应用数学和力学,第 38 卷 第 3 期
2017 年 3 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol.38,No.3,Mar.15,2017

文章编号:1000-0887(2017)03-0276-08

关于轴对称 Navier-Stokes 方程正则性的一个注记*

谢洪燕[1], 李 杰[2], 贺方毅[3]

(1. 西南财经大学 经济学院, 成都 611130;
2. 四川省委党校 公共管理教研部, 成都 610000;
3. 西南财经大学 金融学院, 成都 611130)

摘要: 建立了一个关于轴对称不可压 Navier-Stokes 系统的正则性准则.证明了如果局部的轴对称光滑解 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\|\omega^r\|_{L^{\alpha_1}((0,T);L^{\beta_1})} + \|\omega^\theta/r\|_{L^{\alpha_2}((0,T);L^{\beta_2})} < \infty$,其中 $2/\alpha_1 + 3/\beta_1 \leqslant 1 + 3/\beta_1$,$2/\alpha_2 + 3/\beta_2 \leqslant 2$ 和 $\beta_1 \geqslant 3$, $\beta_2 > 3/2$,那么此强解将保持光滑性直至时刻 T.

关 键 词: Navier-Stokes 方程; 轴对称流; 爆破准则

中图分类号: O175.29　　**文献标志码:** A　　doi:10.21656/1000-0887.370192

引 言

Navier-Stokes 方程组是流体运动的基本模型方程,在物理学、工程学和血液动力学等诸多领域都有广泛的应用[1-3].它们可以对大气洋流、管道中的流质、机翼附近的气流、血液等各种液体的流动进行建模.通过对 Navier-Stokes 方程组完全或简化形式的研究,可以更好地预测天气、防止污染、提高飞机的性能以及辅助治疗各种心血管疾病等.

本文研究以下位于全空间的经典三维不可压缩 Navier-Stokes 方程组:

$$\begin{cases}\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \nabla p = \nu\Delta\boldsymbol{u},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,\\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t=0) = \boldsymbol{u}_0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \in R^3$ 和 $p(\boldsymbol{x},t) \in \mathbf{R}$ 分别代表未知的速度场和压力,$\boldsymbol{\nu}$ 为系统的粘滞系数.

至今已有大量工作致力于上述系统的研究,然而具有任意大初始数据的系统(1)的整体适定性仍然是一个具有挑战性的公开问题,参见文献[4-6].本文要考察的是具有轴对称初始数据的系统(1).如果系统(1)中的 $\boldsymbol{u}_0$ 是轴对称的,那么系统(1) 的解 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 也是轴对称的[7-8].所以,可以将 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 方便地写作如下形式:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = u^r(r,z,t)\boldsymbol{e}_r + u^\theta(r,z,t)\boldsymbol{e}_\theta + u^z(r,z,t)\boldsymbol{e}_z,$$

其中 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 为在圆柱坐标系下的标准正交单位向量

$$\boldsymbol{e}_r = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0\right) = (\cos\theta, \sin\theta, 0),$$

* **收稿日期:** 2016-06-21; **修订日期:** 2016-10-16
基金项目: 国家自然科学基金(71102145)
作者简介: 谢洪燕(1983—),女,副教授,博士(通讯作者. E-mail: xiehongyan@swufe.edu.cn).

$$e_\theta = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0\right) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0),$$

$$e_z = (0, 0, 1),$$

且 $$r = ({x_1}^2 + {x_2}^2)^{1/2}.$$

通过直接计算,很容易得到如下关系式:

$$\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_z)^{\mathrm{T}} = \partial_r e_r + \frac{\partial_\theta}{r} e_\theta + \partial_z e_z,$$

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial_\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

以及

$$\frac{\partial e_r}{\partial\theta} = e_\theta, \frac{\partial e_\theta}{\partial\theta} = -e_r.$$

因此,系统(1)可以被等价地改写为如下形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}u^r - \nu\left(\partial_r^2 + {\partial_z}^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r - \dfrac{1}{r^2}\right)u^r - \dfrac{(u^\theta)^2}{r} + \partial_r p = 0, \\ \dfrac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}u^\theta - \nu\left(\partial_r^2 + {\partial_z}^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r - \dfrac{1}{r^2}\right)u^\theta + \dfrac{u^r u^\theta}{r} = 0, \\ \dfrac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}u^z - \nu\left(\partial_r^2 + {\partial_z}^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r\right)u^z + \partial_z p = 0, \\ u|_{t=0} = u_0^r e_r + u_0^\theta e_\theta + u_0^z e_z, \end{cases}$$

其中 $\tilde{\mathrm{D}}/\mathrm{D}t$ 代表物质导数

$$\frac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t} = \partial_t + u^r\partial_r + u^z\partial_z.$$

如果 $u^\theta = 0$(即所谓的没有漩涡), Ukhovskii, Yudovich[8](也可参见文献[7])证明了广义解的存在性、唯一性和正则性.当 $u^\theta \neq 0$(即有漩涡)时, 这是非常复杂和困难的.最新的进展可参阅文献[7,9-11],找到具有小的初始数据时关于解的正则性准则或全局存在性的相关结果.特别地,在最新的文献[10]中建立了依赖于 u^θ 的正则性准则.

而本文目的是要给出关于 ω^r 和 ω^θ/r 的正则性准则(众所周知,旋度 ω 是非常重要的量).更确切地说,有如下的定理.

定理 1　假设 $u_0 \in H^2$ 和 $u \in C([0,T);H^2(R^3)) \cap L^2([0,T);H^3(R^3))$ 为系统(1)的解.如果它满足

$$\begin{cases} \|\omega^r\|_{L^{\alpha_1}((0,T);L^{\beta_1})} + \left\|\dfrac{\omega^\theta}{r}\right\|_{L^{\alpha_2}((0,T);L^{\beta_2})} < \infty, \\ \dfrac{2}{\alpha_1} + \dfrac{3}{\beta_1} \leqslant 1 + \dfrac{3}{\beta_1}, \dfrac{2}{\alpha_2} + \dfrac{3}{\beta_2} \leqslant 2, \beta_1 \geqslant 3, \beta_2 > 3/2, \end{cases} \tag{2}$$

那么 $u(x,t)$ 保持光滑直至时刻 T.

注 1　当 $\beta_2 = 3/2$ 时,取 $\alpha_2 = \infty$,并要求 $\|\omega^\theta/r\|_{L^\infty((0,T);L^{3/2})}$ 充分小的话,定理依然是成立的.关于这种端点情形的处理,建议参考文献[12].

定义 1　一个可测向量 u 被称为 Navier-Stokes 方程组(1)的一个 Leray-Hopf 弱解,如果 u

满足如下的性质：

(i) $\boldsymbol{u}$ 从 $[0,T)$ 到 $L^2(R^3)$ 弱连续；

(ii) $\boldsymbol{u}$ 从分布的意义上使得式(1)成立，即

$$\int_0^T\int_{R^3}(\partial_t\boldsymbol{\phi}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{R^3}\boldsymbol{u}_0\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},0)\mathrm{d}x=\int_0^T\int_{\mathbf{R}}\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

对所有的 $\boldsymbol{\phi}\in C_0^\infty(R^3\times[0,T))$ 满足 $\operatorname{div}\boldsymbol{\phi}=0$ 都成立，其中 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=\sum_{i,j}^3 a_{ij}b_{ij}$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 及 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 3×3 矩阵，并且

$$\int_0^T\int_{R^3}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$$

对每个 $\boldsymbol{\phi}\in C_0^\infty(R^3\times[0,T))$ 成立.

(iii) 能量不等式，即

$$\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_{L^2}^2+2\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^2([0,t);L^2)}^2\leqslant\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2}^2,\qquad 0\leqslant t<T.$$

而对于强解，指的是一个弱解 $\boldsymbol{u}$ 满足

$$\boldsymbol{u}\in L^\infty([0,T);H^1)\cap L^2([0,T);H^2).$$

众所周知的是，强解都是光滑及唯一的，甚至在弱解族中.

对于标准的 Navier-Stokes 方程组，关于其中部分分量正则性准则的一些有趣的数学研究结果，可参见文献[13-15]以及其中引用的文献.关于旋度的研究，可参看文献[16]以及其中引用的文献.

本文其余部分安排如下.第 1 节给出了一些关键的引理.第 2 节是对定理 1 给出证明.最后一节为结束语.

1 关键的引理

在进入细节讨论前，先介绍一些将要用到的符号.$L^{p,q}$ 被定义为

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^{p,q}}=\begin{cases}\left(\int_0^t\|\boldsymbol{u}\|_{L^q}^p\mathrm{d}\tau\right)^{1/q}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}_{0<\tau<t}\|\boldsymbol{u}\|_{L^q}, & p=\infty,\end{cases}$$

其中

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^q}=\begin{cases}\left(\int_{R^3}|\boldsymbol{u}|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}, & 1\leqslant q<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in R^3}|\boldsymbol{u}|, & q=\infty.\end{cases}$$

其次，引入旋度场和相应的方程：

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u^z}{\partial z}-\frac{\partial u^\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial u^r}{\partial z}-\frac{\partial u^z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(u^\theta r)-\frac{1}{r}\frac{\partial u^r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_z,$$

或者等价地有

$$\boldsymbol{\omega}=\omega^r\boldsymbol{e}_r+\omega^\theta\boldsymbol{e}_\theta+\omega^z\boldsymbol{e}_z=-\partial_z u^\theta\boldsymbol{e}_r+(\partial_z u^r-\partial_r u^z)\boldsymbol{e}_\theta+\left(\partial_r u^\theta+\frac{u^\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_z.$$

那么有如下的旋度方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}\omega^r - \nu\left(\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r - \dfrac{1}{r^2}\right)\omega^r - (\omega^r\partial_r + \omega^z\partial_z)u^r = 0, \\ \dfrac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}\omega^\theta - \nu\left(\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r - \dfrac{1}{r^2}\right)\omega^\theta - \dfrac{2u^\theta\partial_z u^\theta}{r} - \dfrac{u^r\omega^\theta}{r} = 0, \\ \dfrac{\tilde{\mathrm{D}}}{\mathrm{D}t}\omega^z - \nu\left(\partial_r^2 + \partial_z^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r\right)\omega^z - (\omega^r\partial_r + \omega^z\partial_z)u^z = 0, \\ \boldsymbol{\omega}|_{t=0} = \omega_0^r\boldsymbol{e}_r + \omega_0^\theta\boldsymbol{e}_\theta + \omega_0^z\boldsymbol{e}_z. \end{cases}$$

如果令 $\tilde{\boldsymbol{u}} \triangleq u^r\boldsymbol{e}_r + u^z\boldsymbol{e}_z$，则

$$\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}} = 0,\ \nabla\times\tilde{\boldsymbol{u}} = \omega^\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

为了证明定理 1，先给出以下几个关键的引理.

引理 1（文献[4]的引理 2） 假设 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 为一个轴对称的向量满足 $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$，并且 $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{curl}\boldsymbol{u}$ 在 R^3 的无穷远附近足够迅速的变为 0，则 $\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}$ 和 $\nabla(u^\theta\boldsymbol{e}_\theta)$ 能够被表示为奇异积分的形式：

$$\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}\omega^\theta\boldsymbol{e}_\theta(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{K}*(\omega^\theta\boldsymbol{e}_\theta)](\boldsymbol{x}),$$

$$\nabla(u^\theta\boldsymbol{e}_\theta(\boldsymbol{x})) = \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{x}) + [\boldsymbol{H}*(\tilde{\boldsymbol{\omega}})](\boldsymbol{x}),$$

其中核函数 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 为值为矩阵的 -3 次齐次函数；奇异积分算子用卷积定义；$f*g(x) = \int_{R^3} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$ 表示标准的卷积算子；$\boldsymbol{C}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{C}}$ 为常数矩阵.

引理 2 由引理 1 和 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的 L^p 有界性可知，对所有的 $1 < p < \infty$ 有

$$\|\nabla\tilde{\boldsymbol{u}}\|_{L^p} \leqslant C\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^p},$$

$$\|\nabla(u^\theta\boldsymbol{e}_\theta)\|_{L^p} \leqslant C\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^p},$$

其中 C 为一常数.

引理 3[6] 假设 $\boldsymbol{u}$ 为一个充分光滑的向量，则对所有的 $1 < p < \infty$，有

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^p} \leqslant C(p)\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^p},$$

其中 $C(p)$ 为一个与 p 有关的常数.

引理 4（文献[11]的引理 4） 假设 $\boldsymbol{u}$ 为一个充分光滑的轴对称向量，则存在独立于 $\boldsymbol{u}$ 的常数 $C > 0$，使得对 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 有

$$\|\nabla u^\theta\|_{L^p} + \left\|\frac{u^\theta}{r}\right\|_{L^p} \leqslant C\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^p},$$

$$\left\|\partial_r\left(\frac{u^\theta}{r}\right)\right\|_{L^p} \leqslant C\|\Delta\boldsymbol{u}\|_{L^p}.$$

引理 5 假设 $f \in H^2$. 由于 $\partial_i\partial_j f = -R_iR_j\Delta f$，其中 R_i 为 Riesz 变换，即

$$\hat{R}_i g(\zeta) = -i(\zeta_i/|\zeta|)\hat{g}(\zeta),$$

以及算子 R_j：$L^p \to L^p$，$1 < p < \infty$ 的有界性，有

$$\|\partial_i\partial_j f\|_{L^p} \leqslant C\|\Delta f\|_{L^p},$$

其中 C 为一常数.

2 正则性准则的证明

假设 $\boldsymbol{u}$ 为 Navier-Stokes 方程组(1)的一个轴对称的光滑解. 那么其旋度方程如下：

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} - \Delta\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}.$$

在以上方程两边同时乘以 $\boldsymbol{\omega}$,并在 R^3 上积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^3}|\boldsymbol{\omega}|^2\mathrm{d}x + \int_{R^3}|\nabla\boldsymbol{\omega}|^2\mathrm{d}x = \int_{R^3}(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{R^3}\omega^r\partial_r u^r\omega^r\mathrm{d}x - \int_{R^3}\frac{\omega^\theta}{r}u^\theta\omega^r\mathrm{d}x + \int_{R^3}\omega^z\partial_z u^r\omega^r\mathrm{d}x + \int_{R^3}\omega^r\partial_r u^\theta\omega^\theta\mathrm{d}x +$$

$$\int_{R^3}\frac{\omega^\theta}{r}u^r\omega^\theta\mathrm{d}x + \int_{R^3}\omega^z\partial_z u^\theta\omega^\theta\mathrm{d}x + \int_{R^3}\omega^r\partial_r u^z\omega^\theta\mathrm{d}x + \int_{R^3}\omega^z\partial_z u^z\omega^z\mathrm{d}x \triangleq$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8.$$

下面将逐一估计以上各项.首先,对于 I_1, 由 Young 不等式、Hölder 不等式、Gagliardo-Nirenberg 不等式和引理 2,有

$$|I_1| \leqslant \int_{R^3}|\omega^r\partial_r u^r\omega^r|\mathrm{d}x \leqslant C\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^{(2\beta_1/(\beta_1-1))}} \leqslant$$

$$C\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|^{3/\beta_1}_{L^2}\|\boldsymbol{\omega}\|^{(2\beta_1-3)/\beta_1}_{L^2} \leqslant$$

$$C_\delta\|\omega^r\|^{2\beta_1/(2\beta_1-3)}_{L^{\beta_1}}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2} + \delta\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2}.$$

类似地, 由引理 2 和引理 4, 可得

$$|I_2|, |I_3|, |I_4|, |I_6|, |I_7| \leqslant C_\delta\|\omega^r\|^{2\beta_1/(2\beta_1-3)}_{L^{\beta_1}}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2} + \delta\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2}.$$

可以看到 I_5 是一个复杂项,但可以对于 ω^θ/r 给出一个正则性准则:

$$|I_5| \leqslant C\|u^r\|_{L^2}\left(\int_{R^3}\frac{(\omega^\theta)^4}{r^2}\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant$$

$$C\left\|\frac{\omega^\theta}{r}\right\|_{L^{\beta_2}}\|\omega^\theta\|_{L^{2\beta_2/(\beta_2-2)}} \leqslant C\left\|\frac{\omega^\theta}{r}\right\|_{L^{\beta_2}}\|\omega^\theta\|^{(1-3/\beta_2)}_{L^2}\|\nabla\omega^\theta\|^{3/\beta_2}_{L^2},$$

由 Young 不等式, 可得

$$|I_5| \leqslant C_\delta\left\|\frac{\omega^\theta}{r}\right\|^{2\beta_2/(2\beta_2-3)}_{L^{\beta_2}}\|\omega^\theta\|^{2\beta_2/(2\beta_2-3)}_{L^2} + \delta\|\nabla\omega^\theta\|^2_{L^2}.$$

利用分部积分,可得

$$I_8 = \int_{R^3}\omega^z\partial_z u^z\omega^z\mathrm{d}x = \int_{R^3}\left(\partial_r u^\theta + \frac{u^\theta}{r}\right)^2\partial_z u^z\mathrm{d}x =$$

$$\int\left((\partial_r u^\theta)^2 + 2\partial_r u^\theta\cdot\frac{u^\theta}{r} + \left(\frac{u^\theta}{r}\right)^2\right)\cdot\partial_z u^z\mathrm{d}x =$$

$$-\int_{R^3}\left(2\partial_r\partial_z u^\theta\cdot\partial_r u^\theta + 2\partial_z\partial_r u^\theta\cdot\frac{u^\theta}{r} + 2\partial_r u^\theta\cdot\partial_z\left(\frac{u^\theta}{r}\right)\right)u^z\mathrm{d}x =$$

$$2\int_{R^3}\partial_r(u^z\partial_r u^\theta r)\cdot\partial_z u^\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z + 2\int_{R^3}\partial_r(u^\theta u^z)\cdot\partial_z u^\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z -$$

$$2\int_{R^3}\partial_r u^\theta\partial_z\left(\frac{u^\theta}{r}\right)\cdot u^z\mathrm{d}x - \int_{R^3}\partial_z u^\theta\cdot\frac{u^z}{r}\cdot\frac{u^\theta}{r}\mathrm{d}x \triangleq$$

$$I_8^1 + I_8^2 + I_8^3 + I_8^4.$$

对于第一项 I_8^1, 可得

$$I_8^1 = 2\int_{R^3}\partial_r u^z\cdot\partial_r u^\theta\partial_z u^\theta\mathrm{d}x + 2\int_{R^3}u^z\cdot\partial_r^2 u^\theta\cdot\partial_z u^\theta\mathrm{d}x + \int_{R^3}\frac{u^z}{r}\cdot\partial_r u^\theta\cdot\partial_z u^\theta\mathrm{d}x =$$

$$2\int_{R^3}\partial_r u^z\cdot\partial_r u^\theta\,\omega^r\mathrm{d}x+2\int_{R^3}u^z\cdot\partial_r^2u^\theta\cdot\omega^r\mathrm{d}x+\int_{R^3}\frac{u^z}{r}\cdot\partial_r u^\theta\cdot\omega^r\mathrm{d}x\triangleq$$
$$H_1+H_2+H_3.$$

H_1, H_3 可以被类似于估计 I_1 一样的方式估计.由引理 3 和引理 5, H_2 项可以被估计为

$$|H_2|\leqslant C\|\partial_r^2u^\theta\|_{L^2}\left(\int_{R^3}|u^z\omega^r|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant$$
$$C_\delta\int_{R^3}|u^z\omega^r|^2\mathrm{d}x+\delta\|\partial_r^2u^\theta\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$C_\delta\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2\|u^z\|_{L^{2\beta_1/(\beta_1-2)}}^2+\delta\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$C_\delta\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2(\|u^z\|_{L^2}^\eta\|\nabla u^z\|_{L^2}^{1-\eta})^2+\delta\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$C_\delta\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^{2(1-\eta)}+\delta\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2,$$

其中

$$\frac{1}{2\beta_1/(\beta_1-2)}=\frac{\eta}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)(1-\eta),$$

则
$$\eta=1-\frac{3}{\beta_1},$$

这里要求 $\beta_1\geqslant 3$.所以 H_2 可以被估计为

$$|H_2|\leqslant C_\delta\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^{2(1-\eta)}+\delta\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2.$$

利用分部积分, 可得

$$I_8^2=2\int_{R^3}\partial_r(u^\theta u^z)\partial_z u^\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z=\int_{R^3}\left(\partial_r u^\theta\cdot\frac{u^z}{r}+\frac{u^\theta}{r}\cdot\partial_r u^z\right)\cdot\omega^r\mathrm{d}x.$$

所以得到

$$|I_8^2|\leqslant C_\delta\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^{2\beta_1/(2\beta_1-3)}\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2+\delta\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2.$$

类似地,有

$$|I_8^3|,|I_8^4|\leqslant C_\delta\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^{2\beta_1/(2\beta_1-3)}\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2+\delta\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2.$$

将以上所有估计放到一起, 并令 δ 足够小,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2+\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2\leqslant$$
$$C\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^{2\beta_1/(2\beta_1-3)}\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2+C\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^{2(1-3/\beta_1)}+$$
$$C\left\|\frac{\omega^\theta}{r}\right\|_{L^{\beta_2}}^{2\beta_2/(2\beta_2-3)}\|\omega^\theta\|_{L^2}^{2\beta_2/(2\beta_2-3)}\leqslant$$
$$C\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^{2\beta_1/(2\beta_1-3)}\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2+C\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2+C\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2+$$
$$C\left\|\frac{\omega^\theta}{r}\right\|_{L^{\beta_2}}^{2\beta_2/(2\beta_2-3)}\|\omega^\theta\|_{L^2}^2+C\left\|\frac{\omega^\theta}{r}\right\|_{L^{\beta_2}}^{2\beta_2/(2\beta_2-3)}.$$

利用 Gronwall 不等式,有

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^\infty((0,T);L^2)}^2+\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2((0,T);L^2)}^2\leqslant$$
$$C\left(\|\boldsymbol{\omega}_0\|_{L^2}^2+\int_0^T\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2\mathrm{d}t+\int_0^T\left\|\frac{\omega^\theta}{r}\right\|_{L^{\beta_2}}^{2\beta_2/(2\beta_2-3)}\mathrm{d}t\right)\times$$
$$\exp\left(\int_0^T\|\omega^r\|_{L^{\beta_1}}^2\mathrm{d}t+\int_0^T\left\|\frac{\omega^\theta}{r}\right\|_{L^{\beta_2}}^{2\beta_2/(2\beta_2-3)}\mathrm{d}t\right).$$

至此,完成了对定理 1 的证明.

注 2 当
$$\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\beta}=2 \tag{3}$$
时,模 $\|\omega^r\|_{L^{\alpha}((0,T);L^{\beta})}$ 具有零缩放维度.笔者希望定理 1 的结果可以被进一步改进,即式(2)可以被替换为 $\|\omega^r\|_{L^{\alpha}((0,T);L^{\beta})}<\infty$,其中$(\alpha,\beta)$ 满足式(3).这将是笔者未来的工作.

3 结束语

轴对称的不可压 Navier-Stokes 方程是近几十年来一个重要的物理模型.当 $u^{\theta}=0$ 时,方程退化为 2 维的情形,已被大家所了解.当 $u^{\theta}\neq 0$ 时,被人们称为 $2\frac{1}{2}$ 维.在这种情形下,其全局强解是否存在依然是一个具有挑战性的公开问题.近十年来,一些关于速度场的正则性准则已经建立起来了.本文的主要贡献是在旋度场上建立了正则性准则,希望能帮助人们理解这个模型.

致谢 作者衷心感谢西南财经大学中央高校基本科研业务费重点研究基地基金资助项目(JBK140402)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] Ali A, Asghar S, Alisulami H H. Oscillatory flow of second grade fluid in cylindrical tube[J]. *Applied Mathematics and Mechanics* (*English Edition*), 2013, **34**(9): 1097-1106.

[2] Buske D, Bodmann B, Vilhena M T M B, et al. On the solution of the coupled advection-diffusion and Navier-Stokes equations[J]. *American Journal of Environmental Engineering*, 2015, **5**(1A): 1-8.

[3] 刘莹, 章德发, 毕勇强, 等. 主动脉弓及分支血管内非稳态血流分析[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(4): 432-439.(LIU Ying, ZHANG De-fa, BI Yong-qiang, et al. Analysis of unsteady blood flow in the human aortic bifurcation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(4): 432-439.(in Chinese))

[4] Constantin P, Foias C. *Navier-Stokes Equations* (*Chicago Lectures in Mathematics*)[M]. Chicago: University of Chicago Press, 1988.

[5] Fefferman C L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation[M]//*The Millennium Prize Problems*. Cambridge: Clay Mathematics Institute, 2006: 57-67.

[6] Majda A J, Bertozzi A L. *Vorticity and Incompressible Flow* (*Cambridge Texts in Applied Mathematics*)[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[7] Leonardi S, Málek J, Nečas J, et al. On axially symmetric flows in R^3[J]. *Z Anal Anwendungen*, 1999, **18**(3): 639-649.

[8] Ukhovskii M R, Yudovich V I. Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space[J]. *Prikl Mat Meh*, 1968, **32**(1): 59-69.

[9] Chae D, Lee J. On the regularity of the axisymmetric solutions of the Navier-Stokes equations[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 2002, **239**(4): 645-671.

[10] Kubica A, Pokorný M, Zajaczkowski W. Remarks on regularity criteria for axially symmetric weak solutions to the Navier-Stokes equations[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2012, **35**(3): 360-371.

[11] Neustupa J, Pokorný M. Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with

non-zero angular velocity component[J]. *Mathematica Bohemica*, 2001, **126**(2): 469-481.

[12] ZHOU Yong. On regularity criteria in terms of pressure for the Navier-Stokes equations in R^3 [J]. *Proc Amer Math Soc*, 2006, **134**: 149-156.

[13] JIA Xuan-ji, ZHOU Yong. Remarks on regularity criteria for the Navier-Stokes equations via one velocity component[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2014, **15**: 239-245.

[14] ZHOU Yong. A new regularity criterion for weak solutions to the Navier-Stokes equations[J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2005, **84**(11): 1496-1514.

[15] ZHOU Yong, Pokorný M. On the regularity of the solutions of the Navier-Stokes equations via one velocity component[J]. *Nonlinearity*, 2010, **23**(5): 1097-1107.

[16] ZHOU Yong. A new regularity criterion for the Navier-Stokes equations in terms of the direction of vorticity[J]. *Monatshefte für Mathematik*, 2005, **144**(3): 251-257.

A Remark on Regularity for the Axisymmetric Navier-Stokes Equations

XIE Hong-yan[1], LI Jie[2], HE Fang-yi[3]

(1. *School of Economics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu* 611130, *P.R.China*;

2. *Department of Public Administration, Sichuan Administration Institute, Chengdu* 610000, *P.R.China*;

3. *School of Finance, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu* 611130, *P.R.China*)

Abstract: A regularity criterion for the axisymmetric incompressible Navier-Stokes system was established.It is proved that, if local axisymmetric smooth solution u satisfies $\| \omega^r \|_{L^{\alpha_1}((0,T);L^{\beta_1})} + \| \omega^\theta / r \|_{L^{\alpha_2}((0,T);L^{\beta_2}))} < \infty$, where $2/\alpha_1 + 3/\beta_1 \leqslant 1 + 3/\beta_1, 2/\alpha_2 + 3/\beta_2 \leqslant 2$ and $\beta_1 \geqslant 3$, $\beta_2 > 3/2$, this strong solution will keep its smoothness up to time T.

Key words: Navier-Stokes equations; axisymmetric flow; blow-up criterion

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(71102145)

引用本文/Cite this paper:

谢洪燕, 李杰, 贺方毅. 关于轴对称 Navier-Stokes 方程正则性的一个注记[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(3): 276-283.

XIE Hong-yan, LI Jie, HE Fang-yi. A remark on regularity for the axisymmetric Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(3): 276-283.