

深埋隧洞围岩应力的精确解 与近似解的对比分析*

周凤玺^{1,2}, 曹小林¹

(1. 兰州理工大学 土木工程学院, 兰州 730050;
2. 西部土木工程防灾减灾教育部工程研究中心, 兰州 730050)

摘要: 对不同断面形状的深埋隧洞进行了分析, 比较了隧洞围岩应力解析解与通过当量半径方法得到的近似解之间的差别. 首先, 应用复变函数的基本理论, 给出圆形、椭圆、矩形、直墙拱形等几种常见深埋隧洞围岩应力的解析表达式. 其次, 应用当量半径的折算形式, 将其任意形状的边界转化为标准圆形断面, 利用 Lamé 解答得到了各围岩应力分量. 最后, 考虑隧洞断面形状参数的变化, 通过数值算例对精确解和近似解进行了比较, 分析了当量半径折算形式的精确度. 在此基础上, 应用有限元方法验证了复变函数解析解的精确性, 以椭圆、矩形和直墙拱形的复变函数解验证当量半径精确度. 结果表明, 当量半径的折算形式解答与精确解答之间相似程度与隧洞的断面形状和几何参数之间有着密切的关系.

关键词: 复变函数; 围岩应力; 深埋隧洞; 当量半径

中图分类号: TU91

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.370196

引 言

复变函数法作为一种有效和独具特色的方法, 在多连通域、较复杂几何形状以及高应力梯度等问题的求解中得到广泛应用. Muskhelishvili 的专著《数学弹性力学的几个基本问题》对弹性力学平面问题的复变函数法进行了较全面的论述^[1]. 随着人们对地下空间的不断开发和利用, 对不同断面形状的洞室周围应力和位移等问题的研究已经成为一个研究热点. 借助于复变函数, 对不同断面形状的洞室力学问题进行理论求解是一种较常见的方法^[2-6].

Exadaktylos 等^[7]提出了隧道围岩的应力和位移的半解析解. Strack 等^[8]应用类似的方法提出了弹性半平面圆形隧道的应力和位移的解析解. 李培楠等^[9]应用复变函数求出了非圆形隧道的应力和位移的解析解. 这些都是以半无限空间体为模型, 假设埋深无限大, 忽略了边界条件和局部荷载条件的限制. 王志良等^[10]应用复变函数计算了浅埋隧道的围岩应力场, 突破埋深为无限大的限制.

另一种简化方法是采用当量半径的折算形式来分析洞室的力学响应^[11], 即将任意形状的断面折算成标准圆形隧道, 借助于弹性力学解答进而分析和计算. 当量半径的折算方法是以外接圆半径表示非圆形地下洞室特征尺寸的简化方法, 该方法基本原理简单、易于问题的分

* 收稿日期: 2016-06-21; 修订日期: 2017-03-30

基金项目: 国家自然科学基金(51368038); 甘肃省教育厅研究生导师基金(1103-07)

作者简介: 周凤玺(1979—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: geolul@163.com).

析^[12-14]。但是,这种方法所获得的分析结果具有一定的局限性;同时,对于特殊形状的地下洞室,用解析法求解外接圆半径的计算公式相对复杂,而用几何作图法求解时,不同的作图者之间往往存在着一定的差别。因此,工程应用上仍然受到很大的限制。

本文针对圆形、椭圆、矩形、直墙拱形等几种常见形状的深埋隧洞进行分析,首先采用复变函数的方法给出了深埋隧洞围岩应力精确解,然后分析了同样条件下当量半径的折算形式的解,最后通过不同的形状参数对两种解答进行了对比,分析了当量半径简化方法的有效性。

1 应用复变函数求解深埋隧道

将 z 平面上的孔口边界 L 映射为 ζ 平面上的单位圆 γ , 将 L 以外的无限区域 s 映射到单位圆 γ 内的 Σ 平面上, 同时将 z 平面上的无穷远点映射为 ζ 平面的坐标原点。如图 1 所示, 考虑平面应变问题, 其映射函数为

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^n C_k \zeta^k \right), \quad (1)$$

其中, R 为由隧洞大小决定的实数, C_k 为由隧洞的边界形状决定的复常数, 其具体数值由边界的具体形状决定。

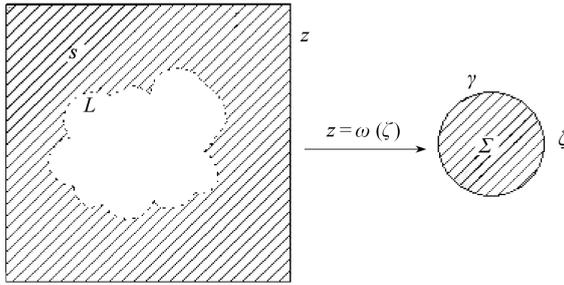


图 1 分析模型映射函数

Fig. 1 The mapping function for the analysis model

根据平面问题的复变函数解取 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 如下^[15]:

$$\varphi_1(z) = Bz + \varphi_0(z), \quad (2a)$$

$$\psi_1(z) = (B' + iC')z + \psi_0(z), \quad (2b)$$

式中, B, B' 和 C' 由边界条件决定, $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 为隧道外区域的单值函数, 其形式为

$$\varphi_0 = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots, \quad (3a)$$

$$\psi_0 = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots. \quad (3b)$$

由于 a_0 和 b_0 的大小不影响应力的大小, 因此取 $a_0 = 0, b_0 = 0$. 把 z 平面上的 K-M 函数转化为 ζ 平面上 K-M 函数为

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(z) = B\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad (4a)$$

$$\psi(z) = \psi_1(z) = (B' + iC')\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta), \quad (4b)$$

其中

$$B = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4}, \quad B' = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2}, \quad C' = \tau_{xy}^\infty. \quad (5)$$

对于深埋隧道的求解可看做无限域中带有有一个孔洞问题来求解,因此可得 $\varphi_0(\zeta)$ 和 $\psi_0(\zeta)$ 的表达式为^[15]

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{f_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (6)$$

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\overline{f_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi'_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (7)$$

其中, $f_0(\sigma)$ 与边界条件相关.

应用复变函数(2)把应力分量表达为

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4\text{Re} \left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right], \quad (8a)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{2\xi^2}{\rho^2} \frac{1}{\omega'(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)\varphi''(\zeta)} + \omega'(\zeta)\psi'(\zeta)]. \quad (8b)$$

把式(6)、(7)代入式(4)得 K-M 函数的表达式为

$$\varphi(\zeta) = B\omega(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\varphi'_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{f_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (9)$$

$$\psi(\zeta) = (B' + iC')\omega(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi'_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_r \frac{\overline{f_0(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (10)$$

这样根据具体的边界确定映射函数 $z = \omega(\zeta)$, 代入式(9)、(10)可求得 K-M 的表达式, 然后把式(9)、(10)代入式(8)便可确定应力分量. 因此可以得出任意边界形状隧洞的应力分量解析解.

2 当量半径的折算形式

把非圆形隧道折算为标准圆形隧道是当量半径折算形式的思路. 当量半径的折算形式基本原理是用一个与非圆形地下洞室断面积相等的虚拟圆来简化为圆形地下洞室, 该虚拟圆的半径代表实际非圆形地下洞室的“当量半径”, 通过对该虚拟圆周边应力分布的理论分析来获得非圆形地下洞室周围应力分布的解析解.

当量半径的折算形式为^[12]

$$R_0 = k_0(S_0/\pi)^{1/2}, \quad (11)$$

其中, R_0 为当量半径, S_0 为实际非圆形地下洞室的断面积, k_0 为洞室断面形状修正系数, 具体取值可参考文献[14].

这样便可以把任意形状的隧洞通过当量半径的折算形式折算为以 R_0 为半径的圆, 再通过弹性力学的解答, 进而得到任意形状隧洞的应力分量和位移分量.

3 应力分量的解析解

为了分析和讨论“当量半径”法的有效性, 分别取隧洞断面为圆形、椭圆、矩形、直墙拱形进行分析. 当地下洞室埋置深度与孔径比较大时, 可不考虑重力梯度的影响, 把重力作用化为无限远处有外部均布荷载作用, 通过复变函数计算出各自应力分量的解析表达式.

3.1 地下洞室圆形开挖断面

这里取圆形断面如图 2 所示,取开挖圆形断面的半径为 R_0 , 这样可得映射函数的具体形式为

$$z = \omega(\zeta) = R_0/\zeta. \quad (12)$$

根据式(5)可得

$$B = \frac{p}{2}, B' = 0, C' = 0. \quad (13)$$

把式(12)和(13)代入式(9)和(10),应用 Harnack 定理得

$$\varphi(\zeta) = \frac{pR_0}{2\zeta}, \psi(\zeta) = -pR_0\zeta. \quad (14)$$

把式(14)代入式(8)解得

$$\sigma_r = p\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right), \sigma_\theta = p\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right), \tau_{r\theta} = 0. \quad (15)$$

这样可求得 ζ 平面上用极坐标表示的应力分量,把式(15)转化为 z 平面上极坐标表示的应力分量为

$$\sigma_r = p\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right), \sigma_\varphi = p\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right), \tau_{r\varphi} = 0. \quad (16)$$

另外,应用当量半径折算的形式计算,这里取 $k_0 = 1$,即得当量半径为 R_0 .这样可根据半径 R_0 ,在无穷远处受水平和垂直的压力 p ,应用弹性力学的知识求解.

应用坐标转换,在 $r = b$ 处,把无穷远处直接平面上的力转换为极坐标系下的力为

$$\sigma_r = p, \sigma_\varphi = p, \tau_{r\varphi} = 0, \quad (17)$$

从而解得

$$\sigma_r = p\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right), \sigma_\varphi = p\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right), \tau_{r\varphi} = 0. \quad (18)$$

从式(16)和(18)可以看出两者完全一样,由于当量半径的折算形式(18),半径为 R_0 ,折算系数为 1,相当于应用弹性力学知识精确地求出了应力的解析解,这证明了复变函数求解隧道问题的正确性.

3.2 地下椭圆形洞室开挖断面

如图 3 所示的椭圆形断面的深埋隧道,取长轴为 $2a$,短轴为 $2b$,形状参数为 $k = b/a$.

映射函数的具体形式为

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a(1+k)}{2}\left(\zeta + \frac{1-k}{1+k}\frac{1}{\zeta}\right). \quad (19)$$

根据式(5)可得

$$B = \frac{p}{2}, B' = 0, C' = 0.$$

把式(19)代入式(9)和(10),应用 Harnack 定理得

$$\varphi(\zeta) = \frac{pa(1+k)}{4\zeta} - \frac{pa(1-k)}{4}\zeta, \quad (20a)$$

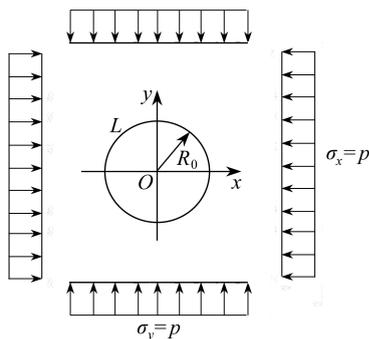


图 2 圆形断面洞室分析模型

Fig. 2 The analysis model for a circular section

$$\psi(\zeta) = -\frac{pa\zeta(1+k)}{2} + \frac{pa(1+k)\left(\zeta^2 + \frac{1-k}{1+k}\right)}{2\left(\zeta^2 - \frac{1-k}{1+k}\right)}. \quad (20b)$$

把式(20)代入式(8)得

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4\text{Re} \left[\frac{-p\left(1 + \frac{1-k}{1+k}\zeta^2\right)}{2\left(\zeta^2 - \frac{1-k}{1+k}\right)} \right], \quad (21a)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{pa(1+k)}{\zeta} \frac{\frac{\rho^2}{\zeta} + \frac{1-k}{1+k}\frac{\zeta}{\rho^2}}{\rho^2 - \frac{1-k}{1+k}} - \frac{2\zeta^2 \left[\frac{pa(1+k)}{2} + \frac{2pa(1-k)}{(\zeta^2 - (1-k)/(1+k))^2} \right]}{\rho^2}. \quad (21b)$$

通过式(21)即可求得椭圆形隧洞断面上任意一点应力分量的解析解。

同样,应用当量半径折算的形式计算,根据刘长武等的地层空间应力场的开采扰动与模拟^[14]取 $k_0 = 1.05$, 椭圆的面积 $S_0 = \pi ab = k\pi a^2$, 根据式(11)可求得当量半径为

$$R_0 = k_0(S_0/\pi)^{1/2} = 1.05a\sqrt{k}. \quad (22)$$

这样可根据半径为 R_0 , 在无穷远处受水平和垂直的压力 p , 同圆一样, 把当量半径当作圆的半径, 应用弹性力学的知识即可求解. 由于外边界条件相同, 通过当量半径的方法也可以把椭圆转化为圆来求解, 把式(22)代入式(18)得

$$\sigma_r = p\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right) = p\left(1 - \frac{1.102\ 5ab}{r^2}\right), \quad \sigma_\varphi = p\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) = p\left(1 + \frac{1.102\ 5ab}{r^2}\right), \quad \tau_{r\varphi} = 0. \quad (23)$$

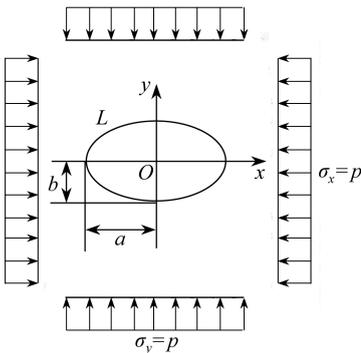


图3 椭圆形断面洞室分析模型

Fig. 3 The analysis model for the elliptical section

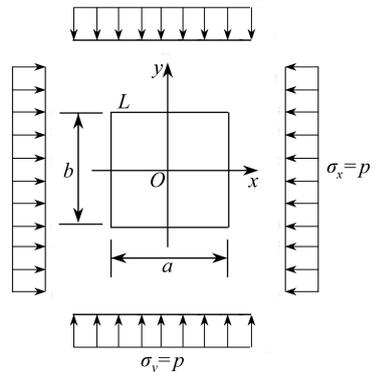


图4 矩形断面洞室分析模型

Fig. 4 The analysis model for a rectangular section

3.3 地下矩形洞室开挖断面

深埋方形断面隧道如图4所示, 长为 a , 宽为 b , 同样令形状参数为 $k = b/a$.

映射函数的具体形式为

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + c_1 \zeta + c_3 \zeta^3 \right), \quad (24)$$

其中

$$c_1 = \frac{a-b}{2R}, \quad c_3 = \frac{a+b}{2R} - 1, \quad R = \frac{\frac{a-b}{2} \cos \vartheta + \frac{a+b}{2} \cos(3\vartheta) - a}{\cos(3\vartheta) - \cos \vartheta},$$

$$\left(\frac{a-b}{2} \cos \vartheta + \frac{a+b}{2} \cos(3\vartheta) - a \right) (\sin(3\vartheta) - \sin \vartheta) -$$

$$\left(\frac{a-b}{2} \sin \vartheta + \frac{a+b}{2} \sin(3\vartheta) - b \right) (\cos(3\vartheta) - \cos \vartheta) = 0.$$

根据式(5)可得

$$B = \frac{p}{2}, \quad B' = 0, \quad C' = 0.$$

把式(24)代入式(9)和(10),应用 Harnack 定理得

$$\varphi(\zeta) = \frac{pR}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + c_1 \zeta + c_3 \frac{1}{6} \zeta^3 \right) + \frac{pRc_1}{c_3 - 1} \zeta - pRc_3 \zeta^3, \quad (25)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{pRc_1c_3}{(c_3 - 1)\zeta} - pR\zeta - \frac{\zeta^4 + c_1\zeta^2 + c_3}{3c_3\zeta^4 + c_1\zeta^2 - 1} \left[\frac{pRc_1}{\zeta(c_3 - 1)} - 3pRc_3\zeta \right]. \quad (26)$$

把式(25)和(26)代入式(8)得

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 2p \operatorname{Re} \left(1 + \frac{\frac{pc_1}{c_3 - 1} - 6c_3\zeta^2}{c_1 - \frac{1}{\zeta^2} + 3c_3\zeta^2} \right), \quad (27)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + i\tau_{\rho\theta} =$$

$$\frac{pa(1+k)}{\zeta} \frac{\rho^2}{\zeta} + \frac{1-k}{1+k} \frac{\zeta}{\rho^2} - \frac{2\zeta^2}{\rho^2} \left[\frac{pa(1+k)}{2} + \frac{2pa(1-k)}{(\zeta^2 - (1-k)/(1+k))^2} \right]. \quad (28)$$

通过式(27)和(28)即可求得椭圆形隧洞断面上任意一点应力分量的解析解。

同样,应用当量半径折算的形式计算,取修正系数 $k_0 = 1.2^{[14]}$, 正方形的面积 $S = ka^2$, 根据式(11)可求得当量半径为

$$R_0 = k_0(S_0/\pi)^{1/2} = 1.2a\sqrt{k/\pi}. \quad (29)$$

同样有

$$\begin{cases} \sigma_r = -p \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right) = -p \left(1 - \frac{1.44ka^2}{\pi r^2} \right), \\ \sigma_\varphi = -p \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right) = -p \left(1 + \frac{1.44ka^2}{\pi r^2} \right), \\ \tau_{r\varphi} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

3.4 地下直墙拱形洞室开挖断面

直墙拱形断面的具体尺寸如图 5 所示,由于直墙拱形的形状比较复杂,应用 Schwarz-

Christoffel(许瓦兹-克里斯托夫)多角映射理论,求出映射函数的表达式,根据文献[17]取映射函数为

$$\omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} - b_2\zeta - \frac{ib_3}{2}\zeta^2 - \frac{b_4}{3}\zeta^3 - \frac{ib_5}{4}\zeta^4\right), \tag{31}$$

其中

$$R = \frac{b}{1 - b_2 - b_4/3}, \vartheta_1 = \frac{3\pi}{2} - \arctan \frac{b - a}{2h - H}, \vartheta_2 = \pi + \arctan \frac{b - a}{2h - H}, \vartheta_3 = \frac{3\pi}{2},$$

$$\Phi_1 = \frac{\vartheta_1}{\pi} - 1, \Phi_2 = \frac{\vartheta_2}{\pi} - 1, \Phi_3 = \frac{\vartheta_3}{\pi} - 1,$$

$$\lambda_1 = 2\cos(\kappa_1\pi), \lambda_2 = 2\cos(\kappa_2\pi), \lambda_3 = 2\cos(\kappa_3\pi),$$

$$c_{11} = -\lambda_l\Phi_l, c_{12} = -\left[1 + \frac{\lambda_l^2}{2}(\Phi_l - 1)\right], c_{13} = \lambda_l\Phi_l(\Phi_l - 1)\left[1 + \frac{\lambda_l^2}{6}(\Phi_l - 2)\right],$$

$$c_{14} = \Phi_l(\Phi_l - 1)\left[\frac{1}{2} + \frac{\lambda_l^2}{2}(\Phi_l - 2) + \frac{\lambda_l^2}{24}(\Phi_l - 2)(\Phi_l - 3)\right],$$

$$c_{15} = -\lambda_l\Phi_l(\Phi_l - 1)(\Phi_l - 2)\left[\frac{1}{2} + \frac{\lambda_l^2}{6}(\Phi_l - 3) + \frac{\lambda_l^2}{120}(\Phi_l - 3)(\Phi_l - 4)\right],$$

$$b_2 = c_{12} + c_{22} + c_{32} - c_{11}c_{21} - (c_{11} + c_{21})c_{31},$$

$$b_3 = c_{13} + c_{23} + c_{33} + c_{11}c_{22} + (c_{12} - c_{11}c_{21} + c_{22})c_{31} + c_{12}c_{21} + (c_{11} + c_{21})c_{32},$$

$$b_4 = c_{14} + c_{24} + c_{34} - c_{11}c_{23} - (c_{13} + c_{23} - c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21})c_{31} + c_{12}c_{22} - c_{13}c_{21} + (c_{21} - c_{11}c_{21} + c_{22})c_{32} - (c_{11} + c_{21})c_{33},$$

$$b_5 = c_{15} + c_{25} + c_{35} + (c_{14} + c_{24} - c_{11}c_{23} + c_{12}c_{22} - c_{13}c_{21})c_{31} + c_{12}c_{23} + c_{13}c_{22} + c_{14}c_{21} + (c_{13} + c_{23} + c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21})c_{32} + c_{11}c_{24} + (c_{12} - c_{11}c_{21} + c_{22})c_{33} + (c_{11} + c_{21})c_{34},$$

其中 $l = 1, 2, 3$.

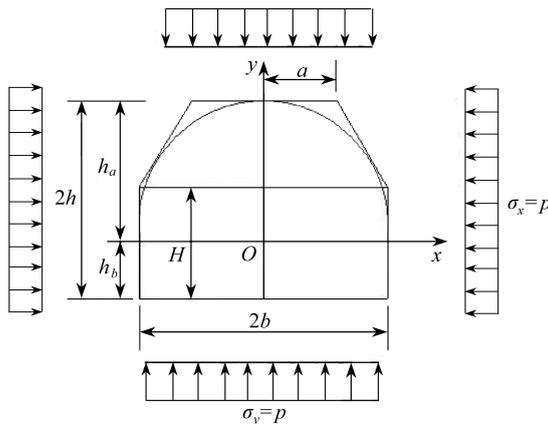


图5 直墙拱形断面洞室分析模型

Fig. 5 The analysis model for a straight arm arch section

根据式(5)可得

$$B = \frac{p}{2}, B' = 0, C' = 0.$$

把式(31)代入式(6)和(7),应用 Harnack 定理得

$$\varphi_0(\zeta) = a_1\zeta + pR\left(\frac{b_4}{3}\zeta^3 + \frac{ib_5}{4}\zeta^4 + 2i\frac{2b_3 - b_2b_5}{8 - b_5^2}\zeta^2\right), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \psi_0(\zeta) = & -\frac{ib_5a_1}{4\zeta^2} + pR\left[\frac{2b_3 - b_2b_5}{8 - b_5^2}\left(b_5a_2 + \frac{b_4a_1}{3}\right)\frac{1}{\zeta} - \zeta\right] + \\ & \frac{\zeta^3 - b_2\zeta + \frac{ib_3}{2} - \frac{b_4}{3\zeta} + \frac{ib_5}{4\zeta^2}}{1 + b_2\zeta^2 + ib_3\zeta^3 + b_4\zeta^4 + ib_5\zeta^5}\left[a_1 + pR\left(b_4\zeta^2 + ib_5\zeta^3 + 4i\frac{2b_3 - b_2b_5}{8 - b_5^2}\zeta\right)\right]. \end{aligned} \quad (33)$$

把式(32)和(33)代入式(9)和(10)得

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = & \frac{pR}{2}\left(\frac{1}{\zeta} - b_2\zeta - \frac{ib_3}{2}\zeta^2 - \frac{b_4}{3}\zeta^3 - \frac{ib_5}{4}\zeta^4\right) + \\ & a_1\zeta + pR\left(\frac{b_4}{3}\zeta^3 + \frac{ib_5}{4}\zeta^4 + 2i\frac{2b_3 - b_2b_5}{8 - b_5^2}\zeta^2\right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) = & -\frac{ib_5a_1}{4\zeta^2} + pR\left[\frac{2b_3 - b_2b_5}{8 - b_5^2}\left(b_5a_2 + \frac{b_4a_1}{3}\right)\frac{1}{\zeta} - \zeta\right] + \\ & \frac{\zeta^3 - b_2\zeta + \frac{ib_3}{2} - \frac{b_4}{3\zeta} + \frac{ib_5}{4\zeta^2}}{1 + b_2\zeta^2 + ib_3\zeta^3 + b_4\zeta^4 + ib_5\zeta^5}\left[a_1 + pR\left(b_4\zeta^2 + ib_5\zeta^3 + 4i\frac{2b_3 - b_2b_5}{8 - b_5^2}\zeta\right)\right]. \end{aligned} \quad (35)$$

把式(34)和(35)代入式(8)得

$$\begin{cases} \sigma_\rho + \sigma_\theta = 4\text{Re}\left[\frac{p}{2} + \frac{\varphi'_0(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right], \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)}\left\{\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)}\left[\varphi''_0(\zeta) - \frac{\varphi'_0(\zeta)\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] + \psi'_0(\zeta)\right\}. \end{cases} \quad (36)$$

通过式(36)即可求得直墙拱形隧道开挖断面应力分量的解析解.

同样,应用当量半径折算的形式计算,取 $k_0 = 1.25^{[14]}$,令 $h = kb$,则直墙拱形的面积为 $S_0 = 2bH + (a + b)(2h - H)$,根据式(11)可求得当量半径为

$$R_0 = k_0(S_0/\pi)^{1/2} = 1.25(S/\pi)^{1/2}. \quad (37)$$

由此可得

$$\begin{cases} \sigma_r = -p\left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right) = -p\left(1 - \frac{1.5625 \times S}{\pi r^2}\right), \\ \sigma_\varphi = -p\left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) = -p\left(1 + \frac{1.5625 \times S}{\pi r^2}\right), \tau_{r\varphi} = 0. \end{cases} \quad (38)$$

4 数值算例求解验证及其分析

4.1 验证

采用三维有限元分析软件 ANSYS 建立二维平面应变模型,对复变函数理论推导的深埋隧洞围岩应力解析解公式进行验证.为了与解析解计算结果进行对比分析,模型中取单一岩层进行分析,根据相关工程经验,参数在合理的经验范围内假定取值,岩层重度取 24 kN/m^3 ,岩层弹性模量取 $E = 4.3 \text{ GPa}$,取水平向和竖向地表外荷载 $p = -1 \text{ MPa}$,Poisson(泊松)比 $\mu = 0.28$.模

型计算范围水平方向左右两边各取 5 倍洞跨宽;垂直方向上下边界也各取 5 倍洞跨宽.为了便于分析,分别比较了各形状下隧道围岩应力解析解和数值解.图 6~8 给出内边缘环向应力、环向应力和径向应力沿水平线 $\theta = 0^\circ$ 的分布情况,并对其误差大小进行分析.其中 CVF 表示复变函数解,FEM 表示有限元解.由计算结果和图 6~8 可以看到,有限元求得的各点的周边应力值与解析解求得的应力值的变化趋势基本一致,且各应力值的最大误差不超过 9.8%.因此,证明了公式的正确性和可靠性.

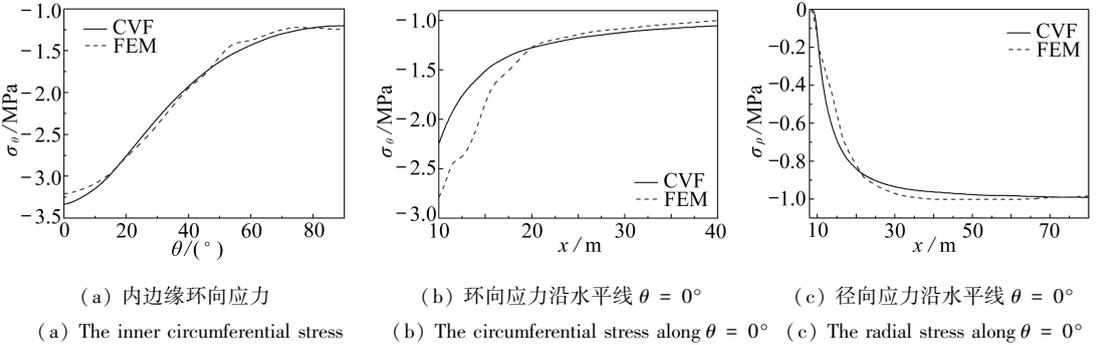


图 6 椭圆形隧道周边应力的解析解与数值解

Fig. 6 The analytical solution and numerical solution of the stresses around the elliptical tunnel

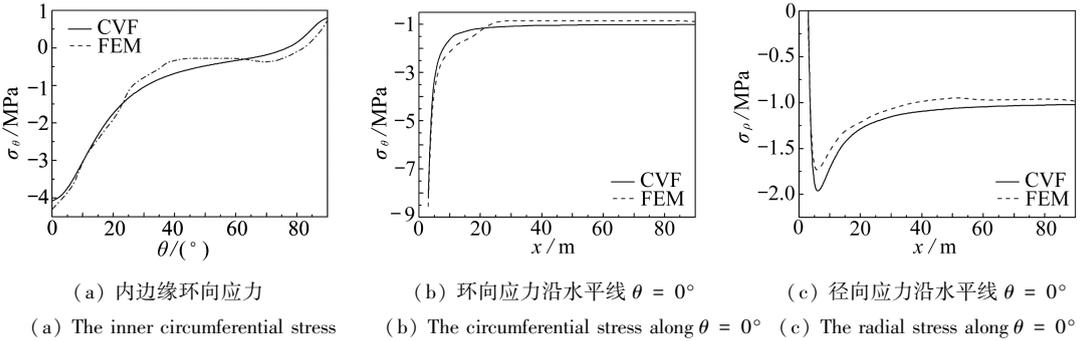


图 7 矩形隧道周边应力的解析解与数值解

Fig. 7 The analytical solution and numerical solution of the stresses around the rectangular tunnel

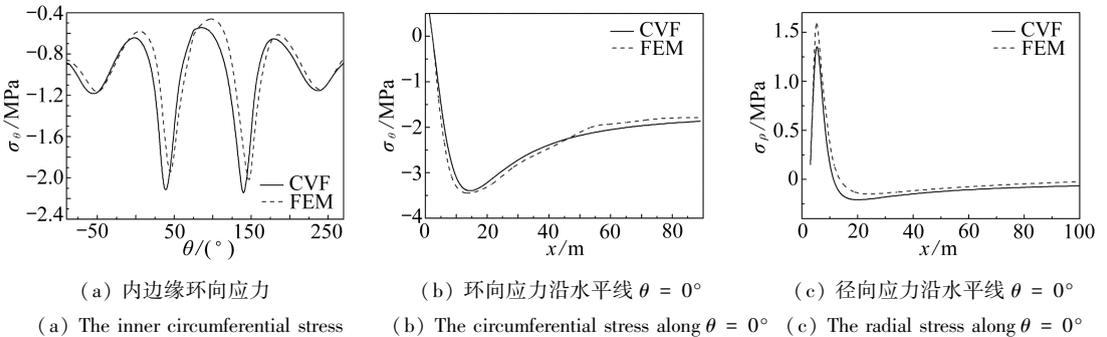


图 8 直墙拱形隧道周边应力的解析解与数值解

Fig. 8 The analytical solution and numerical solution of the stresses around the straight arm arch tunnel

4.2 地下椭圆形隧洞断面应力分析

首先考虑椭圆形断面的深埋隧道,取荷载 $p = -1$ MPa,长轴 $a = 8$ m,短轴 $b = ka$,随着形状参数 k 的不同给出了复变函数解和当量半径解的应力分量的变化规律.

因隧洞的内边界在映射函数的变化下, $\rho = 1, \zeta = e^{i\theta}, \sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0$, 当椭圆断面的长短轴比 k 分别取 0.2, 0.6, 1 时, 图 9 给出了隧洞内边界复变函数解和当量半径解的环向应力在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 变化时的分布, 其中 ERS 表示当量半径解. 从图中可以看出, 随着隧道的内边界长短轴比逐渐趋近于 1, 当量半径解的内壁环向应力越接近复变函数的精确解, 当 $k = 1$ 时, 当量半径解与复变函数的精确解的环向应力最接近.

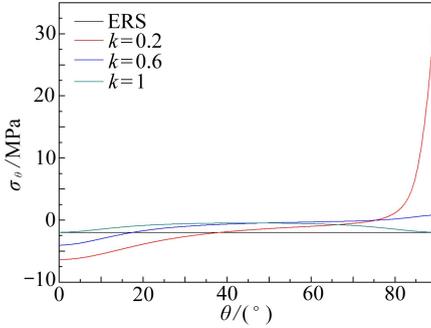


图 9 椭圆形隧道断面内壁环向应力分布情况

Fig. 9 Stress distribution along the inner wall of the elliptical tunnel section

沿水平线 $\theta = 0^\circ, \zeta = \rho$, 当椭圆断面的长短轴比 k 分别取 0.3, 0.7, 1 时, 环向应力和径向应力沿水平线 $\theta = 0^\circ$ 时的分布情况如图 10 和图 11 所示. 从图中可以看出, 随着距离内边缘 x 的增大, 环向应力和径向应力都趋于 -1 MPa; 随着隧道的内边界形状越趋于标准圆形, 当量半径解的环向应力和径向应力越接近复变函数的精确解, 当 $k = 1$ 时, 当量半径与复变函数的精确解的环向应力最接近, 最后环向应力趋于 -1 MPa.

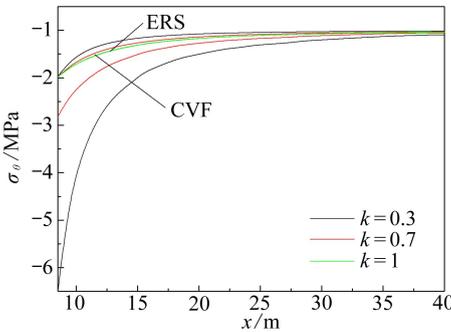


图 10 $\theta = 0^\circ$ 时环向应力沿 x 轴变化规律

Fig. 10 $\theta = 0^\circ$, the circumferential stress vs. x

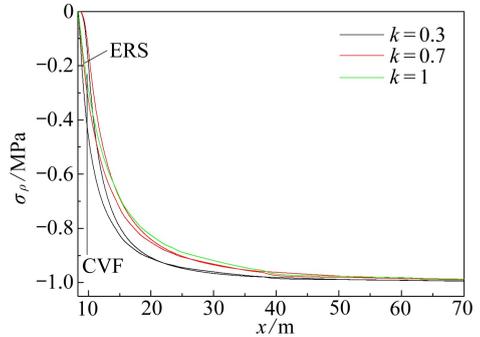


图 11 $\theta = 0^\circ$ 时径向应力沿 x 轴变化规律

Fig. 11 $\theta = 0^\circ$, the radial stress vs. x

4.3 地下矩形隧洞断面应力分析

考虑矩形断面的深埋隧道, 同样取荷载 $p = -1$ MPa, 长轴 $a = 2$ m, 高宽比 $k = b/a$, 分析了随着形状 k 的不同解析解与近似解之间的差别.

当断面的高宽比 k 分别取 0.2, 0.6, 1 时, 图 12 给出了内边界复变函数解和当量半径解的环向应力在隧洞内边界沿 $0^\circ \sim 90^\circ$ 的分布情况. 可以发现, 随着高宽比逐渐趋近于 1, 当量半径解的内壁环向应力越接近复变函数的精确解; 当 $k = 1$ 时, 当量半径与复变函数的精确解的环向应力最接近.

沿水平线 $\theta = 0^\circ, \zeta = \rho$, 当矩形断面的高宽比 k 分别取 0.2, 0.6, 1 时, 环向应力和径向应力沿水平线 $\theta = 0^\circ$ 时的分布情况分别如图 13 和图 14 所示. 从图上可以看出, 随着距离 x 的增大,

环向应力和径向应力同样都趋于-1 MPa;随着隧道的内边界形状越趋于方形,当量半径解的内壁环向应力越接近复变函数的精确解。

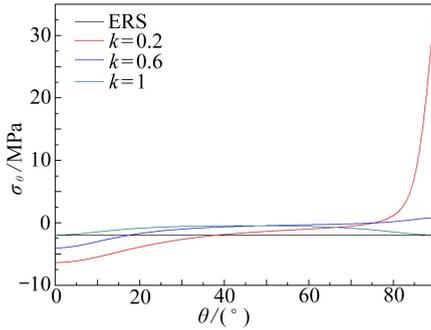


图 12 矩形隧道断面内壁环向应力分布情况

Fig. 12 The inner wall stress distribution of the rectangular tunnel

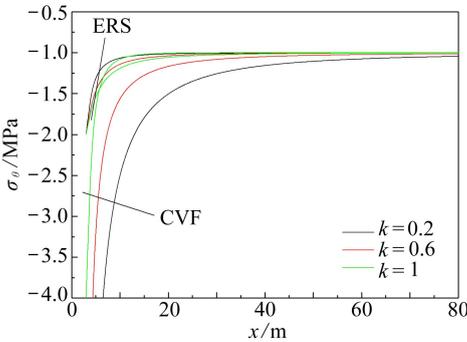


图 13 $\theta = 0^\circ$ 时环向应力沿 x 轴变化规律

Fig. 13 $\theta = 0^\circ$, the circumferential stress vs. x

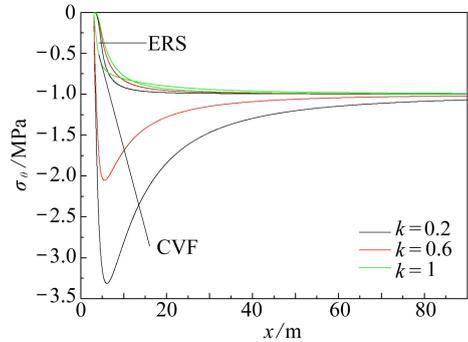


图 14 $\theta = 0^\circ$ 时径向应力沿 x 轴变化规律

Fig. 14 $\theta = 0^\circ$, the radial stress vs. x

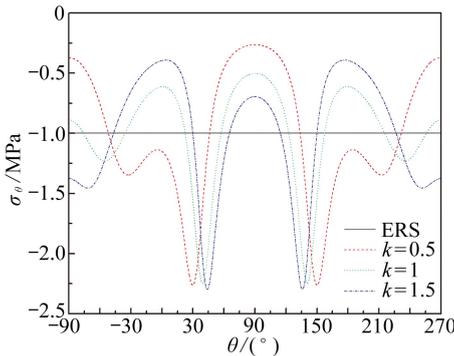


图 15 直墙拱形隧道断面内壁环向应力分布情况

Fig. 15 The inner wall circumferential stress distribution of the straight arm arch tunnel

4.4 地下直墙拱形隧洞断面应力分析

对于深埋直墙拱形的隧道,取几何参数为 $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$,高宽比为 $k = h/b$.当高宽比 k 分别取 0.5, 1, 1.5 时,图 15 给出了隧洞内边界的环向应力分布情况.从图中可以看出,隧道内边界的高宽比逐渐趋于 1,当量半径解的内壁环向应力越接近复变函数的精确解。

图 16 和图 17 给出环向应力和径向应力沿水平线 $\theta = 0^\circ$ 时的分布情况.从图中可以看出,沿着水平线方向直墙拱形的应力变化比较复杂,但随着 x 的增大,当量半径解与复变函数精确

解的环向应力和径向应力都趋于稳定;当内边界形状高宽比为 1 时,当量半径解的内壁环向应力最接近复变函数的精确解,但两种解答之间也存在着较大的差别。

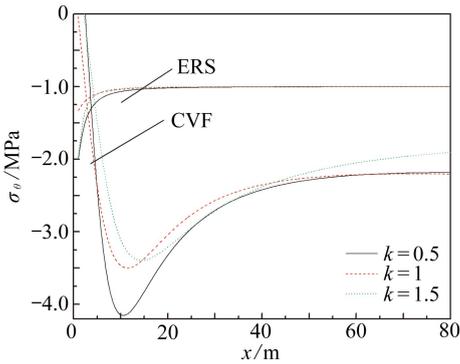


图 16 $\theta = 0^\circ$ 时环向应力沿 x 轴变化规律

Fig. 16 $\theta = 0^\circ$, the annular stress vs. x

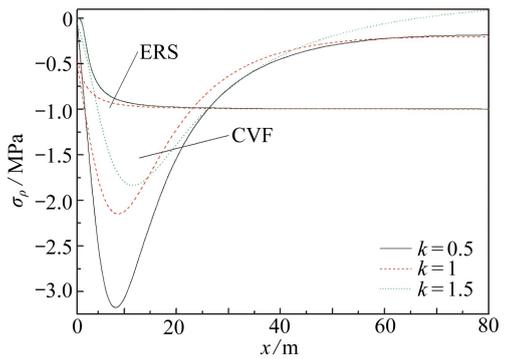


图 17 $\theta = 0^\circ$ 时径向应力沿 x 轴变化规律

Fig. 17 $\theta = 0^\circ$, the radial stress vs. x

5 结 论

通过对深埋圆、椭圆、矩形和直臂隧洞断面应力分量的分析,采用复变函数求解得到隧道应力分量的精确解答,并与当量半径折算形式得到的应力分量进行比较,分析了当量半径的折算形式得到的应力分量的精确性变化规律。结果表明:当量半径的折算形式计算出的应力分量跟隧洞的断面形式和长宽比有很大的关系,从 3 种断面形状的分析可知,圆形断面的应力分量与复变函数的完全相同,直墙拱形的相差较大。对于同一断面的不同长宽比,当隧道的高宽比越趋近于 1 时,当量半径解的内壁环向应力越接近复变函数的精确解。因此,当量半径的折算形式用于地下洞室的计算,长宽比接近 1 的椭圆和矩形可作为近似的计算,但对于长宽比相差较大的椭圆和矩形、以及其他相对不规则断面隧洞,不适合作为近似解。

参考文献 (References):

- [1] 穆斯海里什维里. 数学弹性力学的几个基本问题[M]. 赵惠元, 译. 北京: 科学出版社, 1958. (Muskhelishvili N I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* [M]. ZHAO Hui-yuan, transl. Beijing: Science Press, 1958. (Chinese version))
- [2] Verruijt A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1997, 21(2): 77-89.
- [3] Verruijt A, Booker J R. Complex variable analysis of Mindlin's tunnel problem[C]//Smith D W, Carter J P, ed. *Developments in Theoretical Geomechanics*. Rotterdam, 2000.
- [4] 陈谱. 基于复变函数解法和突变理论的隧洞围岩稳定性研究[D]. 硕士学位论文. 北京: 北京交通大学, 2014. (CHEN Pu. Study on stability of tunnel surrounding rock based on complex function method and catastrophe theory[D]. Master Thesis. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2014. (in Chinese))
- [5] 施有志. 双孔平行地铁隧道开挖的复变函数解析解与数值分析[D]. 博士学位论文. 厦门: 华侨大学, 2013. (SHI You-zhi. Double-hole parallel tunnel excavation of complex analytical solution and numerical analysis[D]. PhD Thesis. Xiamen: Huaqiao University, 2013. (in Chinese))

- [6] 祝江鸿, 杨建辉, 施高萍, 等. 单位圆外域到任意开挖断面隧洞外域共形映射的计算方法[J]. 岩土力学, 2014, **35**(1): 175-183. (ZHU Jiang-hong, YANG Jian-hui, SHI Gao-ping, et al. Calculating method for conformal mapping from exterior of unit circle to exterior of cavern with arbitrary excavation cross-section[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, **35**(1): 175-183. (in Chinese))
- [7] Exadaktylos G E, Stavropoulou M C. A closed-form elastic solution for stresses and displacements around tunnels[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2002, **39**(7): 905-916.
- [8] Strack O E, Verruijt A. A complex variable solution for a deforming buoyant tunnel in a heavy elastic half-plane[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2002, **26**(12): 1235-1252.
- [9] 李培楠, 刘俊, 苏锋, 等. 任意形状隧道围岩应力与位移的解析延拓求解[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2013, **10**(41): 1483-1489. (LI Pei-nan, LIU Jun, SU Feng, et al. Analytical continuation method for solving stress and displacement of surrounding rock buried tunnel excavation with arbitrary shape[J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2013, **10**(41): 1483-1489. (in Chinese))
- [10] 王志良, 申林方, 姚激, 等. 浅埋隧道围岩应力场的计算复变函数求解法[J]. 岩土力学, 2010, **31**(1): 86-90. (WANG Zhi-liang, SHEN Lin-fang, YAO Ji, et al. Calculation of stress field in surrounding rocks of shallow tunnel using computational function of complex variable method [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, **31**(1): 86-90. (in Chinese))
- [11] 李世辉. 隧道支护设计新论: 典型类比分析法应用与理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999. (LI Shi-hui. *The Supporting Design of Tunnel: Application and Theory of Typical Analog Analysis Method*[M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese))
- [12] 刘长武, 曹磊, 刘树新. 深埋非圆形地下洞室围岩应力解析分析的“当量半径”法[J]. 铜业工程, 2010(1): 1-5. (LIU Chang-wu, CAO Lei, LIU Shu-xing. Method of “equivalent radius” for the analyzing rock stress of high-buried non-circular underground chambers[J]. *Copper Engineering*, 2010(1): 1-5. (in Chinese))
- [13] 华安增. 矿山岩石力学基础[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 2002. (HUA An-zeng. *Foundation of Rock Mechanics in Mine*[M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 2002. (in Chinese))
- [14] 刘长武, 翟才旺. 地层空间应力场的开采扰动与模拟[M]. 郑州: 黄河水利出版社, 2005. (LIU Chang-wu, ZHAI Cai-wang. *Mining Disturbance and Simulation of Stress Field in Formation Space*[M]. Zhengzhou: The Yellow River Water Conservancy Press, 2005. (in Chinese))
- [15] 吕爱钟, 张路青. 地下隧道力学分析中的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (LÜ Ai-zhong, ZHANG Lu-qing. *The Complex Variable Function Method in the Mechanics Analysis of Underground Tunnel*[M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese))
- [16] 米海珍. 弹性力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2013. (MI Hai-zhen. *Elastic Mechanics*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese))
- [17] 姜学焱. 煤矿巷道围岩应力场的复变函数解[D]. 硕士学位论文. 阜新: 辽宁工程技术大学, 2013. (JIANG Xue-yan. Complex variable function solution of stress field of surrounding rock in coal mine[D]. Master Thesis. Fuxin: Liaoning Technical University, 2013. (in Chinese))

Comparison Between Exact Solutions and Approximate Solutions of Deep Tunnels

ZHOU Feng-xi^{1,2}, CAO Xiao-lin¹

(1. *School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, P.R.China;*

2. *Western Engineering Research Center of Disaster Mitigation in Civil Engineering of Ministry of Education, Lanzhou 730050, P.R.China*)

Abstract: Deep buried tunnels with different cross-section shapes were analyzed through comparison between the analytical solutions and the approximate solutions obtained by the equivalent radii for the surrounding rock stresses. Firstly, according to the basic theory of complex variable functions, the stress components were obtained and the analytical expressions for the surrounding rock stresses of deep tunnels with various section shapes including the circle, the ellipse, the rectangle and the straight-wall arch, were given. Secondly, with the converted forms of the equivalent radii, the section boundary was transformed into a standard circle and the surrounding rock stress components were calculated by means of the Lamé solution. Finally, in view of the variable parameters of the tunnel cross-section shapes, comparisons between the exact solutions and the approximate solutions were conducted based on numerical examples, and the accuracy of the converted equivalent radii was discussed. The accuracy of the analytic solutions of the complex variable functions was proved, and the accuracy of the equivalent radii was verified for different cross-section shapes. The results show that the similarity between the solutions of the converted forms and the exact solutions of the equivalent radii is closely related to the cross-section shapes of the tunnels and the geometrical parameters.

Key words: complex variable function; surrounding rock stress; deep tunnel; equivalent radius

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(51368038)

引用本文/Cite this paper:

周凤玺, 曹小林. 深埋隧洞围岩应力的精确解与近似解的对比分析[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(10): 1166-1179.

ZHOU Feng-xi, CAO Xiao-lin. Comparison between exact solutions and approximate solutions of deep tunnels[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(10): 1166-1179.