

基于线性控制的分数阶混沌系统的 对偶投影同步*

张玮玮¹, 吴然超²

(1. 安庆师范大学 数学与计算科学学院, 安徽 安庆 246133;
2. 安徽大学 数学科学学院, 合肥 230039)

摘要: 分数阶混沌系统的对偶同步是一个新的同步方法.有关分数阶混沌系统对偶投影同步的研究较少.基于分数阶系统的稳定性理论,通过设计线性控制器研究了分数阶混沌系统的对偶投影同步.给出了一个实现分数阶混沌系统对偶投影同步的一般方法,推广了现有对偶同步的研究结果,通过分数阶 Van der Pol 系统和分数阶 Willis 系统的数值仿真证实了该方法的有效性.

关键词: 对偶投影同步; 分数阶; 混沌系统; 线性

中图分类号: O415.5; O151 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.360356

引言

混沌同步在非线性的学科中是一个重要的研究课题,并且在各个领域已得到广泛的研究.1990年,Pecora和Carroll实现了不同初值条件下的两个恒等系统的同步^[1],随后许多类型的同步被提出并加以研究.譬如:完全同步、广义同步、滞后同步、相同步等^[2-7].学者们采用了不同种类的控制方法实现这些同步类型,比如非线性控制、脉冲控制、滑模控制、基于观测器控制等.众所周知,线性控制具有控制成本小和在工程上易于实现的特点而倍受青睐.在现有的文献中,同步的研究对象主要是一个主动系统和一个被动系统,然而,这些同步方法不能应用到多个主动系统和被动系统中^[8].

最近,对偶同步作为一种新的同步方法,已成为一个研究热点.1996年,Tsimring和Sushchik在研究电路模型中多重复杂的混沌同步时首先提出了其最初的思想^[9].随后,在2000年,Liu和Davis提出了对偶同步的概念^[10],也就是使用一个标量信号来同时同步两个不同对的混沌系统,即同步两个主动系统和两个被动系统.目前,有关混沌系统对偶同步的研究也取得了一些结果.例如,文献[11]研究了基于Lyapunov(李亚普洛夫)稳定性理论,实现了Lorenz系统和Rossler系统的对偶同步,文献[12]讨论了通过输出回归方法,实现了两个不同三维混沌

* 收稿日期: 2015-12-29; 修订日期: 2016-01-24

基金项目: 国家自然科学基金(11571016); 教育部博士点专项基金(20093401120001); 安徽省自然科学基金(11040606M12; 1608085MA14); 安徽省高等学校自然科学研究重点项目(KJ2015A152); 安徽省高校自然科学研究基金(AQKJ2014B012)

作者简介: 张玮玮(1982—),男,讲师,硕士(通讯作者. E-mail: wwzhahu@aliyun.com);
吴然超(1971—),男,教授,博士,博士生导师.

系统的对偶同步,文献[13]研究了已调时滞系统的对偶同步等。

但是,这些研究主要关注的是整数阶混沌系统的同步,很少有关于分数阶混沌系统对偶同步的研究.在众多类型的同步中,由于投影同步带有一定的比例特征,能获得较快的通信,因而投影同步被广泛地研究和讨论.鉴于此,本文研究分数阶混沌系统的对偶投影同步,即通过一标量因子,同时获得两个主动系统和两个被动系统之间的同步.基于分数阶系统的稳定性理论,通过使用一个线性控制信号,设计了一个实现分数阶混沌系统的对偶投影同步的一般方法。

1 问题提出

关于分数阶导数的定义,常用有 Riemann-Liouville 分数阶导数和 Caputo 分数阶导数,本文处理的分数阶混沌系统涉及的是 Caputo 分数阶导数。

定义^[14] 函数 $x(t)$ 的分数阶数为 α 的 Caputo 导数定义如下:

$$D_{t_0,t}^{\alpha} x(t) = D_{t_0,t}^{-(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

其中

$$n-1 < \alpha < n \in \mathbf{Z}_+.$$

本文考虑下面两个系统作为主动系统:

$$\text{M1: } \frac{d^{\alpha} \mathbf{x}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\text{M2: } \frac{d^{\alpha} \mathbf{y}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (3)$$

其中, α 是两个主动系统的阶数, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ 分别是主动系统 M1 和 M2 的 n 维状态向量, $\mathbf{f}, \mathbf{g}: R^n \rightarrow R^n$ 是两个连续的向量函数.在两个主动系统中使用一个线性组合信号 μ_m , 其 μ_m 设计如下:

$$\mu_m = [p_1, p_2, \dots, p_n] \mathbf{x} + [q_1, q_2, \dots, q_n] \mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{Q} \mathbf{y}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{P} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$, $\mathbf{Q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ 是已知的两个常数矩阵。

下面两个系统作为被动系统:

$$\text{S1: } \frac{d^{\alpha} \mathbf{X}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{U}^{(1)}, \quad (5)$$

$$\text{S2: } \frac{d^{\alpha} \mathbf{Y}}{dt^{\alpha}} = \mathbf{g}(\mathbf{Y}) + \mathbf{U}^{(2)}, \quad (6)$$

其中, α 是两个被动系统的阶数, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in R^n$ 分别是被动系统 S1 和 S2 的 n 维状态向量, $\mathbf{f}, \mathbf{g}: R^n \rightarrow R^n$ 是两个连续的向量函数, $\mathbf{U}^{(1)} = [u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}]^T$, $\mathbf{U}^{(2)} = [u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \dots, u_n^{(2)}]^T$ 是被设计的控制函数.在两个被动系统中使用一个线性组合信号 μ_s , 其 μ_s 设计如下:

$$\mu_s = [p_1, p_2, \dots, p_n] \mathbf{X} + [q_1, q_2, \dots, q_n] \mathbf{Y} = \mathbf{P} \mathbf{X} + \mathbf{Q} \mathbf{Y}. \quad (7)$$

对偶投影同步误差信号定义为

$$\mathbf{e} = \mu_s - \chi \mu_m = \mathbf{P}(\mathbf{X} - \chi \mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{Y} - \chi \mathbf{y}), \quad (8)$$

其中 χ 是标量因子。

本文的主要目的是实现两个主动系统和两个被动系统的投影同步,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}(t) - \chi \mathbf{x}(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{Y}(t) - \chi \mathbf{y}(t)\| = 0. \quad (9)$$

2 同步一般方法

引理^[15] 对于分数阶线性系统:

$$D^\alpha \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (10)$$

系统是稳定的当且仅当 $|\arg(\lambda_i(\mathbf{A}))| \geq \alpha\pi/2, i = 1, 2, \dots, n$. 其中 $\mathbf{x} \in R^n$ 是系统的状态向量, $\arg(\lambda_i(\mathbf{A}))$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的特征值 λ_i 的幅角主值.

为了更便于实现主动系统和被动系统的同步, 本文将主动系统(2)、(3)和被动系统(5)、(6)分解为以下形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha \mathbf{x}}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha \mathbf{y}}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{y}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

和

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha \mathbf{X}}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha \mathbf{Y}}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{G}(\mathbf{Y}) + \mathbf{U}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in R^{n \times n}$ 分别是主动系统和被动系统线性部分的参数矩阵, $\mathbf{F}, \mathbf{G}: R^n \rightarrow R^n$ 是主动系统和被动系统的非线性部分.

定理 对于给定的主动系统(11)和被动系统(12), 存在一个合适的控制函数

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{K}_1 \mathbf{e} \\ \chi \mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{K}_2 \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

使得主动系统(11)和被动系统(12)获得对偶投影同步当且仅当满足条件 $|\arg(\lambda_i(\mathbf{C}))| \geq \alpha\pi/2, i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ 是被选择的矩阵, \mathbf{C} 表示矩阵:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{K}_1 \mathbf{P} & -\mathbf{K}_1 \mathbf{Q} \\ -\mathbf{K}_2 \mathbf{P} & \mathbf{B} - \mathbf{K}_2 \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

证明

定义主动系统和被动系统的误差为

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} - \chi \mathbf{x} \\ \mathbf{Y} - \chi \mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

为了实现主动系统(11)和被动系统(12)的同步, 本文选择控制函数 $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(2)} \end{bmatrix}$ 为以下形式:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{K}_1 \mathbf{e} \\ \chi \mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{K}_2 \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

则得到误差系统:

$$\frac{d^\alpha \mathbf{E}}{dt^\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{d^\alpha \mathbf{X}}{dt^\alpha} - \chi \frac{d^\alpha \mathbf{x}}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha \mathbf{Y}}{dt^\alpha} - \chi \frac{d^\alpha \mathbf{y}}{dt^\alpha} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{U}^{(1)} - \chi(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{G}(\mathbf{Y}) + \mathbf{U}^{(2)} - \chi(\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{y})) \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{X} - \chi\mathbf{x}) - \mathbf{K}_1\mathbf{e} \\ \mathbf{B}(\mathbf{Y} - \chi\mathbf{y}) - \mathbf{K}_2\mathbf{e} \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{K}_1\mathbf{P})(\mathbf{X} - \chi\mathbf{x}) - \mathbf{K}_1\mathbf{Q}(\mathbf{Y} - \chi\mathbf{y}) \\ -\mathbf{K}_2\mathbf{P}(\mathbf{X} - \chi\mathbf{x}) + (\mathbf{B} - \mathbf{K}_2\mathbf{Q})(\mathbf{Y} - \chi\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{K}_1\mathbf{P} & -\mathbf{K}_1\mathbf{Q} \\ -\mathbf{K}_2\mathbf{P} & \mathbf{B} - \mathbf{K}_2\mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} - \chi\mathbf{x} \\ \mathbf{Y} - \chi\mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{E}, \tag{15}
\end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{K}_1\mathbf{P} & -\mathbf{K}_1\mathbf{Q} \\ -\mathbf{K}_2\mathbf{P} & \mathbf{B} - \mathbf{K}_2\mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

根据引理可知,若 $|\arg(\lambda_i(\mathbf{C}))| \geq \alpha\pi/2$, 则误差系统是稳定的.所以获得了主动系统(11)和被动系统(12)的投影同步.

注1 若 $\chi = 1$, 则控制函数

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{K}_1\mathbf{e} \\ \mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{K}_2\mathbf{e} \end{bmatrix}$$

称为完全同步.

注2 若 $\chi = -1$, 则控制函数

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{K}_1\mathbf{e} \\ -\mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{K}_2\mathbf{e} \end{bmatrix}$$

称为反向同步.

3 数值模拟

本文考虑下面的主动系统和被动系统.

主动系统:

M1: 分数阶 Van der Pol 系统

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_1 - \gamma x_1^3 - \beta x_2 + f_1 \cos t, \\ D^\alpha x_2 = l(x_1 - mx_2 + n), \end{cases} \tag{16}$$

M2: 分数阶 Willis 系统

$$\begin{cases} D^\alpha y_1 = y_2, \\ D^\alpha y_2 = ay_1 + by_1^2 + cy_1^3 + dy_2 + f_2 \cos t. \end{cases} \tag{17}$$

相应的被动系统

$$\text{S1: } \begin{cases} D^\alpha X_1 = X_1 - \gamma X_1^3 - \beta X_2 + f_1 \cos t + u_1^{(1)}, \\ D^\alpha X_2 = l(X_1 - mX_2 + n) + u_2^{(1)}, \end{cases} \tag{18}$$

$$\text{S2: } \begin{cases} D^\alpha Y_1 = Y_2 + u_1^{(2)}, \\ D^\alpha Y_2 = aY_1 + bY_1^2 + cY_1^3 + dY_2 + f_2 \cos t + u_2^{(2)}, \end{cases} \tag{19}$$

其中 $\gamma, \beta, f_1, l, m, n, a, b, c, d, f_2$ 是常数.当 $\alpha = 0.98, \gamma = 1/3, \beta = 1, f_1 = 0.74, l = 0.1, m = 0.8, n = 0.7, a = -0.9, b = 3, c = -2, d = -0.1, f_2 = 0.1$ 时,分数阶 Van der Pol 系统和分数阶 Wil-

lis 系统是混沌的,其混沌吸引子如图 1 和图 2 所示.

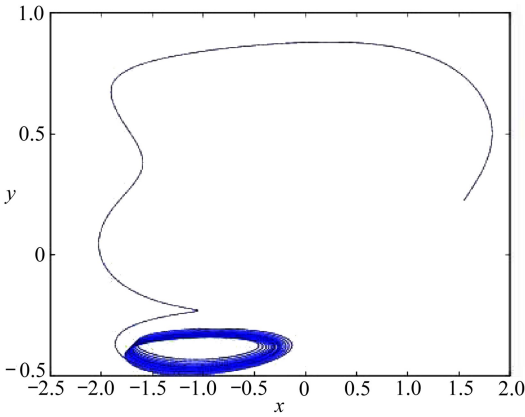


图 1 分数阶 Van der Pol 系统的混沌吸引子

Fig. 1 The chaotic attractor of the fractional-order Van der Pol system

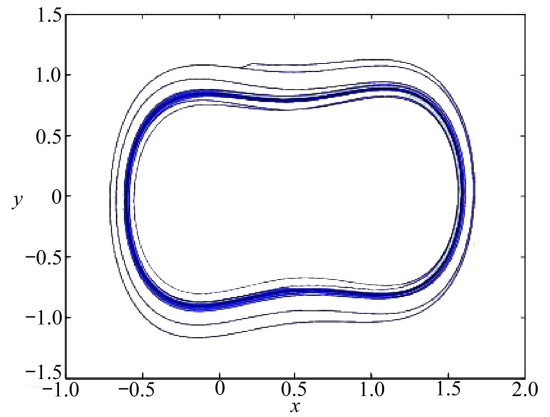


图 2 分数阶 Willis 系统的混沌吸引子

Fig. 2 The chaotic attractor of the fractional-order Willis system

比较主动系统(16)、(17)和被动系统(18)、(19),有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ l & -lm \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\gamma x_1^3 + f_1 \cos t \\ ln \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} -\gamma X_1^3 + f_1 \cos t \\ ln \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & d \end{bmatrix}, \mathbf{G}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ by_1^2 + cy_1^3 + f_2 \cos t \end{bmatrix}, \mathbf{G}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ bY_1^2 + cY_1^3 + f_2 \cos t \end{bmatrix}.$$

根据定理,可得控制函数为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^{(1)} \\ \mathbf{U}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{K}_1 \mathbf{e} \\ \chi \mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{Y}) - \mathbf{K}_2 \mathbf{e} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{e} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 + q_1 \mathbf{e}_3 + q_2 \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 = X_1 - \chi x_1, \mathbf{e}_2 = X_2 - \chi x_2,$$

$$\mathbf{e}_3 = Y_1 - \chi y_1, \mathbf{e}_4 = Y_2 - \chi y_2, \mathbf{K}_1 = [k_{11}, k_{21}]^T, \mathbf{K}_2 = [k_{21}, k_{22}]^T.$$

其误差系统变为

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha \mathbf{e}_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha \mathbf{e}_2}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha \mathbf{e}_3}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha \mathbf{e}_4}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p_1 k_{11} & -\beta - p_2 k_{11} & -q_1 k_{11} & -q_2 k_{11} \\ l - p_1 k_{21} & -lm - p_2 k_{21} & -q_1 k_{21} & -q_2 k_{21} \\ -p_1 k_{12} & -p_2 k_{12} & -q_1 k_{21} & 1 - q_2 k_{21} \\ -p_1 k_{22} & -p_2 k_{22} & a - q_1 k_{22} & d - q_2 k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

若选择参数矩阵 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ 分别为

$$\mathbf{K}_1 = [5, 0]^T, \mathbf{K}_2 = [0, 1]^T, \mathbf{P} = [1, 1], \mathbf{Q} = [1, 1],$$

则通过计算,矩阵 \mathbf{C} 的特征值分别为

$$\lambda_1 = -4.8167, \lambda_2 = -0.0201 + 0.7380i,$$

$$\lambda_3 = -0.0201 - 0.7380i, \lambda_4 = -0.3230.$$

从中可以看出矩阵 C 所有的特征值均满足 $|\arg(\lambda_i(C))| > \alpha\pi/2 = 0.98\pi/2$. 根据引理, 误差系统是渐进稳定的.

在数值模拟中, 主动系统和被动系统中的参数分别选择为

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.98, \gamma = 1/3, \beta = 1, f_1 = 0.74, l = 0.1, m = 0.8, n = 0.7, \\ a &= -0.9, b = 3, c = -2, d = -0.1, f_2 = 0.1, \end{aligned}$$

初值条件分别选择为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0.3, x_2(0) = 0.4, y_1(0) = 0.5, y_2(0) = 0.6, \\ X_1(0) &= 0.1, X_2(0) = 0.2, Y_1(0) = 0.2, Y_2(0) = 0.3, \end{aligned}$$

选择标量因子为 $\chi = -2$. 其误差系统的数值结果如图 3~图 6 所示.

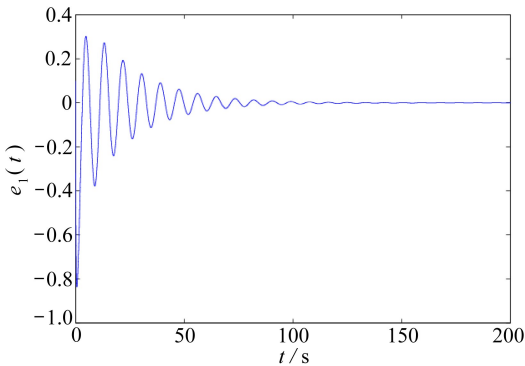


图 3 主动系统 M1 和被动系统 S1 的误差同步 e_1

Fig. 3 Error e_1 of system M1 and system S1

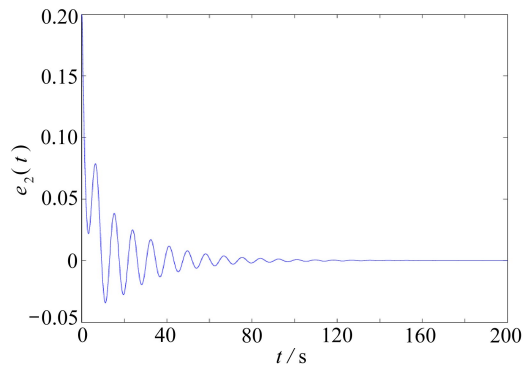


图 4 主动系统 M1 和被动系统 S1 的误差同步 e_2

Fig. 4 Error e_2 of system M1 and system S1

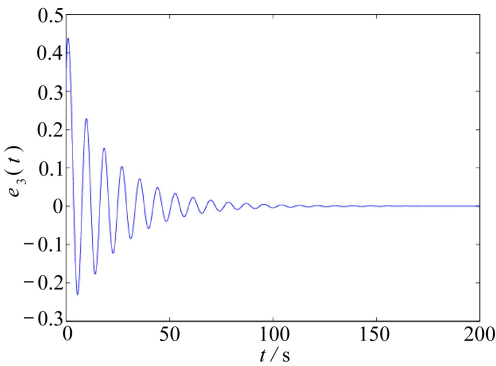


图 5 主动系统 M2 和被动系统 S2 的误差同步 e_3

Fig. 5 Error e_3 of system M2 and system S2

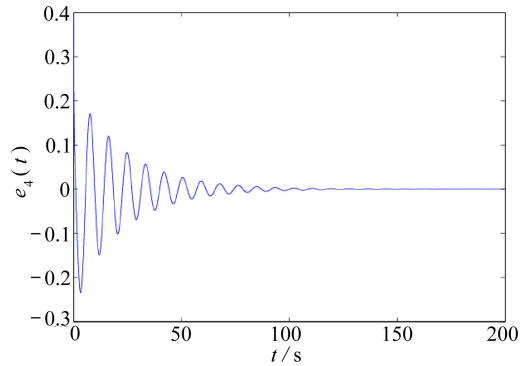


图 6 主动系统 M2 和被动系统 S2 的误差同步 e_4

Fig. 6 Error e_4 of system M2 and system S2

4 结束语

本文研究了分数阶混沌系统的对偶投影同步问题. 通过设计一个有效的控制器, 实现了两个主动系统和两个被动系统的对偶投影同步. 所设计的控制项成本小且易于实现. 所得结果推广了现有文献中有关对偶同步的研究结果. 理论分析与仿真结果均表明了本文所设计方法的有效性和准确性.

参考文献(References):

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic system[J]. *Physical Review Letters*, 1990, **64**(2): 821-824.
- [2] YU Xing-huo, SONG Yan-xing. Chaos synchronization via controlling partial state of chaotic systems[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, **11**(6): 1737-1741.
- [3] Shahverdiev E M, Sivaprakasam S, Shore K A. Lag synchronization in time-delayed systems [J]. *Physics Letters A*, 2012, **292**(6): 320-324.
- [4] Park E H, Zaks M A, Kurths J. Phase synchronization in the forced Lorenz system[J]. *Physical Review E*, 2011, **60**(6): 6627-6638.
- [5] HU Man-feng, YANG Yong-qing, XU Zhen-yuan, ZHANG Rong, GUO Liu-xiao. Projective cluster synchronization in drive-response dynamical networks[J]. *Physica A*, 2007, **381**: 457-466.
- [6] Yang S S, Duan C K. Generalized synchronization in chaotic systems[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2011, **9**(10): 1703-1707.
- [7] 何桂添, 罗懋康. 分数阶 Duffing 混沌系统的动力性态及其由单一主动控制的混沌同步[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(5): 539-552. (HE Gui-tian, LUO Mao-kang. Dynamic behavior of fractional order Duffing chaotic system and its synchronization via singly active control[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(5): 539-552.(in Chinese))
- [8] Yoshimura K. Multichannel digital communications by the synchronization of globally coupled chaotic systems[J]. *Physical Review E*, 1999, **60**(2): 1648-1657.
- [9] Tsimring L S, Sushchik M M. Multiplexing chaotic signals using synchronization[J]. *Physics Letters A*, 1996, **213**(3): 155-166.
- [10] Liu Y, Davis P. Dual synchronization of chaos[J]. *Physical Review E*, 2000, **61**(3): R2176-R2184.
- [11] NING Di, LU Jun-an, HAN Xiu-ping. Dual synchronization based on two different chaotic systems: Lorenz systems and Rössler systems[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, **206**(2): 1046-1050.
- [12] Salarieh H, Shahrokhi M. Dual synchronization of chaotic systems via time-varying gain proportional feedback[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, **38**(5): 1342-1348.
- [13] Ghosh D, Chowdhury A R. Dual-anticipating, dual and dual-lag synchronization in modulated time-delayed systems[J]. *Physics Letters A*, 2010, **374**(34): 3425-3436.
- [14] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*[M]. New York: Academic Press, 1999: 105-114.
- [15] SI Gang-quan, SUN Zhi-yong, ZHANG Yan-bin, CHEN Wen-quan. Projective synchronization of different fractional-order chaotic systems with non-identical orders[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, **13**(4): 1761-1771.

Dual Projective Synchronization of Fractional-Order Chaotic Systems With a Linear Controller

ZHANG Wei-wei¹, WU Ran-chao²

(1. *School of Mathematics & Computation Science,*

Anqing Normal University, Anqing, Anhui 246133, P.R.China;

2. *School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230039, P.R.China*)

Abstract: The dual synchronization of fractional-order chaotic systems is a new method of synchronization. There was few study on the dual projective synchronization of fractional-order chaotic systems. With a linear signal, the dual projective synchronization of fractional-order chaotic systems was investigated. Based on the stability theory of the fractional-order systems, a general method was proposed. Furthermore, the work extends the previous research of dual synchronization. Finally, the dual projective synchronizations of the fractional-order Van der Pol system and the fractional-order Willis system were numerically simulated. The corresponding results show the effectiveness of the present method.

Key words: dual projective synchronization; fractional order; chaotic system; linear

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11571016)

引用本文/Cite this paper:

张玮玮, 吴然超. 基于线性控制的分数阶混沌系统的对偶投影同步[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(7): 710-717.

ZHANG Wei-wei, WU Ran-chao. Dual projective synchronization of fractional-order chaotic systems with a linear controller[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(7): 710-717.