

# 裂纹群应力强度因子分析的 广义参数有限元法\*

徐 华<sup>1</sup>, 徐德峰<sup>1</sup>, 杨绿峰<sup>1,2</sup>

(1. 广西大学 土木建筑工程学院; 工程防灾与结构安全教育部重点实验室;  
广西防灾减灾与工程安全重点实验室, 南宁 530004;  
2. 广西壮族自治区住房和城乡建设厅, 南宁 530028)

**摘要:** 利用广义参数有限元法直接求解了裂纹群裂尖应力强度因子.首先根据改进的 Williams 级数建立典型裂尖奇异区 Williams 单元,然后通过分块集成形成求解域整体刚度方程,进一步利用 Williams 级数的待定系数直接确定各裂尖应力强度因子,最后通过算例分析研究了裂纹间距、裂纹与 X 轴夹角等参数对计算结果的影响.结果表明,该文方法能够有效克服断裂分析的传统有限元法的缺陷,具有更高的计算精度和效率.而且对于含有多条等长共线水平裂纹的无限大板,当相邻裂纹间距与裂纹半长之比大于 9 时,可忽略裂纹之间的相互影响,按照单裂纹进行计算;对于沿 Y 轴对称分布的偶数条等长斜裂纹的无限大板,随着裂纹与 X 轴夹角的增大, $K_{\perp}$  逐渐减小, $K_{\parallel}$  先增大后减小.

**关键词:** 广义参数; 应力强度因子; 裂纹群; Williams 单元; 奇异区尺寸

**中图分类号:** O346.1      **文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.370050

## 引 言

许多工程结构,诸如水工建筑中的重力坝、高层建筑的基础、道路工程中的水泥混凝土路面等常常分布着大量的微裂纹,这些微裂纹的存在很大程度上削弱了结构的强度和刚度,并且在长期荷载作用下,微裂纹可扩展为宏观裂纹,雨水等在毛细作用下可透过这些裂纹软化地基加速结构破坏,从而诱发安全事故.断裂力学是分析裂纹问题的有效工具,在断裂力学的工程应用中,应力强度因子(stress intensity factor, 简记为 SIF)是剩余强度和裂纹扩展计算中最基础的参数,因此,如何准确计算裂纹群尖端应力强度因子成为预测裂纹扩展和结构破坏的关键性问题<sup>[1]</sup>.

含多条裂纹结构的断裂力学行为非常复杂,国内外研究人员提出了多种方法确定裂纹群裂尖 SIF. Muskhelishvili<sup>[2]</sup>应用复变应力函数理论,建立了共线多裂纹 SIF 的解析理论,但对于

\* 收稿日期: 2016-02-16; 修订日期: 2016-09-11

基金项目: 国家自然科学基金(51268003;51478125); 广西自然科学基金(2012GXNSFEA053002; 2013GXNSFBA019257)

作者简介: 徐华(1979—),男,副教授,博士(E-mail: xuhua@gxu.edu.cn);

杨绿峰(1966—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: lfyang@gxu.edu.cn).

复杂边界和加载条件却难以通过解析方式获得。Wang 等<sup>[3]</sup>利用边界配置法求解了含两条对称斜裂纹矩形板各裂尖 SIF,这种半解析半数值方法的计算精度依赖于边界配点个数的选取。随着计算机技术的迅速发展,有限元法作为高效的数值算法逐渐被广泛使用。传统的有限元法利用裂尖奇异单元或裂尖网格加密技术,通过有限元位移外推法获得裂尖 SIF,李爱民等<sup>[4]</sup>利用有限元方法求解了多裂纹板的应力强度因子,并讨论了板的尺寸、裂纹长度比和裂纹间距对比应力强度因子的影响,其结果需通过线性回归获得,该过程引入了人为误差。Chen 等<sup>[5]</sup>提出了混合边界条件多裂纹二维断裂分析的有限单元交替法,该方法虽克服了传统有限元需在裂尖区加密网格方能保证精度的缺陷,但其迭代过程较繁琐、收敛速度较慢。刘钧玉等<sup>[6]</sup>基于比例边界有限元法计算了裂纹面加载的平面多裂纹 SIF。陈莉等在组合法<sup>[7]</sup>的基础上提出了复合法<sup>[8]</sup>(亦称修正系数相乘法)来计算多裂纹裂尖 SIF,该方法比传统有限元法计算精度高但是计算量大且结果不稳定。边界元法是在有限元法之后发展起来的一种精确高效的工程分析数值方法,Guo 等<sup>[9]</sup>利用边界元法求解了平面线弹性介质中多裂纹各裂尖 SIF,该方法虽然大幅降低了离散自由度,但很难确定其控制函数。近年来,比较流行的无网格 Galerkin 法和扩展有限元法也应用于多裂纹的断裂分析中,其中:Singh 等<sup>[10]</sup>提出了修正的内部基扩充无网格 Galerkin 法,模拟了平面应力条件下多条静态和动态边缘裂纹问题;陈军斌等<sup>[11]</sup>利用扩展有限单元法模拟多条裂缝的扩展过程,并研究了多条裂缝同时扩展的转向规律。杨绿峰等<sup>[12-14]</sup>建立了断裂 SIF 分析的广义参数 Williams 单元(简记为 W 单元),能够高效精确分析不同断裂模式下单裂纹裂尖 SIF,从而克服了传统断裂分析有限元法的缺陷。

本文利用广义参数 W 单元研究建立了裂纹群裂尖 SIF 计算的有限元格式。首先根据改进的 Williams 级数建立典型裂尖奇异区 W 单元,进而通过分块集成形成求解域整体刚度方程,最后引入边界条件求解整体方程获得 Williams 级数的待定系数即可直接确定各裂尖应力强度因子。通过算例进一步分析了裂纹间距、裂纹与 X 轴夹角等参数对计算结果的影响。结果表明,本文方法能够有效克服断裂分析的传统有限元法的缺陷,具有更高的计算精度和效率。

## 1 裂纹群模型及裂尖 SIF

### 1.1 薄板裂纹群计算简图

带任意随机分布穿透多裂纹的薄板,其边界  $C_T$  和  $C_U$  上分别作用有任意拉伸荷载  $T$  和位移约束  $U$ ,其示意图如图 1 所示。将其示意图规则化,取矩形区域宽为  $2W$ ,高为  $2H$ ,且含有  $n$  条随机分布裂纹。以板中心为坐标原点建立整体坐标系,裂尖以逆时针为正建立局部坐标系,因有  $n$  条裂纹,则有  $2n$  个裂尖,需建立  $2n$  个局部坐标系,如图 2 所示。

### 1.2 裂尖附近奇异域离散分析的广义参数 Williams 单元

任意选取裂纹群中的 1 条裂纹,研究分析该裂纹的一个裂尖 SIF。首先选用具有光滑、连续特性的 Williams 级数,利用 Ritz(里兹)法建立该裂尖周围奇异域的整体位移场:

$$\mathbf{w}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,i}(x,y) \\ \mathbf{H}_{2,i}(x,y) \end{bmatrix} \mathbf{a}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{a}_i, \quad (1)$$

式中,下标  $i$  为裂尖的编号; $\mathbf{w}_i$  为裂尖周围奇异域的整体位移场,其中  $u_i, v_i$  分别表示裂尖奇异域内任意点沿整体坐标轴  $X, Y$  方向的位移; $\mathbf{H}_i$  为该裂尖整体位移插值函数,且  $\mathbf{H}_{1,i}, \mathbf{H}_{2,i}$  分

别表示与  $u_i, v_i$  对应的位移插值函数;  $\mathbf{a}_i$  表示位移场待定向量, 该向量中的部分待定参数不局限于特定的物理意义或几何意义, 称之为广义参数。

采用普通有限元网格离散技术将各个裂尖周围的奇异域进行离散。对于图 3 所示的  $i$  裂尖周围的奇异域 IBLK, 首先利用由裂尖  $o_i$  发出的射线将奇异域离散为 8 个三角形条元, 然后利用一组环绕裂尖  $o_i$  且相互平行的折线  $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N\}$  将每个条元进一步离散为  $N$  个自相似梯形微单元, 且任意相邻折线到裂尖  $o_i$  的距离之比为常数  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), 称之为径向比例因子。现选取其中任一微单元作为典型单元, 如图 4 所示, 根据有限元理论建立其局部位移场:

$$\mathbf{d}_i^e = \mathbf{N}_i^e \boldsymbol{\delta}_i^e, \tag{2}$$

式中,  $\mathbf{N}_i^e$  为有限元形函数矩阵;  $\boldsymbol{\delta}_i^e$  为单元结点位移向量, 其中的待定参数表示微单元上各个节点的位移, 具有明确的物理意义。

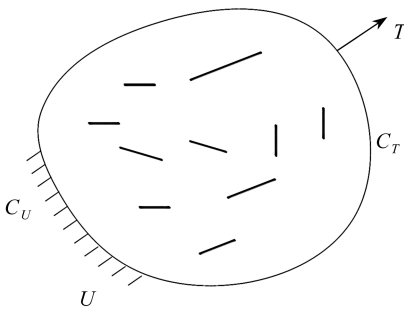


图 1 薄板裂纹群随机分布示意图

Fig. 1 The thin plate with a random group of cracks

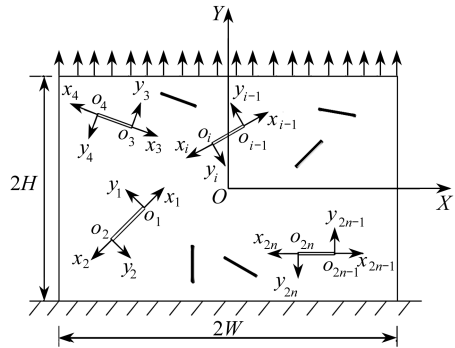


图 2 薄板裂纹群计算简图

Fig. 2 The calculation model for the group of cracks

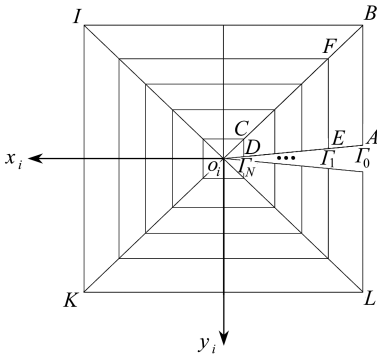


图 3 裂尖奇异区离散示意图

Fig. 3 Discretization elements around the crack tip in the singular region

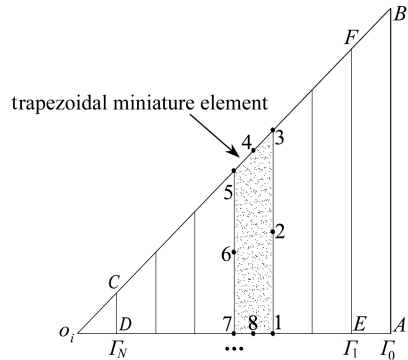


图 4 W 单元及梯形微单元

Fig. 4 W elements and trapezoidal miniature elements

因微单元的局部位移场受到奇异域整体位移场的控制, 因此将微单元的全部节点坐标依次代入式(1)即可求得微单元的节点位移向量:

$$\boldsymbol{\delta}_i^e = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,i}(x_1, y_1) \\ \mathbf{H}_{2,i}(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{1,i}(x_k, y_k) \\ \mathbf{H}_{2,i}(x_k, y_k) \end{bmatrix} \mathbf{a}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{a}_i, \quad (3)$$

式中,  $k$  表示微单元的节点总数, 这里选用 8 节点等参元, 即有  $k = 8$ ;  $\mathbf{T}_i$  表示微单元转换矩阵。

将式(3)代入式(2), 可得

$$\mathbf{d}_i^e = \mathbf{N}_i^e \mathbf{T}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N}'_i \mathbf{a}_i, \quad (4)$$

上式即为裂尖  $i$  周围奇异域中任意微单元的广义参数位移场。

采用 Williams 级数建立式(1)所示的总体位移场时, 式(4)中的形函数矩阵  $\mathbf{N}'_i$  与 Williams 级数密切相关, 因而由式(4)进一步建立的单元模型称为广义参数 Williams 单元, 简记为 W 单元。

### 1.3 裂尖 SIF 的确定方法

这里对裂尖  $i$  周围奇异域的整体位移场采用改进的 Williams 级数<sup>[12-13]</sup>表示, 并截取其前  $m + 1$  项:

$$\begin{cases} u_i = u_{i,0} + \sum_{j=1}^m r^{j/2} [a_{i,j} h_{j1}^x(\theta) + b_{i,j} h_{j2}^x(\theta)], \\ v_i = v_{i,0} + \sum_{j=1}^m r^{j/2} [a_{i,j} h_{j1}^y(\theta) + b_{i,j} h_{j2}^y(\theta)]. \end{cases} \quad (5)$$

式(5)可用于式(1)的矩阵形式表达, 其中

$$\mathbf{H}_i(r, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r^{1/2} h_{11}^x(\theta) & r^{1/2} h_{12}^x(\theta) & \cdots & r^{m/2} h_{m1}^x(\theta) & r^{m/2} h_{m2}^x(\theta) \\ 0 & 1 & r^{1/2} h_{11}^y(\theta) & r^{1/2} h_{12}^y(\theta) & \cdots & r^{m/2} h_{m1}^y(\theta) & r^{m/2} h_{m2}^y(\theta) \end{bmatrix}, \quad (6a)$$

$$\mathbf{w}_i = \{u_i, v_i\}^T, \quad (6b)$$

$$\mathbf{a}_i = \{u_{i,0} \quad v_{i,0} \quad a_{i,1} \quad b_{i,1} \quad \cdots \quad a_{i,m} \quad b_{i,m}\}^T, \quad (6c)$$

且有

$$\begin{cases} h_{j1}^x(\theta) = \frac{1}{2G} \left[ \left( \kappa + \frac{j}{2} + (-1)^j \right) \cos\left(\frac{j}{2}\theta\right) - \frac{j}{2} \cos\left(\left(\frac{j}{2} - 2\right)\theta\right) \right], \\ h_{j2}^x(\theta) = -\frac{1}{2G} \left[ \left( \kappa + \frac{j}{2} - (-1)^j \right) \sin\left(\frac{j}{2}\theta\right) - \frac{j}{2} \sin\left(\left(\frac{j}{2} - 2\right)\theta\right) \right], \\ h_{j1}^y(\theta) = \frac{1}{2G} \left[ \left( \kappa - \frac{j}{2} - (-1)^j \right) \sin\left(\frac{j}{2}\theta\right) + \frac{j}{2} \sin\left(\left(\frac{j}{2} - 2\right)\theta\right) \right], \\ h_{j2}^y(\theta) = \frac{1}{2G} \left[ \left( \kappa - \frac{j}{2} + (-1)^j \right) \cos\left(\frac{j}{2}\theta\right) + \frac{j}{2} \cos\left(\left(\frac{j}{2} - 2\right)\theta\right) \right], \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $u_{i,0}, v_{i,0}$  分别表示原 Williams 级数的常数项, 表示裂尖  $i$  的初始位移;  $G$  表示剪切模量; 系数  $\kappa$  定义为: 平面应变取  $3 - 4\mu$ , 平面应力取  $(3 - \mu)/(1 + \mu)$ ,  $\mu$  表示 Poisson(泊松)比;  $a_{i,j}$  和  $b_{i,j}$  是待定系数(又称广义参数), 由外荷载和边界条件确定;  $(r, \theta)$  表示以  $i$  裂尖为原点的极坐标。

根据式(6a)的矩阵  $\mathbf{H}_i(r, \theta)$ , 容易建立式(3)中的转换矩阵  $\mathbf{T}_i$  和式(4)中的形函数矩阵  $\mathbf{N}'_i$ , 并据此得到  $W$  单元的广义参数位移场。

根据断裂力学可知,  $i$  裂尖的 SIF 可由相应的应力分量求得:

$$K_{\perp,i} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{y,i} \quad (\theta = 0); \quad K_{\parallel,i} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy,i} \quad (\theta = 0). \quad (8)$$

根据式(5), 由弹性力学的物理方程和几何方程可得裂尖奇异区域应力场:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,i} = & \sum_{j=1}^m \frac{j}{2} a_{i,j} r^{j/2-1} \left\{ \left[ \frac{j}{2} + 2 + (-1)^j \right] \cos\left(\left(\frac{j}{2} - 1\right)\theta\right) - \right. \\ & \left. \left(\frac{j}{2} - 1\right) \cos\left(\left(\frac{j}{2} - 3\right)\theta\right) \right\} + \\ & \sum_{j=1}^m \frac{j}{2} b_{i,j} r^{j/2-1} \left\{ \left[ \frac{j}{2} + 2 - (-1)^j \right] \sin\left(\left(\frac{j}{2} - 1\right)\theta\right) - \right. \\ & \left. \left(\frac{j}{2} - 1\right) \sin\left(\left(\frac{j}{2} - 3\right)\theta\right) \right\}, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y,i} = & \sum_{j=1}^m \frac{j}{2} a_{i,j} r^{j/2-1} \left\{ - \left[ \frac{j}{2} - 2 + (-1)^j \right] \cos\left(\left(\frac{j}{2} - 1\right)\theta\right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{j}{2} - 1\right) \cos\left(\left(\frac{j}{2} - 3\right)\theta\right) \right\} + \\ & \sum_{j=1}^m \frac{j}{2} b_{i,j} r^{j/2-1} \left\{ - \left[ \frac{j}{2} - 2 - (-1)^j \right] \sin\left(\left(\frac{j}{2} - 1\right)\theta\right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{j}{2} - 1\right) \sin\left(\left(\frac{j}{2} - 3\right)\theta\right) \right\}, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy,i} = & \sum_{j=1}^m \frac{j}{2} a_{i,j} r^{j/2-1} \left\{ - \left[ \frac{j}{2} + (-1)^j \right] \sin\left(\left(\frac{j}{2} - 1\right)\theta\right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{j}{2} - 1\right) \sin\left(\left(\frac{j}{2} - 3\right)\theta\right) \right\} + \\ & \sum_{j=1}^m \frac{j}{2} b_{i,j} r^{j/2-1} \left\{ \left[ \frac{j}{2} - (-1)^j \right] \cos\left(\left(\frac{j}{2} - 1\right)\theta\right) - \right. \\ & \left. \left(\frac{j}{2} - 1\right) \cos\left(\left(\frac{j}{2} - 3\right)\theta\right) \right\}, \end{aligned} \quad (9c)$$

将式(9b)和(9c)代入式(8), 求极限可得

$$K_{\perp,i} = \sqrt{2\pi} a_{i,1}, \quad K_{\parallel,i} = \sqrt{2\pi} b_{i,1}. \quad (10)$$

由此可知, 裂尖的 SIF 能够直接根据广义参数列阵中的  $a_{i,1}$  和  $b_{i,1}$  计算确定, 有效克服了断裂分析的传统有限元法需要根据裂纹端部奇异区内节点表观应力强度因子拟合求解裂尖 SIF 所导致的精度损失问题。

## 2 建立求解域控制方程

根据变分原理, 常规区所有单元的刚度方程可以写为

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (11)$$

将其分块表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rb} \\ \mathbf{K}_{br} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{f}_b \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

其中,下标  $r$  表示位于常规区的节点,  $b$  表示位于常规区与奇异区交界上的节点;相应地,  $\mathbf{w}_b$ ,  $\mathbf{K}'_{bb}$  和  $\mathbf{f}'_b$  分别表示常规单元交界上节点的位移列阵、刚度矩阵和荷载列阵。

各裂尖奇异区均按照图 3 离散为 8 个 W 单元,这里仍以裂尖  $i$  为例,建立其中一个 W 单元的刚度方程。根据式(4)定义的 W 单元位移场,利用变分原理容易建立 W 单元的刚度方程<sup>[12-13]</sup>:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{bb} & \mathbf{K}'_{bs_i} \\ \mathbf{K}'_{s_i b} & \mathbf{K}'_{s_i s_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \mathbf{a}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}'_b \\ \mathbf{f}'_{s_i} \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{K}'_{s_i b} = \mathbf{T}_{s_i}^T \mathbf{K}_{s_i b} = \mathbf{K}'_{bs_i}$ ;  $\mathbf{K}'_{s_i s_i} = \mathbf{T}_{s_i}^T \mathbf{K}_{s_i s_i} \mathbf{T}_{s_i} + \mathbf{K}'_{s_i s_i}$ ; 下标  $s_i$  表示  $i$  裂尖奇异区;  $\mathbf{T}_{s_i}$  表示奇异区最外层微单元中除交界外 5 个节点的转换矩阵;  $\mathbf{K}'_{bb}$  和  $\mathbf{f}'_b$  分别表示奇异区最外层微单元交界上节点的刚度矩阵和荷载列阵。  $\mathbf{K}'_{s_i s_i}$  为  $i$  裂尖奇异区内除最外层外所有等比例梯形微单元对广义参数有限元刚度矩阵的贡献,其第  $p$  行  $q$  列 ( $p, q$  均不等于 1) 元素的计算格式如下:

$$[\mathbf{K}'_{pq}]_{s_i s_i} = \frac{\alpha^{(p+q)/2} - \alpha^{N(p+q)/2}}{1 - \alpha^{(p+q)/2}} [\mathbf{K}'_{pq}]_{s_i s_i}^{(1)}, \quad (14)$$

特殊地,当  $p = q = 1$  时,有

$$[\mathbf{K}'_{11}]_{s_i s_i} = (N - 1) [\mathbf{K}'_{11}]_{s_i s_i}^{(1)}, \quad (15)$$

其中,  $[\mathbf{K}'_{pq}]_{s_i s_i}^{(1)}$  为刚度矩阵  $\mathbf{K}'_{s_i s_i}^{(1)}$  中第  $p$  行  $q$  列的元素,且有

$$\mathbf{K}'_{s_i s_i}^{(1)} = \{ \mathbf{T}_i^{(1)} \}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_i^{(1)}, \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{T}_i^{(1)}$  和  $\mathbf{K}$  分别为奇异区内第一层梯形微单元的转换矩阵和常规有限元刚度矩阵。

由式(13)可形成裂尖  $i$  所有 W 单元刚度方程和并与式(12)进行集成可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rb} & \mathbf{K}_{rs_i} \\ \mathbf{K}_{br} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}'_{bs_i} \\ \mathbf{K}_{s_i r} & \mathbf{K}'_{s_i b} & \mathbf{K}'_{s_i s_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_b \\ \mathbf{a}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{f}_b \\ \mathbf{f}_{s_i} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{K}_{bb} = \mathbf{K}'_{bb} + \mathbf{K}_{bb}^{s_i}$ ,  $\mathbf{f}_b = \mathbf{f}'_b + \mathbf{f}_b^{s_i}$ ; 且有  $\mathbf{K}_{s_i r} = \mathbf{K}_{rs_i} = \mathbf{0}$ 。

将  $2n$  个裂尖奇异区刚度方程与常规区刚度方程集成为求解域的总体控制方程(不考虑裂尖奇异区受荷载的情况):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{br} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{br} & \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}'_{bs_1} & \cdots & \mathbf{K}'_{bs_{2n}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}'_{s_1 b} & \mathbf{K}'_{s_1 s_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}'_{s_{2n} b} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}'_{s_{2n} s_{2n}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_b \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

引入边界条件,求解式(18),即可求得每个裂尖区的广义参数  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2n}$ , 从中提取各列向量中  $a_{i,1}$  和  $b_{i,1}$ , 将其代入式(10)即可得各裂尖的 SIF。

### 3 算例分析

例 1 含 3 条共线水平裂纹的无限大矩形板,取其板宽  $2W = 3.0$  m,板高  $2H = 2.0$  m,板厚

$t = 0.01 \text{ m}$ 。其中一条裂纹为中心裂纹且长度为  $2c = 0.1 \text{ m}$ ，其裂尖用  $A$  表示；另外两条侧裂纹关于  $Y$  轴对称分布，且长度均为  $2c$ ，它们的内裂尖和外裂尖分别用  $B$  和  $C$  表示。以中心裂纹为坐标原点建立整体坐标系  $XOY$ ，相邻裂纹中心与中心、中心与裂尖的距离关系如图 5 所示。矩形板的 Poisson 比  $\mu = 0.167$ ，弹性模量  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$ ；沿着 4 条自由边作用有均布剪力  $\tau = 1.5 \times 10^4 \text{ N/m}$ ，同时在与  $Y$  轴垂直的两条自由边作用有均布拉力  $\sigma = 3 \times 10^4 \text{ N/m}$ 。裂尖奇异区按照图 3 建立离散网格，常规区采用 8 节点等参元离散，分别利用本文 W 单元和 ANSYS 奇异单元计算裂尖 SIF，并通过选取不同的  $l/c$ ，分析裂纹间距对各裂尖 SIF 的影响，并与表 1 中给出的精确解<sup>[15]</sup>进行比较，结果见表 2。

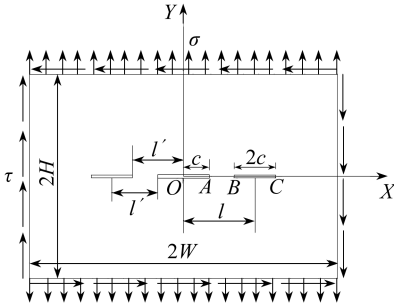


图 5 含 3 条共线裂纹的矩形板

Fig. 5 A rectangular plate with 3 collinear cracks

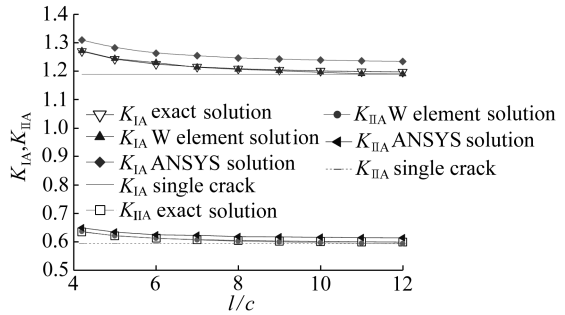


图 6  $K_{IA}, K_{IIA}$  随着  $l/c$  变化

Fig. 6  $K_{IA}, K_{IIA}$  exact vs.  $l/c$

表 1 裂尖  $A, B$  和  $C$  处 SIF 精确解

Table 1 The exact solutions of crack tips  $A, B$  &  $C$

crack tip position	exact solution	note
A	$K_{IA} = F_A \sigma \sqrt{\pi c}, K_{IIA} = F_A \tau \sqrt{\pi c}$	$F_A = \frac{E(k)}{F(k)} \sqrt{\frac{e^2 - a^2}{b^2 - a^2}}, k = \sqrt{\frac{e^2 - b^2}{e^2 - a^2}}$
B	$K_{IB} = F_B \sigma \sqrt{\pi c}, K_{IIB} = F_B \tau \sqrt{\pi c}$	$F_B = \sqrt{\frac{2b(b^2 - a^2)}{(e - b)(e^2 - b^2)}} \left[ 1 - \frac{e^2 - a^2}{b^2 - a^2} \frac{E(k)}{F(k)} \right]$
C	$K_{IC} = F_C \sigma \sqrt{\pi c}, K_{IIC} = F_C \tau \sqrt{\pi c}$	$F_C = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2e}{e - b}} \left[ 1 - \frac{E(k)}{F(k)} \right]$

注 表中  $a = c, b = l', e = l' + 2c$ ;  $F(k)$  和  $E(k)$  分别为第一类和第二类完全椭圆积分。

Note in table 1,  $a = c, b = l', e = l' + 2c$ ;  $F(k)$  and  $E(k)$  are complete elliptic integrals of the 1st and 2nd kinds, respectively.

特殊地，只含单条中心水平裂纹的无限大矩形板在相同荷载下的裂尖 SIF 的精确解为

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi c}, K_{II} = \tau \sqrt{\pi c}. \tag{19}$$

由表 2 可以看出:W 单元解与精确解吻合很好,最大相对误差为 0.9%,且比 ANSYS 奇异单元解精度高,据此验证了本文方法具有较高的计算精度;同时,随着  $l/c$  的增大,即裂纹之间的间距增大,3 个裂尖 SIF 的变化规律呈现相同趋势,故仅将  $A$  裂尖 SIF 随着  $l/c$  的变化表示如图 6 所示。

由图 6 可知:随着  $l/c$  的增大,裂尖  $A$  的 I 型和 II 型 SIF 均减小并且逐渐趋近于单条水平中心裂纹的计算结果;当  $l/c = 9$  时, $A$  裂尖 SIF 与单裂纹裂尖 SIF 相对误差仅为 1.3%,所以当

$l/c > 9$  时, 两侧裂纹对中心裂纹尖端 SIF 的影响已经很小, 此时在工程中可忽略裂纹间的相互影响而将它们分别视为单裂纹考虑。

表 2 各裂尖 SIF 随  $l/c$  的变化  
Table 2 SIF of each crack tip vs.  $l/c$

$l/c$	crack tip position	W element solution		ANSYS solution		exact solution	
		$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$	$K_I$	$K_{II}$
5	A	1.245 0	0.620 8	1.282 2	0.634 2	1.242 8	0.621 4
	B	1.224 5	0.612 4	1.267 7	0.627 8	1.228 8	0.614 4
	C	1.206 4	0.602 6	1.256 6	0.622 5	1.216 3	0.608 1
6	A	1.226 9	0.612 3	1.262 9	0.624 4	1.224 9	0.612 4
	B	1.214 4	0.605 8	1.252 4	0.619 6	1.214 8	0.607 4
	C	1.203 5	0.599 6	1.246 4	0.616 8	1.208 0	0.604 0
7	A	1.213 5	0.607 3	1.254 5	0.622 7	1.214 8	0.607 4
	B	1.207 3	0.602 5	1.245 1	0.617 0	1.207 2	0.603 4
	C	1.201 1	0.596 4	1.240 6	0.614 6	1.203 0	0.601 5

通过增加裂纹条数, 对含多条等长共线水平裂纹的无限大板进一步研究发现, 当任意两条裂纹之间的相对距离满足  $l/c > 9$  时, 则该多裂纹计算模型可视作相互无影响的单裂纹考虑。

例 2 含 2 条等长斜裂纹的无限大矩形板, 取其板宽  $2W = 1.0$  m, 板高  $2H = 1.0$  m, 板厚  $t = 0.01$  m; 以板中心为坐标原点建立整体坐标系  $XOY$ , 沿  $Y$  轴方向作用有均布拉伸荷载  $\sigma = 1.0 \times 10^5$  N/m, 如图 7 所示。两条斜裂纹关于  $Y$  轴对称且其中心连线穿过板中心  $O$ , 裂纹长度为  $2c = 0.1$  m, 与  $X$  轴的夹角为  $\gamma$ , 裂纹中心离  $Y$  轴的水平距离  $l/2 = 0.25$  m; 材料 Poisson 比  $\mu = 0.167$ , 弹性模量  $E = 2 \times 10^5$  MPa。根据对称性, 现取其中一条裂纹作为研究对象, 其裂尖分别用  $A$  和  $B$  表示, 试分析裂尖  $A$  和  $B$  的 SIF。

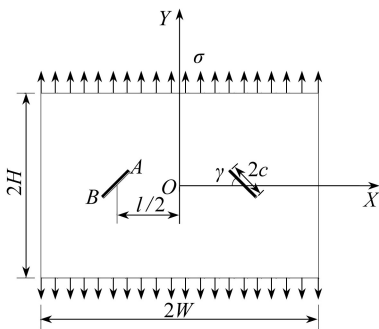


图 7 含 2 条对称斜裂纹的矩形板  
Fig. 7 The rectangular plate with 2 axisymmetric oblique cracks

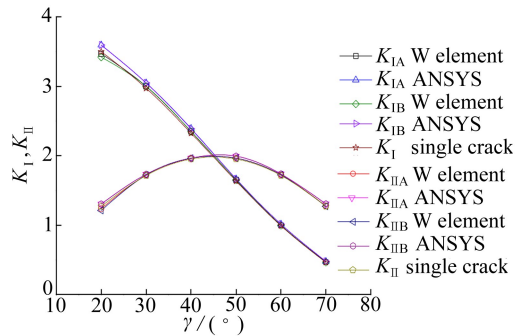


图 8  $A, B$  裂尖 SIF 随  $\gamma$  的变化  
Fig. 8 SIFs around crack tips  $A, B$  vs.  $\gamma$

因夹角太小趋近于纯拉伸解, 夹角太大则拉伸和剪切结果均为 0, 故夹角  $\gamma$  取  $20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ$  和  $70^\circ$ , 分别用本文 W 单元和 ANSYS 奇异单元求解裂尖  $A$  和  $B$  的 SIF。因裂纹关于  $Y$  轴对称, 取半板模型进行有限元网格离散, 本文方法离散节点数 842, 而 ANSYS 采用奇异单元法节点数则达到了 15 600, 计算结果如图 8 所示。

由图 8 可以看出: 1) 裂尖  $A$  和  $B$  的 SIF 相同且跟单条斜裂纹精确解<sup>[15]</sup> 的结果基本一致,



是由于两条斜裂纹中心之间的距离与裂纹半长之比  $l/c$  较大,其裂纹间的相互影响可忽略不计,故而可分别视作单条斜裂纹考虑; 2) 随着夹角  $\gamma$  的增大,  $K_{\perp}$  逐渐减小,  $K_{\parallel}$  先增大( $\gamma$  为  $45^\circ$  时达到最大值)后减小; 3) W 单元解与 ANSYS 奇异单元解结果吻合很好,最大相对误差为 2%,且本文方法离散自由度数仅为 ANSYS 奇异单元法的 5.4%,大幅降低了离散自由度,大大提高了计算效率。

以  $Y$  轴为对称轴,沿  $X$  轴的正负两个方向分别平行增加长度为  $2c$  的斜裂纹条数,且裂纹中心位于  $X$  轴上的无限大板,对其研究发现,当任意两条相邻斜裂纹满足  $l/c > 9$ ,每个裂尖 SIF 的值与单条斜裂纹基本吻合。

## 4 结 论

本文利用广义参数 Williams 单元,研究建立了裂纹群裂尖 SIF 分析的有限元格式,根据裂尖的广义参数列阵可直接确定裂尖 SIF,避免了传统有限元需通过对裂尖附近区域应力强度因子的线性拟合才能得到裂尖 SIF 的繁琐工作。本文方法对裂尖奇异区尺寸不敏感,无需对裂尖区进行网格加密即可获得高精度解,大幅降低了离散自由度,大大提高了计算效率。

当多裂纹板上裂纹间的距离增大到一定程度时,可将多裂纹问题按照单裂纹问题进行解决,简化计算格式。对于含有多条等长共线水平裂纹无限大板,如果相邻两条裂纹相对裂纹间距  $l/c > 9$ ,则可按照单裂纹问题进行分析;对于含关于  $Y$  轴对称的偶数条等长斜裂纹的无限大板,当任意相邻两条斜裂纹中心之间的距离与裂纹半长之比大于 9 时,其结果与单条斜裂纹结论吻合较好,且随着夹角  $\gamma$  的增大,  $K_{\perp}$  逐渐减小,  $K_{\parallel}$  先增大后减小,结论符合工程实际。

**致谢** 作者衷心感谢广西防灾减灾与工程安全重点实验室系统性研究项目(2013ZDX05; 2016ZDX06)对本文的资助。

## 参考文献(References):

- [1] 马文涛,许艳,马海龙.修正的内部基扩充无网格法求解多裂纹应力强度因子[J].工程力学,2015,32(10):18-24.(MA Wen-tao, XU Yan, MA Hai-long. Solving stress intensity factors of multiple cracks by using a modified intrinsic basis enriched meshless method[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(10): 18-24. (in Chinese))
- [2] Muskhelishvili N I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*[M]. Holland: Noordhoff Press, 1953: 1-768.
- [3] Wang Y H, Tham L G, Lee P K K, Tsui Y. A boundary collocation method for cracked plates [J]. *Computers & Structures*, 2003, 81(28): 2621-2630.
- [4] 李爱民,崔海涛,温卫东. I-II 复合型多裂纹板的应力强度因子分析[J]. 机械科学与技术, 2015, 34(5): 803-807. (LI Ai-min, CUI Hai-tao, WEN Wei-dong. Analyzing stress intensity factors of a plate with multiple mixed-mode cracks[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2015, 34(5): 803-807. (in Chinese))
- [5] Chen W H, Chang C S. Analysis of two dimensional fracture problems with multiple cracks under mixed boundary conditions[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1989, 34(4): 921-934.
- [6] 刘钧玉,林皋,胡志强.裂纹面荷载作用下多裂纹应力强度因子计算[J].工程力学,2011,28(4):7-12.(LIU Jun-yu, LIN Gao, HU Zhi-qiang. The calculation of stress intensity factors of

- multiple cracks under surface tractions[J]. *Engineering Mechanics*, 2011, **28**(4): 7-12. (in Chinese))
- [7] Cartwright D J, Rooke D P. Approximate stress intensity factors compounded from known solutions[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1974, **6**(3): 563-571.
- [8] 陈莉, 王志智, 聂学州. 一种多裂纹应力强度因子计算的新方法[J]. 结构强度, 2004, **26**(S): 210-212. (CHEN Li, WANG Zhi-zhi, NIE Xue-zhou. New approach for stress intensity factor calculation of multiple site cracks[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2004, **26**(S): 210-212. (in Chinese))
- [9] Guo Z, Liu Y J, Ma H, Huang S. A fast multipole boundary element method for modeling 2-D multiple crack problems with constant elements[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2014, **47**: 1-9.
- [10] Singh I V, Mishra B K, Pant M. A modified intrinsic enriched element free Galerkin method for multiple cracks simulation[J]. *Materials and Design*, 2010, **31**(1): 628-632.
- [11] 陈军斌, 魏波, 谢青, 王汉青, 李涛涛, 王浩. 基于扩展有限元的页岩水平井多裂缝模拟研究[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(1): 73-83. (CHEN Jun-bin, WEI Bo, XIE Qing, WANG Han-Qing, LI Tao-tao, WANG Hao. Simulation of multi-hydrofracture horizontal wells in shale based on the extended finite element method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): 73-83. (in Chinese))
- [12] 杨绿峰, 徐华, 彭隍, 李冉. 断裂问题分析的 Williams 广义参数单元[J]. 计算力学学报, 2009, **26**(1): 33-39. (YANG Lü-feng, XU Hua, PENG Li, LI Ran. Analysis of crack problems by Williams generalized parametric element [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(1): 33-39. (in Chinese))
- [13] 杨绿峰, 徐华, 李冉, 彭隍. 广义参数有限元法计算应力强度因子[J]. 工程力学, 2009, **26**(3): 48-54. (YANG Lü-feng, XU Hua, LI Ran, PENG Li. The finite element with generalized coefficients for stress intensity factor [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(3): 48-54. (in Chinese))
- [14] 徐华, 杨绿峰, 余振平. III型应力强度因子分析的 Williams 单元[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2012, **43**(8): 3237-3243. (XU Hua, YANG Lü-feng, SHE Zhen-pin. Williams element for mode-III stress intensity factor [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2012, **43**(8): 3237-3243. (in Chinese))
- [15] 中国航空研究院. 应力强度因子手册(增订版)[M]. 北京: 科学出版社, 1993: 75-76, 110-113. (China Aviation Institute. *The Stress Intensity Factor Handbook (Updated Version)* [M]. Beijing: Science Press, 1993: 75-76, 110-113. (in Chinese))

# A Finite Element Method With Generalized DOFs for Stress Intensity Factors of Crack Groups

XU Hua<sup>1</sup>, XU De-feng<sup>1</sup>, YANG Lü-feng<sup>1,2</sup>

(1. *Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety of Ministry of Education; Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Sturctural Safety; Gollege of Civil Engineering and Architecture,*

*Guangxi University, Nanning 530004, P.R.China;*

2. *Department of Housing and Urban-Rural Development,*

*Guangxi Zhuang Autonomous Region, Nanning 530028, P.R.China)*

**Abstract:** Stress intensity factors (SIFs) at crack tips of crack groups were solved by means of the finite element method with generalized DOFs. Firstly, based on the improved Williams series, the typical Williams elements in the singular region around the crack tip were set up. Then the global governing equations were formulated through intergration of the block matrices. Finally, with the undetermined parameters of the Williams series, SIFs at all the crack tips could be directly obtained. The influences of the parameters such as the distance between the centers of 2 adjacent cracks, and angle  $\gamma$  between the oblique crack and axis  $X$  on the calculation results were further analyzed through several examples. The results show that the proposed method can effectively overcome the defects of traditional finite element methods and it has higher accuracy and efficiency. Moreover, as for an infinite plate with multiple collinear horizontal cracks, when the ratio of the distance between the centers of 2 adjacent cracks to the half crack length is bigger than 9, the interaction among cracks can be ignored, so multiple cracks can be regarded as a single crack for calculation. For an infinite plate with an even number of axisymmetric oblique cracks, as angle  $\gamma$  increases,  $K_{\perp}$  decreases, but  $K_{\parallel}$  first increases and then decreases.

**Key words:** generalized DOF; stress intensity factor; crack group; Williams element; singular region size

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51268003;51478125)

---

引用本文/Cite this paper:

徐华, 徐德峰, 杨绿峰. 裂纹群应力强度因子分析的广义参数有限元法[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(10): 1039-1049.

XU Hua, XU De-feng, YANG Lü-feng. A finite element method with generalized DOFs for stress intensity factors of crack groups[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(10): 1039-1049.