOU J F. Global well-posedness of compressible magneto-micropolar fluid equations[J]. *The Journal of Geometric Analysis*, 2023, **33**: 358.

[6] ROJAS-MEDAR M A. Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution[J]. *Mathematische Nachrichten*, 1997, **188**(1): 301-319.

[7] ROJAS MEDAR M A, BOLDRINI J L. Magneto-micropolar fluid motion: existence of weak solutions[J]. *Revista Matemática Complutense*, 1998, **11**(2): 443-460.

[8] ŁUKASZEWICZ G, SADOWSKI W. Uniform attractor for 2D magneto-micropolar fluid flow in some unbounded domains[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 2004, **55**(2): 247-257.

[9] MATSUURA K. Exponential attractors for 2D magneto-micropolor fluid flow in bounded domain[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2005, **2005**: 634-641.

[10] YANG H J, HAN X L, WANG X, et al. Homogenization of trajectory statistical solutions for the 3D incompressible magneto-micropolar fluids[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems: S*, 2023, **16**(10): 2672-2685.

[11] NICHE C J, PERUSATO C F. Sharp decay estimates and asymptotic behaviour for 3D magneto-micropolar fluids[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2022, **73**: 48.

[12] TAN Z, WU W, ZHOU J. Global existence and decay estimate of solutions to magneto-micropolar fluid equa-

tions[J]. *Journal of Differential Equations*, 2019, **266**(7): 4137-4169.

[13] ZHAO C, LI Y,ŁUKASZEWICZ G. Statistical solution and partial degenerate regularity for the 2D non-autonomous magneto-micropolar fluids[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2020, **71**(4): 141.

[14] LI Y, LI X. Equivalence between invariant measures and statistical solutions for the 2D non-autonomous magneto-micropolar fluid equations[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, **45**(5): 2638-2657.

[15] 田琴, 向长林, 别群益. 三维稳态磁流体动力学方程的 Liouville 定理[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(10): 1250-1259. (TIAN Qin, XIANG Changlin, BIE Qunyi. On the Liouville theorems for 3D stationary magneto-hydrodynamic equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(10): 1250-1259.(in Chinese))

[16] FOIAS C, MANLEY O, ROSA R, et al. *Navier-Stokes Equations and Turbulence*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[17] SUN W. The boundedness and upper semicontinuity of the pullback attractors for a 2D micropolar fluid flows with delay[J]. *Electronic Research Archive*, 2020, **28**(3): 1343-1356.

[18] ARRIETA J M, CARVALHO A N. Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier-Stokes and heat equations[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2000, **352**(1): 285-310.

[19] FUJITA H, KATO T. On the Navier-Stokes initial value problem I[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **26**: 269-315.

[20] SUN W, LI Y. Pullback dynamical behaviors of the non-autonomous micropolar fluid flows with minimally regular force and moment[J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2018, **16**(4): 1043-1065.

[21] TEMAM R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*[M]. New York: Springer-Verlag, 2012.

[22] GARCÍA-LUENGO J, MARÍN-RUBIO P, REAL J, et al. Pullback attractors for the non-autonomous 2D Navier-Stokes equations for minimally regular forcing[J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems: A*, 2014, **34**(1): 203-227.