应用数学和力学,第 38 卷 第 3 期
2017 年 3 月 15 日出版
Applied Mathematics and Mechanics
Vol.38,No.3,Mar.15,2017

文章编号:1000-0887(2017)03-0347-08

一种改进的隐式 Euler 切线法*

王希云[1], 贾新辉[1], 王子豪[2]

(1. 太原科技大学 应用科学学院, 太原 030024;
2. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433)

摘要: 对于 Hessian 矩阵正定的情形,在求解二次函数模型信赖域子问题的隐式分段折线算法的基础上,提出一种求解信赖域子问题的改进的隐式 Euler 切线法,并分析该路径的性质.数值实验表明新算法是有效可行的,且较原算法具有迭代次数少、计算时间短等优点.

关 键 词: 隐式 Euler 切线法; 信赖域子问题; 微分方程模型; 无约束优化; 信赖域方法

中图分类号: O221 **文献标志码:** A doi: 10.21656/1000-0887.370160

引 言

随着计算机的发展及应用,非线性最优化理论与方法成为运筹学的重要分支,且在自然科学、系统工程、经济管理、优化设计等领域有广泛的应用.在非线性优化中,信赖域方法因具有很好的性质而成为了研究的热点.目前,它和线搜索法并列为求解非线性优化问题的两类主要方法.

信赖域方法的关键是求解如下形式的信赖域子问题:

$$\min q(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}, \qquad \text{s.t. } \|\boldsymbol{\delta}\|_2 \leqslant \Delta, \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{g} \in R^n$ 是目标函数在当前迭代点 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的梯度, $\boldsymbol{B} \in R^{n\times n}$ 是目标函数在当前迭代点 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的 Hessian 矩阵近似, $\Delta > 0$ 是信赖域半径, $\boldsymbol{\delta} \in R^n$ 是待求的变量.随着 Δ 的不断变化,信赖域子问题(1) 的解 $\boldsymbol{\delta}^*$ 构成空间曲线,即最优曲线.

目前,求解子问题(1)的方法主要有精确求解方法、折线法和截断共轭梯度法.而当 Hessian 矩阵正定时,折线法相对更有效且经济.常用的折线法有单折线法[1]、双折线法[2]、切线单折线法[3]、不定折线法[4-5]、双割线折线法[6]等.2015 年王希云、李亮等根据最优曲线的参数方程提出一个微分方程模型[7],并针对该模型利用文献[8]中的方法构造了一条隐式分段折线,进而提出一种求解子问题(1)的隐式分段折线算法[9].数值实验表明该算法取得了较好的数值效果,但其缺点是选用的步长形式较复杂,计算时间相对较长,并且文献[9]中定理 4.1 的条

* 收稿日期: 2016-05-23; 修订日期: 2016-05-29
基金项目: 山西省自然科学基金(2008011013);山西省“131”领军人才工程项目
作者简介: 王希云(1964—),女,教授(E-mail: tykdwxy@126.com);
贾新辉(1990—),女,硕士生(通讯作者. E-mail: 1490528705@qq.com).

件还可以进一步改善.

1 步 长

文献[9]运用定理 4.1 的假设条件可证明构造的折线满足引理 6.4.1[10],但前提又要利用引理 4.1 的结论(ii)[9].为了证明该结论,构造了较为繁琐的步长,导致迭代次数多,计算时间较长.本文为简化步长形式,将文献[9]的假设条件修正为

$$-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_n\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_n-\boldsymbol{\delta}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\mu_n\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_n\geqslant 0, \tag{2}$$

并在该条件下证明了算法的适定性,也不需利用结论(ii)[9].且步长可简化为

$$h'_n=\min\left(\frac{\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+(n+1)\gamma\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_n}{\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_n\boldsymbol{I})^{-2}\boldsymbol{\delta}_n},\ \gamma\right), \tag{3}$$

$$h_n=\min\left(h'_n,\ \frac{\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}}{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}}\right), \tag{4}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$;γ 为限制每次迭代所能达到的最大步长值.从而提出了一种求解子问题(1)的改进的隐式 Euler 切线法.数值结果表明新算法较隐式分段折线法具有迭代次数少、运算时间短等优点.

2 改进的隐式 Euler 切线路径的性质分析

由文献[8]得求解微分方程的隐式 Euler 公式为

$$\boldsymbol{\delta}_{n+1}=\boldsymbol{\delta}_n-h_n(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}\qquad(n=0,1,2,\cdots), \tag{5}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}=\boldsymbol{\delta}_n-h'_n(\boldsymbol{B}+\mu_n\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_n\qquad(n=0,1,2,\cdots). \tag{6}$$

记改进的隐式 Euler 切线 $\boldsymbol{\Gamma}=[M_0,M_1,\cdots,M_N]$ 为

$$\boldsymbol{\delta}(\tau)=\begin{cases}\boldsymbol{\delta}_0-\tau(\boldsymbol{B}+\mu_1\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1, & \tau\in[\beta_0,\beta_1],\\ \boldsymbol{\delta}_1-(\tau-\beta_1)(\boldsymbol{B}+\mu_2\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_2, & \tau\in(\beta_1,\beta_2],\\ \boldsymbol{\delta}_2-(\tau-\beta_2)(\boldsymbol{B}+\mu_3\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_3, & \tau\in(\beta_2,\beta_3],\\ \vdots & \\ \boldsymbol{\delta}_{N-1}-(\tau-\beta_{N-1})(\boldsymbol{B}+\mu_N\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_N, & \tau\in(\beta_{N-1},\beta_N],\end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\beta_0=0,\ \beta_{i+1}=\beta_i+h_i,\ i=0,1,2,\cdots,N-1.$$

定理 1 设 $\boldsymbol{B}$ 对称正定,则当 $n=0,1,2,\cdots,N-1$ 时,如下不等式成立:

$$\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}\geqslant 0. \tag{8}$$

证 当 $n=0,1,2,\cdots,N-1$ 时,有

$$\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}=$$
$$\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_n-h'_n\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B}+\mu_n\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_n,$$

由式(3)得

$$h'_n\leqslant\frac{\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+(n+1)\gamma\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_n}{\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_n\boldsymbol{I})^{-2}\boldsymbol{\delta}_n}\leqslant\frac{\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_n}{\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B}+\mu_n\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_n},$$

故有

$$\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}\geqslant 0.$$

定理 2 设 $\boldsymbol{B}$ 对称正定，当 $n=1,2,\cdots,N$ 时，式(2) 成立.则 $\boldsymbol{\delta}(\tau)$ 满足

1) $\|\boldsymbol{\delta}(\tau)\|_2$ 关于 τ 为单调减函数;

2) $q[\boldsymbol{\delta}(\tau)]$ 关于 τ 为单调增函数.

证

1) 对 $\forall\tau\in[\beta_i,\beta_{i+1}]$，即$(\tau-\beta_i)\in[0,h_i]$，$i=0,1,2,\cdots,N-1$ 时有

$$\|\boldsymbol{\delta}(\tau)\|_2^2=$$
$$\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_i-2(\tau-\beta_i)\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}+(\tau-\beta_i)^2\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}.$$

求导得

$$(\|\boldsymbol{\delta}(\tau)\|_2^2)'=-2\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}+2(\tau-\beta_i)\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}.$$

由式(4)得

$$h_i\leqslant\frac{\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}}{\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}}.$$

故对 $\forall\tau\in[\beta_i,\beta_{i+1}]$，$i=0,1,2,\cdots,N-1$ 时，$\|\boldsymbol{\delta}(\tau)\|_2$ 关于 τ 为单调减函数.

2) 对 $\forall\tau\in[\beta_i,\beta_{i+1}]$，即$(\tau-\beta_i)\in[0,h_i]$，$i=0,1,2,\cdots,N-1$ 时有

$$q[\boldsymbol{\delta}(\tau)]=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_i-(\tau-\beta_i)\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}+$$
$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}_i-(\tau-\beta_i)\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}+$$
$$\frac{1}{2}(\tau-\beta_i)^2\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}.$$

求导得

$$(q[\boldsymbol{\delta}(\tau)])'=-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}-\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}+$$
$$(\tau-\beta_i)\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}\geqslant$$
$$-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}-\boldsymbol{\delta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}+\mu_{i+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{i+1}\geqslant 0.$$

故对 $\forall\tau\in[\beta_i,\beta_{i+1}]$，$i=0,1,2,\cdots,N-1$ 时，$q[\boldsymbol{\delta}(\tau)]$ 关于 τ 为单调增函数.

3 算　　法

改进的隐式 Euler 切线算法的具体步骤如下：

步 1 给定梯度 $\boldsymbol{g}$，正定矩阵 $\boldsymbol{B}$，信赖域半径 Δ.

步 2 计算 $\boldsymbol{\delta}_0=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{g}$.

步 3 若 $\|\boldsymbol{\delta}_0\|_2\leqslant\Delta$，则取 $\boldsymbol{\delta}^*=\boldsymbol{\delta}_0$，停止计算.否则，转步 4.

步 4 令

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1=\boldsymbol{\delta}_0-h_0'(\boldsymbol{B}+\mu_0\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_0,\boldsymbol{\delta}_1=\boldsymbol{\delta}_0-h_0(\boldsymbol{B}+\mu_1\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1,$$

其中 $\mu_0=0$，h_0'如式(3)，$\mu_1=h_0'$，h_0 如式(4).若 $\|\boldsymbol{\delta}_1\|_2\leqslant\Delta$，则取 $\boldsymbol{\delta}^*=\boldsymbol{\delta}_0-\rho(\boldsymbol{B}+\mu_1\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1$，其中

$$\rho=(b-\sqrt{b^2-ac})a^{-1},\ a=\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1^{\mathrm{T}}((\boldsymbol{B}+\mu_1\boldsymbol{I})^{-1})^2\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1,$$

$$b=\boldsymbol{\delta}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_1\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1,\ c=\|\boldsymbol{\delta}_0\|_2^2-\Delta^2,$$

停止计算.否则,令 $n:=1$, 转步 5.

步 5 令

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}=\boldsymbol{\delta}_n-h_n'(\boldsymbol{B}+\mu_n\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{\delta}_n,\ \boldsymbol{\delta}_{n+1}=\boldsymbol{\delta}_n-h_n(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1},$$

其中 $\mu_n=\mu_{n-1}+h_{n-1}'$,h_n' 如式(3),h_n 如式(4).转步 6.

步 6 若 $\|\boldsymbol{\delta}_{n+1}\|_2\leqslant\Delta$,则取 $\boldsymbol{\delta}^*=\boldsymbol{\delta}_n-\rho(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}$, 其中

$$\rho=(b-\sqrt{b^2-ac})a^{-1},\ a=\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1}^{\mathrm{T}}((\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1})^2\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1},$$

$$b=\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}+\mu_{n+1}\boldsymbol{I})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n+1},\ c=\|\boldsymbol{\delta}_n\|_2^2-\Delta^2,$$

停止计算.否则,令 $n:=n+1$, 转步 5.

4 数值实验

将本文中改进的隐式 Euler 切线算法,运用 MATLAB 进行数值实验.采用文献[9]中的测试函数 1 和测试函数 2,针对不同的信赖域半径 Δ,选取 $\gamma=0.3$, 并与文献[9]中提出的隐式分段折线法进行数值结果比较,结果分别列在表 1~4 中.

其中, Δ 表示信赖域半径,t 表示求解子问题所用的时间,n 表示迭代次数,q 表示最优解的函数值,IPD 表示隐式分段折线法,IIPD 表示改进的隐式 Euler 切线法, t_{IPD} 表示隐式分段折线法所用的时间,t_{IIPD} 表示改进的隐式 Euler 切线法所用的时间, n_{IPD} 表示隐式分段折线法的迭代次数,n_{IIPD} 表示改进的隐式 Euler 切线法的迭代次数, q_{IPD} 表示隐式分段折线法求得的最优解的函数值,q_{IIPD} 表示改进的隐式 Euler 切线法求得的最优解的函数值.测试函数为

$$\text{Function 1:}\quad \min q_k(\boldsymbol{s})=\begin{bmatrix}-10\\-10\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0\\0&5\end{bmatrix}\boldsymbol{s},\qquad \text{s.t. }\|\boldsymbol{s}\|_2\leqslant\Delta;\tag{9}$$

$$\text{Function 2:}\quad \min q_k(\boldsymbol{s})=\begin{bmatrix}-10\\0\\0\\-10\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&10&0\\0&0&0&20\end{bmatrix}\boldsymbol{s},$$

$$\text{s.t. }\|\boldsymbol{s}\|_2\leqslant\Delta.\tag{10}$$

对于式(9),

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{g}\|_2=10.20;$$

对于式(10),

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{g}\|_2=10.02.$$

由表 1~4 可以得出,在信赖域半径较小时,本文提出的改进的隐式 Euler 切线法要比隐式分段折线法的计算速度快,迭代次数少,且在计算结果的精确度上与之相近.对于式(9),当信赖域半径 $4\leqslant\Delta\leqslant7.2$ 时,改进的隐式 Euler 切线法求得的信赖域子问题(1)的最优值要比隐式分段折线法的好,当信赖域半径 $1\leqslant\Delta\leqslant2.36$ 及 $8\leqslant\Delta\leqslant8.5$ 时,本文算法不如隐式分段折线法的结果好;对于式(10),当 $3\leqslant\Delta\leqslant7$ 时,本文算法比隐式分段折线法的结果好,当 $0.3\leqslant\Delta\leqslant1$ 及 $7.3\leqslant\Delta\leqslant8.3$ 时,隐式分段折线法的结果较好.

表 1　Function 1 最优解的数值结果

Table 1　The numerical results of the optimal solution of function 1

Δ	q		
	q_{IPD}	q_{IIPD}	$q_{\mathrm{IPD}}-q_{\mathrm{IIPD}}$
1	−12.706 492	−9.984 020	−2.722 472
1.5	−18.209 826	−16.995 482	−1.214 344
2.36	−26.605 402	−26.349 304	−0.256 098
4	−39.536 874	−39.562 085	0.025 211
4.3	−41.520 280	−41.549 787	0.029 507
5	−45.725 845	−45.754 370	0.028 525
5.4	−47.871 696	−47.895 269	0.023 573
6.3	−52.036 952	−52.047 897	0.010 945
6.5	−52.840 754	−52.848 719	0.007 965
7	−54.658 468	−54.660 722	0.002 254
7.2	−55.309 855	−55.310 162	0.000 307
8	−57.486 746	−57.485 629	−0.001 117
8.5	−58.502 380	−58.502 242	−0.000 138
9.5	−59.747 821	−59.748 126	0.000 305
≥10.20	−60	−60	0

表 2　Function 1 的运行时间及迭代次数结果

Table 2　The running time and the number of iterations of function 1

Δ	t			n	
	t_{IPD}	t_{IIPD}	$t_{\mathrm{IPD}}-t_{\mathrm{IIPD}}$	n_{IPD}	n_{IIPD}
1	0.036 704	0.018 863	0.017 841	52	14
1.5	0.040 350	0.019 676	0.020 674	33	10
2.36	0.042 494	0.020 183	0.022 311	19	8
4	0.043 579	0.020 560	0.023 519	10	6
4.3	0.044 470	0.020 935	0.023 535	9	6
5	0.045 229	0.021 248	0.023 981	7	5
5.4	0.045 844	0.021 559	0.024 285	6	5
6.3	0.046 295	0.021 809	0.024 486	5	4
6.5	0.046 857	0.022 059	0.024 798	5	4
7	0.047 218	0.022 309	0.024 909	4	4
7.2	0.047 551	0.022 559	0.024 992	4	4
8	0.048 687	0.023 320	0.025 367	3	3
8.5	0.048 959	0.023 520	0.025 438	3	3
9.5	0.049 932	0.024 224	0.025 708	2	2
10.20	0.049 989	0.024 268	0.025 721	1	1

而当信赖域半径 $\Delta=\|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{g}\|_2$ 时，两种方法求得的结果一样.因此，本文提出的改进的隐式 Euler 切线法很好地近似了最优曲线，且比隐式分段折线法的迭代次数少，计算时间短，是

有效可行的.

表 3 Function 2 最优解的数值结果

Table 3 The numerical results of the optimal solution of function 2

Δ	q		
	q_{IPD}	q_{IIPD}	$q_{\mathrm{IPD}}-q_{\mathrm{IIPD}}$
0.3	−3.825 649	−2.101 717	−1.723 932
1	−11.186 905	−11.045 991	−0.140 914
3	−27.733 243	−27.733 661	0.000 418
3.5	−31.158 704	−31.160 086	0.001 382
4	−34.322 805	−34.324 262	0.001 457
4.5	−37.229 017	−37.230 268	0.001 251
5	−39.879 490	−39.880 436	0.000 946
5.7	−43.163 189	−43.163 716	0.000 527
5.8	−43.591 749	−43.592 234	0.000 485
6.3	−45.583 023	−45.583 266	0.000 243
6.5	−46.308 881	−46.309 038	0.000 157
7	−47.947 119	−47.947 130	0.000 011
7.3	−48.809 258	−48.809 208	−0.000 050
8.3	−51.029 454	−51.029 450	−0.000 004
9	−51.986 063	−51.986 074	0.000 011
≥10.02	−52.5	−52.5	0

表 4 Function 2 的运行时间及迭代次数结果

Table 4 The running time and the number of iterations of function 2

Δ	t/s			n	
	t_{IPD}	t_{IIPD}	$t_{\mathrm{IPD}}-t_{\mathrm{IIPD}}$	n_{IPD}	n_{IIPD}
0.3	0.036 776	0.006 081	0.030 695	173	36
1	0.043 288	0.007 744	0.035 544	46	10
3	0.045 091	0.008 855	0.036 236	13	7
3.5	0.046 551	0.009 802	0.036 749	11	6
4	0.047 701	0.010 739	0.036 962	9	6
4.5	0.048 710	0.011 550	0.037 160	8	5
5	0.049 602	0.012 427	0.037 175	7	5
5.7	0.050 233	0.013 121	0.037 112	5	4
5.8	0.050 857	0.013 764	0.037 093	5	4
6.3	0.051 464	0.014 405	0.037 059	5	4
6.5	0.051 958	0.015 034	0.036 924	4	4
7	0.052 499	0.015 662	0.036 837	4	4
7.3	0.053 202	0.016 113	0.037 089	4	3
8.3	0.053 551	0.016 565	0.036 986	3	3
9	0.053 848	0.016 986	0.036 862	2	2
10.02	0.053 899	0.017 066	0.036 833	1	1

本文值得进一步研究的内容:

(Ⅰ) 只从计算结果好坏的角度来看,整体上本文算法要比文献[9]提出的算法计算结果优,且在信赖域半径相对较小时尤为明显,但也有一些情况本文算法的计算结果较劣.对于出现上述结果的原因可以从以下几个方面进行分析探讨:

① 可从文中的假设条件着手,考虑是否与所选取的测试函数有关,不同的测试函数有不

同的梯度 $\boldsymbol{g}$ 和 Hessian 矩阵 $\boldsymbol{B}$，研究不同的测试函数的假设条件右端值的不同，从而研究造成上述结果的原因；

② 可选取不同的 γ 值进行数值实验，分析是否为原因.

(Ⅱ) 本文算法最大的优势是计算速度快，对于求解大型信赖域子问题时可节约成本，可考虑对于信赖域整体算法是否更具优势，值得进一步研究.

参考文献(References)：

[1] Powell M J D. A hybrid method for nonlinear equations[C]//Rabonowitz P, ed. *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*. London: Gordon and Breach, 1970: 87-114.

[2] Dennis Jr J E , Mei H H W. Two new unconstrained optimization algorithms which use function and gradient values[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1979, **28**(4): 453-482.

[3] 赵英良, 徐成贤. 解信赖域子问题的切线单折线法[J]. 数值计算与计算机应用, 2000, **21**(1): 77-80.(ZHAO Ying-liang, XU Cheng-xian. Tangent single dogleg method for trust region subproblems[J]. *Journal of Numerical Methods and Computer Applications*, 2000, **21**(1): 77-80.(in Chinese))

[4] ZHANG Jian-zhong, XU Cheng-xian. A class of indefinite dogleg path methods for unconstrained minimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 1999, **9**(3): 646-667.

[5] CHEN Jun, SUN Wen-yu. Nonmonotone adaptive trust region algorithms with indefinite dogleg path for unconstrained minimization[J]. *Northeastern Mathematical Journal*, 2008, **24**(1): 19-30.

[6] 王希云, 邵安. 一种双割线折线法求解信赖域子问题[J]. 应用数学, 2012, **25**(2): 419-424.(WANG Xi-yun, SHAO An. A double secant dogleg method for solving trust region subproblem[J]. *Mathematica Applicata*, 2012, **25**(2): 419-424.(in Chinese))

[7] 王希云, 李亮, 张雅琦, 等. 一种求解二次函数模型信赖域子问题的分段切线算法[J]. 应用数学, 2015, **28**(1): 26-32.(WANG Xi-yun, LI Liang, ZHANG Ya-qi, et al. The subsecttion tangent algorithm for solving trust-region subproblems of quadratic models[J]. *Mathematica Applicata*, 2015, **28**(1): 26-32.(in Chinese))

[8] 颜庆津. 数值分析[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.(YAN Qing-jin. *Numerical Analysis*[M]. Beijing: Beihang University Press, 2006.(in Chinese))

[9] 王希云, 李亮, 于海波. 解信赖域子问题的隐式分段折线算法[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(6): 610-619.(WANG Xi-yun, LI Liang, YU Hai-bo. An implicit piecewise dogleg algorithm for solving trust-region subproblems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(6): 610-619.(in Chinese))

[10] 李董辉, 童小娇, 万中. 数值最优化算法与理论[M]. 北京: 科学出版社, 2010.(LI Dong-hui, TONG Xiao-jiao, WAN Zhong. *Numerical Optimization Algorithms and Theory*[M]. Beijing: Science Press, 2010.(in Chinese))

An Improved Implicit Eulerian Tangent Algorithm

WANG Xi-yun[1], JIA Xin-hui[1], WANG Zi-hao[2]

(1. *School of Applied Science*, *Taiyuan University of Science and Technology*, *Taiyuan* 030024, *P.R.China*;

2. *School of Mathematical Sciences*, *Fudan University*, *Shanghai* 200433, *P.R.China*)

Abstract: Based on the implicit piecewise dogleg algorithm for solving trust region subproblems of quadratic models, and aimed at the condition that the Hessian matrix was positive definite, an improved implicit Eulerian tangent algorithm for solving trust region subproblems was presented. Then the nature of the path was analyzed. The numerical experiments show that the new algorithm is effective and practicable, and the advantages of the new algorithm compared with the previous algorithms lie in the smaller number of iterations, the shorter computing time and so on.

Key words: implicit Eulerian tangent algorithm; trust region subproblem; differential equation model; unconstrained optimization; trust region method

引用本文/Cite this paper:

王希云, 贾新辉, 王子豪. 一种改进的隐式 Euler 切线法[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(3): 347-354.

WANG Xi-yun, JIA Xin-hui, WANG Zi-hao. An improved implicit Eulerian tangent algorithm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(3): 347-354.