

剪切荷载作用下圆孔孔边裂纹的解*

段士杰¹, 刘淑红^{2,3}

(1. 石家庄铁道大学 继续教育学院, 石家庄 050043;

2. 石家庄铁道大学 工程力学系, 石家庄 050043;

3. 河北省大型结构健康诊断与控制实验室, 石家庄 050043)

摘要: 基于复变函数的方法,研究了在无限远处剪切荷载作用下,含两个径向不等边裂纹圆孔无限大板的平面问题,得到了应力函数和应力强度因子的解析解.通过算例,给出了通过应力函数得到的应力分量沿坐标轴方向和孔边的分布,同时给出了裂纹尖端的应力强度因子.可以看出,应力分量在裂纹尖端、孔附近变化剧烈,离缺陷稍远处趋于所加荷载,符合 Saint Venant(圣维南)原理.另外,通过有限元计算了以上数值结果,与解析解的结果进行对比,吻合较好,说明了理论公式推导的正确性.

关键词: 裂纹; 应力函数; 应力强度因子; 复变函数; 有限元

中图分类号: O346.1 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.360352

引 言

Bowie^[1]第一个研究了含有孔边裂纹的无限大平板在单向或双向拉伸情况下的平面问题,用一个级数形式的保角映射函数,将孔边裂纹外的无限域映射为单位圆的外部,得到了孔边裂纹的应力强度因子.由于 Bowie 所采用的变换函数具有复杂性和不准确性,接下来许多学者提出了不同方法计算孔边裂纹的应力强度因子.如 Yan^[2]通过边界元的方法,研究了带边裂纹的椭圆孔有限尺寸板的平面问题,得出了裂纹尖端应力强度因子.采用复变函数的方法,郭怀民等^[3]、郭俊宏和刘官厅^[4]、郭怀民和乔文华^[5]分别研究了带单边、对称双边、不对称双边裂纹的圆形、椭圆形孔的无限大板问题,得出了裂纹尖端应力强度因子的精确解,并给出了应力强度因子数值算例.郭俊宏等^[6]研究了幂函数型曲线裂纹的平面弹性问题,给出了远处受单向拉伸荷载下裂纹尖端复合型应力强度因子的一般解.Zhao 等^[7]得到了含一个圆孔边裂纹的应力强度因子的解析式,对其进行叠加,得到含有多个圆孔孔边裂纹的应力强度因子近似公式,并利用有限元计算结果进行了验证.刘淑红等^[8]采用有限元计算了含椭圆孔单边裂纹板在边缘受均布拉伸荷载时,板中的应力分布和应力强度因子.刘淑红等^[9-10]、Du 等^[11]研究了含椭圆孔或裂纹的无限大压电材料在无限远处或在孔边和裂纹面上受荷载时材料和缺陷内电弹场的

* 收稿日期: 2015-12-24; 修订日期: 2016-02-16

基金项目: 河北省自然科学基金(A2015210089);河北省高等学校科学技术研究重点项目(ZD2015101)

作者简介: 段士杰(1968—),男,副教授(E-mail: dsj1968@sohu.com);

刘淑红(1968—),女,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: liush@stdu.edu.cn).

解.Liu 和 Duan^[12-13]得到了含椭圆孔边裂纹的无限大弹性材料在无限远处受荷载的解析解.周妍等^[14]利用有限元对圆孔内单边或双边裂纹平台巴西圆盘应力强度因子进行了标定.高健和刘官厅^[15]研究了含有沿准周期方向穿透的半无限裂纹一维正方准晶的反平面弹性问题,得到了应力场和裂纹尖端应力强度因子的解析解.

从上面的研究情况可以看出,对于孔边裂纹的研究,在拉伸荷载作用下裂纹尖端的 I 型应力强度因子,取得了较成熟的研究成果.但对于应力场的分布,及其他荷载作用下的解,则成果相对较少.本文通过复变函数的方法,得到含圆孔不等边裂纹无限大板在无穷远处剪切荷载作用下的应力函数和裂纹尖端的应力强度因子的解析解.作为算例,给出板内孔和裂纹附近的应力分布及应力强度因子,并与有限元软件 ANSYS 计算结果进行对比,从而证明本文所得应力函数的正确性.

1 基本方程

在直角坐标系下,应力分量 σ_x, σ_y 和 σ_{xy} 用应力函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 表示为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}(\varphi_1'(z)), \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)], \quad (2)$$

式中 $z = x + iy$ 是复变量,上横线表示共轭,“'”、“''”分别表示对 z 求一、二阶导数.

为方便求解,将 z 平面上的变量 z 通过保角变换 $z = \omega(\zeta)$ 变换成 ζ 平面上新的变量 $\zeta = \rho e^{i\theta}$, 将应力函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 表示成 ζ 的函数,引入以下记号:

$$\begin{cases} \varphi(\zeta) = \varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\zeta)], \quad \psi(\zeta) = \psi_1(z) = \psi_1[\omega(\zeta)], \\ \Phi(\zeta) = \varphi_1'(z) = \varphi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \quad \Psi(\zeta) = \psi_1'(z) = \psi'(\zeta)/\omega'(\zeta), \\ \Phi'(\zeta) = \varphi_1''(z)\omega'(\zeta). \end{cases} \quad (3)$$

式(1)用曲线坐标下的应力分量 σ_ρ 和 σ_θ 表示:

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho = 4\text{Re}(\Phi(\zeta)). \quad (4)$$

函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 可根据下式求得

$$\varphi(\zeta) = \frac{1 + \mu}{8\pi}(X + iY)\ln \zeta + B\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad (5)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{3 - \mu}{8\pi}(X - iY)\ln \zeta + (B' + iC')\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta), \quad (6)$$

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_0}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (7)$$

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi_0'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\overline{f_0}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f_0 = i \int (\bar{X} + i\bar{Y}) ds - \frac{X + iY}{2\pi} \ln \sigma - \frac{1 + \mu}{8\pi} (X - iY) \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \sigma - \\ 2B\omega(\sigma) - (B' - iC') \overline{\omega(\sigma)}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中 \bar{X}, \bar{Y}, X 和 Y 分别表示内边界上点的坐标方向的面力和面力的合力.常数 B 和 $B' + iC'$ 与无穷远处的主应力 σ_1 和 σ_2 有关:

$$B = \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad B' + iC' = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)e^{-2i\alpha}, \quad (10)$$

式中 α 是与 x 轴正向逆时针转到主应力 σ_1 的角度。

2 问题和精确解

无限大板中包含圆孔带非对称孔边裂纹,在无穷远处受沿 y 轴方向荷载集度为 q 的剪切荷载作用,坐标选取、孔和裂纹尺寸如图 1(a) 所示。

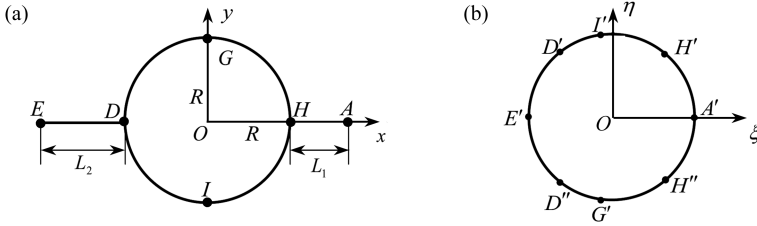


图 1 带不等边裂纹的圆孔变换成单位圆

Fig. 1 Mapping of the circular hole with 2 cracks of unequal lengths into a unit circle

2.1 应力函数

将带不等边裂纹的圆孔外部变换成单位圆的内部,所用的保角变换方程为

$$z = \omega(\zeta) = \frac{R}{4\zeta} (\varepsilon_1(1 + \zeta)^2 + \varepsilon_2(1 - \zeta)^2 + \sqrt{(\varepsilon_1(1 + \zeta)^2 + \varepsilon_2(1 - \zeta)^2)^2 - 16\zeta^2}), \quad (11)$$

$$\varepsilon_i = \frac{(R + L_i)^2 + R^2}{2R(R + L_i)} \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

从式(11)可以看出,图 1(a)中 z 平面上的 4 个点 $A(R + L_1, 0)$, $I(0, -R)$, $E(-R - L_2, 0)$ 和 $G(0, R)$ 分别变为图 1(b)中 ζ 平面上的 $A'(1, 0)$, $I', E'(-1, 0)$, G' , 同时,点 $H(R, 0)$ 和 $D(-R, 0)$ 分别变为 H', H'' 和 D', D'' 。

在无限远处剪切荷载作用情况下,

$$B = 0, B' + iC' = qi, \bar{X} = \bar{Y} = X = Y = 0.$$

因此式(9)简化为

$$f_0 = qi \overline{\omega(\sigma)}. \quad (13)$$

对式(7)中左边的第二项积分,由式(11)、(12),可以得到下列方程备用:

$$\omega'(\zeta) = - \frac{R(1 - \zeta^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4\zeta^2} \left(\frac{\varepsilon_1(1 + \zeta)^2 + \varepsilon_2(1 - \zeta)^2}{\sqrt{(\varepsilon_1(1 + \zeta)^2 + \varepsilon_2(1 - \zeta)^2)^2 - 16\zeta^2}} + 1 \right). \quad (14)$$

在单位圆上有 $\bar{\sigma} = 1/\sigma$, $\overline{\omega'(\sigma)} = \bar{\omega}'(\bar{\sigma})$, 有

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi'_0(\sigma)} = \frac{\sqrt{(\varepsilon_1(1 + \sigma)^2 + \varepsilon_2(1 - \sigma)^2)^2 - 16\sigma^2}}{\sigma(1 - \sigma^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \overline{\varphi'_0(\sigma)}, \quad (15)$$

式中

$$\overline{\varphi'_0(\sigma)} = \bar{a}_1 + \frac{2\bar{a}_2}{\sigma} + \dots + \frac{n\bar{a}_n}{\sigma^{n-1}} + \dots \quad (16)$$

因此, $(\overline{\omega(\sigma)}/\overline{\omega'(\sigma)}) \overline{\varphi'_0(\sigma)}$ 在圆外解析和连续,通过 Cauchy(柯西)积分,得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0. \quad (17)$$

把式(11)、(13)和式(17)代入式(7),得到

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{iqR(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} \zeta. \quad (18)$$

当 $L_1 = L_2 = 0$ 时, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, 带不等边裂纹的圆退化成圆,式(18)变成已知圆孔的结果:

$$\varphi_0(\zeta) = iqR\zeta. \quad (19)$$

式(18)对 ζ 求导,得到下式:

$$\varphi'_0(\zeta) = \frac{iqR(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2}. \quad (20)$$

从式(15)中,可以看出 $(\overline{\omega(\sigma)}/\omega'(\sigma))\varphi'_0(\sigma)$ 在圆内解析,圆内和圆上连续.把式(13)和(20)代入式(8),再次由 Cauchy 积分,得到

$$\psi_0(\zeta) = -\bar{z} \frac{\varphi'_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - qi \left(\omega(\zeta) - \frac{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2} \frac{1}{\zeta} \right). \quad (21)$$

把式(10)、(19)、(21)代入式(5)、(6),得

$$\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta), \quad (22)$$

$$\psi(\zeta) = -\bar{z} \frac{\varphi'_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + qi \frac{R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\zeta}. \quad (23)$$

把式(3)、(22)、(23)代入式(1)、(2),可以得到用 ζ 表示的应力分量 σ_x , σ_y 和 σ_{xy} .在孔边, $\sigma_p = 0$,因此由式(4),有 $\sigma_\theta = 4\Phi(\zeta)$.

2.2 应力强度因子

在 ζ 平面上,裂纹尖端 A 的 I 和 II 型强度因子 K_{IA} 和 K_{IIA} 表示成下式:

$$K_{IA} + iK_{IIA} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \sqrt{\omega(\zeta) - \omega(1)} \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = 2\sqrt{\pi} \frac{\varphi'(1)}{\sqrt{\omega''(1)}}. \quad (24)$$

把式(11)和式(22)代入上式,有

$$K_{IA} = 0, K_{IIA} = q \frac{\sqrt{2\pi R(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1}}}. \quad (25)$$

3 有限元数值结果和讨论

为了与以上导出的解析解比较,有限元模型采用边长为 200 mm 的正方形薄板,圆孔的半径为 $R = 2$ mm,右边裂纹的长度为 $L_1 = 2$ mm,左边裂纹的长度为 $L_2 = 1$ mm.板边缘承受 100 MPa 的均布剪切荷载.缺陷的尺寸与板的尺寸相比非常小,因此模型可看成含圆孔孔边裂纹的无限大板在无限远处受均布剪切载荷的平面问题.

利用对称性结构和反对称荷载,取板 1/2 建模,采用的单元类型是 Plane82.在裂纹尖端 A 设置奇异单元,就可以实现裂纹尖端附近应力场的奇异性,自由划分网格.裂纹面和孔边应力自由,在下边界除了裂纹和圆孔孔边的边界上加反对称位移约束,由于承受的是剪切荷载,ANSYS 程序中无法直接加到左、上、右边界,必须采用表面效应单元.平面问题的表面效应单元,只有 Surface153.选择左、右、上 3 个边界的所有节点,在节点上创建单元,在单元上施加 100

MPa 的均布剪切荷载。

图 2 是半结构的板在剪切荷载下的有限元变形图,从图中可以看出,变形与实际受力情况相符。

3.1 应力分布

在这部分,为了证明所得应力函数的正确性,给出了公式求出的沿坐标轴和孔边的应力分布和有限元数值结果的对比。

图 3 为沿 x 负半轴的无量纲应力 σ_{xy}/q ,为了避免裂纹尖端应力奇异性, x 轴上第一个点离裂纹左尖端为 0.01 mm, x 的取值范围从 -3.01 mm 至 -12 mm.理论和有限元计算的 σ_x/q 和 σ_y/q 的值为 0,在图上未画出,此结果与结构对称和荷载反对称相符合。应力 σ_{xy}/q 在裂纹尖端有明显的应力集中,随离裂纹尖端距离的增加,迅速趋于 1。

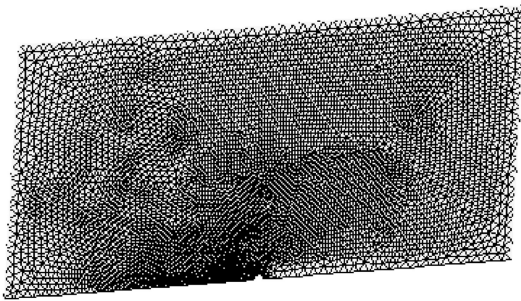


图 2 变形图

Fig.2 The deformed shape

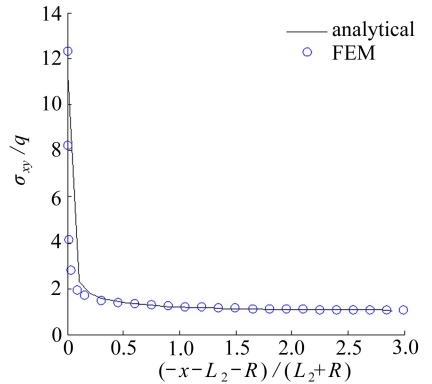


图 3 沿 x 轴的无量纲应力 σ_{xy}/q

Fig.3 Normalized stress σ_{xy}/q along axis x

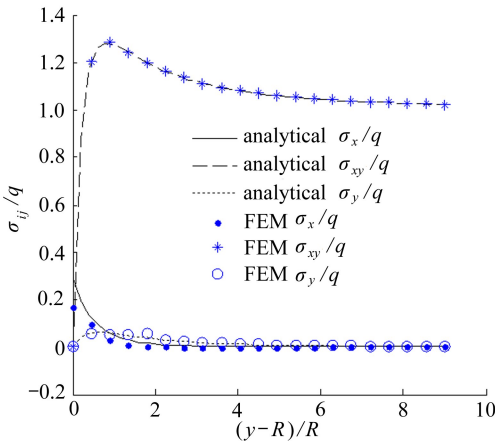


图 4 沿 y 轴的无量纲应力 σ_{ij}/q

Fig.4 Normalized stress σ_{ij}/q along axis y

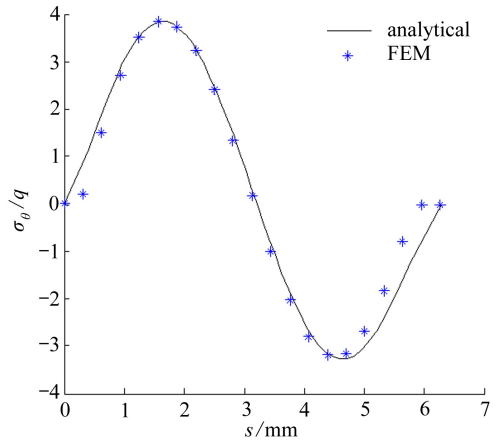


图 5 沿孔边的无量纲应力 σ_{θ}/q

Fig.5 Normalized stress σ_{θ}/q along the hole edge

图 4 为沿 y 正半轴的无量纲应力 σ_x/q , σ_{xy}/q 和 σ_y/q .可以看出,应力 σ_y/q 和 σ_{xy}/q 的值在孔边为 0,随离孔距离的增加,迅速达到最大值,然后分别趋于 0 和 1,应力 σ_x/q 在孔边达到最大值,随离孔距离的增加,趋于 0。

图 5 为无量纲应力 σ_{θ}/q 随圆孔上半边 $D \rightarrow H$ 弧长的分布.由式(11)、(12) 求出,变换到 ζ

平面上,点 D, G 和 H 对应的 D', G' 和 H'' 坐标分别为 $-0.928 6-0.371 2i$, $-0.071 4-0.997 4i$ 和 $0.785 7-0.618 6i$, 相应的转角分别为 $3.521 8 \text{ rad}$, $4.640 9 \text{ rad}$ 和 $5.616 2 \text{ rad}$, 将 $D'' \rightarrow H''$ 的角等分, 求出对应的 z 平面上点的弧长. 在 G 点, 弧长 $s = 3.141 6 \text{ mm}$, 应力 σ_θ/q 的值与图 4 中在孔边的 σ_x/q 相等, 均为 $0.286 4$. 从图 3~5 可以看出, 沿坐标轴和孔边, 有限元计算结果的趋势和大小均与理论计算结果吻合, 说明本文理论公式推导的正确性.

3.2 应力强度因子

如果短半轴 b 趋于 0, 左、右裂纹长度为 L , 式 (25) 变成 $K_{IA} = q\sqrt{\pi(a+L)}$, 这就是众所周知的无限体中 Griffith 裂纹的结果. 由式 (25) 求出有限元模型右裂纹尖端的应力强度因子 $K_{IIA} = 10.49 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$, 由有限元求出的应力强度因子 $K_{IIA} = 9.91 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$, 可以看出, 两者相差非常小. 应力强度因子的结果进一步证明了本文理论公式推导的正确性.

4 结 论

1) 基于复变函数和保角变换理论, 研究了含圆孔不等边裂纹的无限体在剪切荷载作用下的平面问题, 得到应力函数和应力强度因子的解析表达式.

2) 通过有限元给出了含圆孔不等边裂纹的无限体在剪切荷载作用下的变形, 与实际变形相符.

3) 由理论公式推导和有限元得出的沿坐标轴方向和孔边的应力分布数值大小和趋势相吻合. 沿水平坐标轴方向, 正应力分量为 0, 切应力有明显的应力集中; 沿竖直坐标轴方向, 正应力分量不为 0, 但与切应力相比较小; 最大的切应力不在孔边取得, 而在孔附近取得; 在竖直方向的直径处, 沿孔边的环向应力值与沿竖直坐标轴水平方向的相同.

参考文献 (References):

- [1] Bowie O L. Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1956, **35**(1/4): 60-71.
- [2] YAN Xiang-qiao. A numerical analysis of cracks emanating from an elliptical hole in a 2-D elasticity plate[J]. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, 2006, **25**(1): 142-153.
- [3] 郭怀民, 刘官厅, 皮建东. 带裂纹的椭圆孔口问题的应力分析[J]. 固体力学学报, 2007, **28**(3): 308-312. (GUO Huai-min, LIU Guan-ting, PI Jian-dong. Stress analysis of an ellipse hole with a straight edge-crack by complex variable method[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2007, **28**(3): 308-312. (in Chinese))
- [4] 郭俊宏, 刘官厅. 带双裂纹的椭圆孔口问题的应力分析[J]. 力学学报, 2007, **39**(5): 699-703. (GUO Jun-hong, LIU Guan-ting. Stress analysis for an elliptical hole with two straight cracks [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(5): 699-703. (in Chinese))
- [5] 郭怀民, 乔文华. 椭圆孔边两不对称裂纹问题的复变函数解[J]. 力学季刊, 2011, **32**(3): 444-451. (GUO Huai-min, QIAO Wen-hua. Complex variable function analysis of an elliptic hole with asymmetry edge cracks [J]. *Chinese Quarterly Mechanics*, 2011, **32**(3): 444-451. (in Chinese))
- [6] 郭俊宏, 袁泽帅, 卢子兴. 幂函数型曲线裂纹平面问题的一般解[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(5): 533-540. (GUO Jun-hong, YUAN Ze-shuai, LU Zi-xing. General solutions of plane problem for power function curved cracks [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**

- (5): 533-540.(in Chinese))
- [7] ZHAO Jin-fang, XIE Li-yang, LIU Jian-zhong, ZHAO Qun. A method for stress intensity factor calculation of infinite plate containing multiple hole-edge cracks[J]. *International Journal of Fatigue*, 2012, **35**(1): 2-9.
- [8] 刘淑红, 齐月芹, 冯得得, 史晓佳, 万涛平. 含椭圆孔单边裂纹板的数值分析[J]. 机械工程学报, 2012, **48**(20): 83-87.(LIU Shu-hong, QI Yue-qin, FENG De-de, SHI Xiao-jia, WAN Tao-ping. Numerical analysis of crack emanating from elliptical hole[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, **48**(20): 83-87.(in Chinese))
- [9] 刘淑红, 李延强, 沈英明. 含椭圆孔压电材料的电弹场[J]. 工程力学, 2012, **29**(12): 45-50.(LIU Shu-hong, LI Yan-qiang, SHEN Ying-ming. The electro-elastic fields of piezoelectric materials with an elliptic hole[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, **29**(12): 45-50.(in Chinese))
- [10] LIU Shu-hong, SHEN Ying-ming, LIU Jin-xi. Exact solutions for piezoelectric materials with an elliptic hole or a crack under uniform internal pressure[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2012, **25**(4): 845-852.
- [11] DU Yan-liang, LIU Shu-hong, DUAN Shi-jie, LI Yan-qiang. Electro-elastic fields of piezoelectric materials with an elliptic hole under uniform internal shearing forces[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2013, **26**(3): 454-461.
- [12] LIU Shu-hong, DUAN Shi-jie. Analytical solutions of cracks emanating from an elliptical hole under shear[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2014, **27**(4): 829-834.
- [13] LIU Shu-hong, DUAN Shi-jie. Analytical solutions of cracks emanating from an elliptic hole in an infinite plate under tension[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2014, **27**(5): 1057-1063.
- [14] 周妍, 张财贵, 杨井瑞, 王启智. 圆孔内单边(或双边)裂纹平台巴西圆盘应力强度因子的全面标定[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(1): 16-30.(ZHOU Yan, ZHANG Cai-gui, YANG Jing-rui, WANG Qi-zhi. Comprehensive calibration of the stress intensity factor for the holed flattened Brazilian disc with an inner single crack or double cracks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(1): 16-30.(in Chinese))
- [15] 高健, 刘官厅. 一维正方准晶中半无限裂纹问题的解析解[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(9): 945-955.(GAO Jian, LIU Guan-ting. Analytical solutions for problems of 1D orthorhombic quasicrystal with semi-infinite crack[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(9): 945-955.(in Chinese))

Solutions for a Circular Hole With Edge Cracks Under Shear Load

DUAN Shi-jie¹, LIU Shu-hong^{2, 3}

- (1. *School of Adult Education, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, P.R.China;*
2. *Department of Engineering Mechanics, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, P.R.China;*
3. *Key Laboratory for Health Monitoring and Control of Large Structures of Hebei Province, Shijiazhuang 050043, P.R.China*)

Abstract: A 2D mechanical analysis was performed on an infinite plate containing a circular hole with two collinear edge cracks of unequal lengths, under uniformly distributed shear load at infinity. Based on the complex variable function method, the analytic solutions of stress functions and stress intensity factors were obtained. Through an numerical example, the stress distributions along the coordinate axes and the hole edge were given in the graphical form, and the stress intensity factors were also calculated. The results show that, there is obvious stress concentration near the hole and the cracks, and the stress values far from the defects tend towards the applied load, which conforms to the Saint-Venant's principle. In addition, the results from the finite element simulation agree well with the analytic solutions, to prove the correctness of the theoretical derivation.

Key words: crack; stress function; stress intensity factor; complex function; finite element method

引用本文/Cite this paper:

段士杰, 刘淑红. 剪切荷载作用下圆孔孔边裂纹的解[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(7): 740-747.
DUAN Shi-jie, LIU Shu-hong. Solutions for a circular hole with edge cracks under shear load[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(7): 740-747.