

# 带控制面机翼结构基于弧长数值连续法的 颤振特征研究\*

陈 恒, 王扬渝, 金江明

(浙江工业大学 机械工程学院, 杭州 310014)

**摘要:** 以三自由度二元机翼为研究对象,将浮沉位移和俯仰位移方向的非线性刚度简化为立方非线性,对于存在间隙的控制面采用双线性刚度代替.考虑准定常气流,建立气动弹性运动方程,通过数值模拟构造峰值-峰值图,反映其在不同气流速度下的振动特征.通过弧长数值连续法构造系统的分岔图,结合 Floquet 算子研究其稳定性及其分岔类型,所得分岔图和数值模拟的结果相吻合.由分岔图可得系统由于控制面双线性的存在,导致机翼结构振动形态多变,存在多个分岔点和多个不稳定区间,不仅存在极限环振动和非光滑准周期振动,而且在某些不稳定区间出现混沌现象.

**关键词:** 气动弹性系统; 峰值-峰值图; 数值连续法; 极限环; 分岔

**中图分类号:** O322; V215.3<sup>+4</sup>      **文献标志码:** A      doi: 10.21656/1000-0887.370223

## 引 言

机翼颤振是一种可能带来灾难性后果的气动弹性现象,在飞行器设计阶段要求进行颤振分析.机翼颤振是由机翼的结构和气流的流固耦合引起的.由于结构非线性和气动非线性的存在,振动幅值限制在一定范围内,其主要形式为极限环颤振.极限环颤振是指气流速度增加导致系统中出现 Hopf 分岔而产生的周期振动.极限环颤振是气动弹性的重要问题,对飞行器结构造成危害,如 F-16 和 F/A-18 战机在超音速飞行时产生了极限环颤振<sup>[1]</sup>.对于极限环颤振,在理论与实验方面均已经做了不少研究.Gilliatt 等研究了结构非线性和失速状态下气动非线性的运动,得到极限环颤振<sup>[2]</sup>.Jones 和 Roberts 等识别了带双线性的非线性气动弹性结构的极限环颤振<sup>[3]</sup>.Tang 和 Dowell 研究了带外挂的机翼产生间隙非线性结构的振动响应<sup>[4]</sup>.郭虎伦和陈予恕对超声速流中含间隙和立方非线性二元机翼的颤振进行了动力学分析<sup>[5]</sup>.齐欢欢等对超音速飞行器的机翼颤振进行了反馈控制研究<sup>[6]</sup>.赵永辉等进行了大展弦比夹芯翼大攻角颤振分析<sup>[7]</sup>.崔鹏等研究了新型运输机的颤振特征,发现了翼梢装置对机翼颤振的不利影响<sup>[8]</sup>.周秋萍和邱志平研究了外挂连接具有初偏间隙非线性的机翼颤振问题,并对其颤振进行区间分析得到颤振边界曲线<sup>[9]</sup>.史爱明等研究带立方刚度非线性的超音速机翼颤振时发现流速增大,极限环振荡的形态有很大的不同<sup>[10]</sup>.这些研究表明,在一定条件下,流速增加时,周期运动特征会发生变化,如闭轨曲线拓扑形状变化,但这种变化的机制尚不清楚.

\* 收稿日期: 2016-07-21; 修订日期: 2016-09-13

基金项目: 国家自然科学基金(51405440);浙江省自然科学基金(LY13E050018)

作者简介: 陈恒(1982—),男,讲师,博士(通讯作者. E-mail: hengchen@zjut.edu.cn).

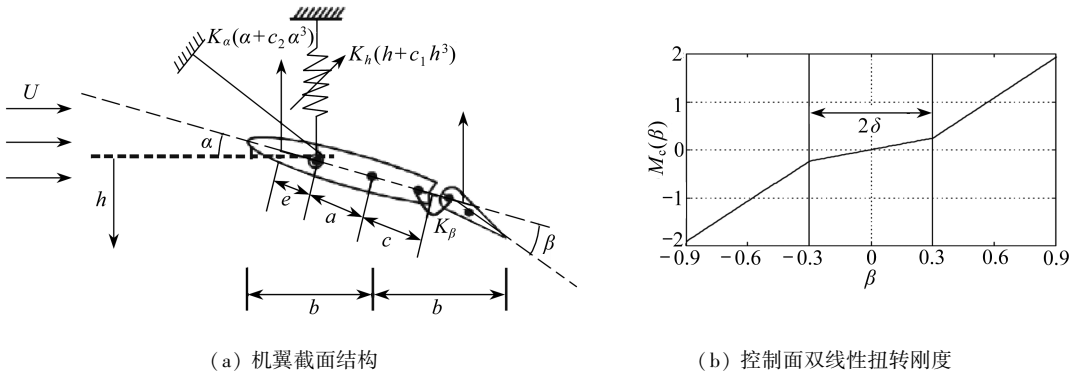
研究气动弹性系统在不同流速下的整体振动特征,常用的方法是计算其分岔图.对于预测和分析机翼结构分岔的方法主要有范式法<sup>[11]</sup>、中心流方法<sup>[12]</sup>、胞映射法<sup>[13]</sup>、谐波平衡法<sup>[14]</sup>等.目前,数值法在气动弹性系统分析和分岔计算中得到广泛的应用和发展,如 Dimitriadis<sup>[15]</sup>用数值法计算了带间隙非线性的气动弹性结构的分岔.而对于气动弹性系统的强非线性,不同系统具有很强的独特性,难以用一种通用的方法实现分岔的分析.使用数值法对于非光滑振动系统,分析过程往往容易遇到奇点,导致计算失败.本文针对控制面带双线性刚度的三自由度二元机翼,设计基于弧长数值连续的方法,实现分岔和稳定性的高效快速计算.

## 1 二元机翼模型

考虑不可压缩气流中具有浮沉、俯仰和控制面转动的三自由度二元机翼振动系统模型,如图 1 所示.图 1 中  $e$  是空气动力焦点到弹性轴的距离; $b$  是半弦长; $a$  是从半弦点到弹性轴的距离; $c$  是从半弦点到控制面的距离. $h, \alpha$  和  $\beta$  分别为浮沉位移、俯仰位移和控制面的转动位移. $K_h$  和  $K_\alpha$  表示  $h$  和  $\alpha$  方向的弹性系数; $c_1$  和  $c_2$  表示  $h$  和  $\alpha$  方向的非线性刚度系数;控制面转动的刚度用双线性表示,恢复力矩  $M_c(\beta)$  如图 1(b) 所示,其中  $2\delta$  表示控制截面在间隙中可转动的角度. $U$  为气流速度.运动方程为

$$\begin{cases} M\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha} + S_\beta\ddot{\beta} + K_h(h + c_1h^3) = -L_y, \\ I_\alpha\ddot{\alpha} + (I_\beta + b(a + c)S_\beta)\ddot{\beta} + S_\alpha\ddot{h} + K_\alpha(\alpha + c_2\alpha^3) = M_y, \\ I_\beta\ddot{\alpha} + S_\beta\ddot{h} + (I_\beta + b(a + c)S_\beta)\ddot{\alpha} + M_c(\beta) = M_\beta, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $M$  为机翼质量, $S_\alpha$  和  $S_\beta$  分别为机翼主体和控制面的质量不平衡, $I_\alpha$  和  $I_\beta$  为机翼主体和控制面的转动惯量.



(a) The typical section of an airfoil with control surface (b) Piecewise nonlinear restoring moment for control-surface

图 1 带控制面二元机翼模型

Fig. 1 The 2D airfoil model with control surface

记  $q$  为气动压强, $S$  为受压面积.假设气流为不可压缩准定常状态,提升力  $L$  可表示为  $L = qS(\alpha_{\text{eff}})$ ,其中  $\alpha_{\text{eff}} = \alpha + \dot{h}/U$ .在模型中  $L_\alpha$  和  $L_\beta$  可分别表示为

$$\begin{cases} L_\alpha = \left(\frac{1+c}{2}\right) qS \frac{\partial C_l}{\partial C_\alpha} \left(\alpha + \frac{\dot{h}}{U}\right), \\ L_\beta = \left(\frac{1-c}{2}\right) qS \frac{\partial C_l}{\partial C_\alpha} \left(\alpha + \beta + \frac{\dot{h}}{U}\right). \end{cases} \quad (2)$$

当转角为小角度时力矩  $M_\alpha \approx eL_\alpha, M_\beta \approx eL_\beta$ , 式(1)无量纲方程如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + x_\alpha \alpha'' + x_\beta \beta'' + \mu C_{L,\alpha} u^* y' + \Omega_y^2 y + \mu C_{L,\alpha} u^{*2} \alpha + \\ \quad \frac{1-c}{2} \mu C_{L,\beta} u^{*2} \beta + \xi_y y^3 = 0, \\ r_\alpha^2 \alpha'' + (r_\beta^2 + (c+a)x_\beta) \beta'' + x_\alpha y'' + r_\alpha^2 \alpha + \\ \quad \left( \frac{(1-c)(c+a) - (1+c)r}{2} \right) \mu C_{L,\alpha} u^* (u^* \alpha + y') + \\ \quad \frac{(1-c)(c+a)}{2} \mu C_{L,\beta} u^{*2} \beta + \xi_\alpha \alpha^3 = 0, \\ r_\beta^2 \beta'' + (r_\beta^2 + (c+a)x_\beta) \alpha'' + x_\alpha y'' - \left( \frac{(1-c)}{2} \frac{1-c}{1+c} \right) \eta \mu C_{L,\beta} u^{*2} (\alpha + \beta) - \\ \quad \frac{(1-c)(c+a)}{2} \eta \mu C_{L,\beta} u^* y' - m_c(\beta) = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

其中方程中各无量纲参数分别为  $y = h/b$ ,  $x_\alpha = S_\alpha/(Mb) = 0.2$ ,  $x_\beta = S_\beta/(Mb) = 0.01$ ,  $\omega_h$  和  $\omega_\alpha$  表示线性固有频率,  $\omega_h = \sqrt{K_h/M} = 4.6$ ,  $\omega_\alpha = \sqrt{K_\alpha/I_\alpha} = 9.2$ ,  $\Omega_y = \omega_h/\omega_\alpha = 0.5$ ,  $\mu$  表示空气密度比为  $1/(10\pi)$ ,  $C_{L,\alpha}$  和  $C_{L,\beta}$  为机翼和控制面与气流方向零角度时的提升力系数, 均为  $2\pi$ .  $u^* = U/(b\omega_\alpha)$  表示气流速度大小, 另外,  $r_\alpha = 0.5$ ,  $r_\beta = 0.05$ ,  $r = e/b = 0.5$ ,  $\xi_y = \xi_\alpha = 1$ . 无量纲方程中时间  $\tau = \omega_\alpha t$ . 控制面非线性恢复力矩  $m_c(\beta)$  可表示为

$$m_c(\beta) = \begin{cases} k\beta + K(\beta - \delta), & \beta > \delta, \\ k\beta + K(\beta + \delta), & \beta < -\delta, \\ k\beta, & |\beta| \leq \delta, \end{cases}$$

其中  $\delta = 0.3$ .

## 2 数值响应特征

假设  $\xi_y = \xi_\alpha = 0$  且控制面小角度转动  $m_c(\beta) = k\beta$ , 考虑方程(3) 对应的线性化微分方程. 对于此线性微分方程, 做特征值分析, 假设  $y = e^{p\tau} \bar{y}$ ,  $\alpha = e^{p\tau} \bar{\alpha}$ ,  $\beta = e^{p\tau} \bar{\beta}$ , 代入线性方程, 根据不同的风速  $u^*$  解得  $p = p_r + i\omega$ . 实数部分代表系统的稳定性,  $\omega$  表示响应的频率值. 当  $p_r > 0$  时, 表示响应是不稳定的. 当  $p_r < 0$  时, 系统的响应为稳定的.  $p_r = 0$  对应的风速  $u^*$  为颤振发生的临界值. 此线性系统不同风速  $u^*$  值时  $p$  的解如图 2 所示.

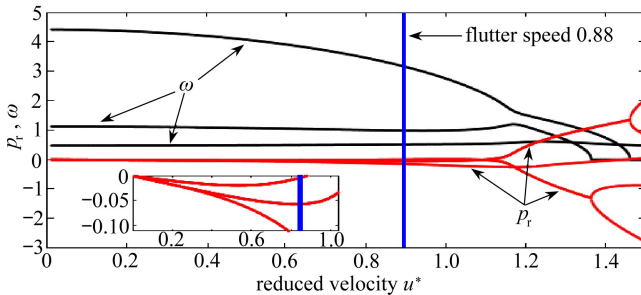


图 2 不同风速下线性微分方程特征值  $p$  的实部和虚部

Fig. 2 Real and imaginary parts of solution  $p$  with respect to the reduced velocity

由图 2 可得当风速  $u^* = 0.88$  时,  $p_r = 0$ , 可得线性系统颤振临界值风速为 0.88. 当  $u^* <$

0.88 时,  $p_r < 0$ , 响应收敛. 当  $u^* > 0.88$  时,  $p_r > 0$ , 发生颤振. 给定系统初始位移  $y(0) = 0.001$ ,  $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ , 初始速度  $y'(0) = \alpha'(0) = \beta'(0) = 0$ . 数值模拟系统响应见图 3, 对于线性系统如果风速小于临界风速, 响应收敛趋于 0, 例如  $u^* = 0.5$ , 系统响应如图 3(a) 所示. 当风速大于临界风速时响应发散, 例如  $u^* = 0.9$ , 系统响应如图 3(c) 所示.

对于非线性微分方程(3), 相同的初值, 当风速小于临界风速时响应收敛(如图 3(b) 所示), 当风速大于临界风速时系统响应形成极限环(如图 3(d) 所示). 当风速继续增大, 例如  $u^* = 0.912$  时, 系统响应将出现准周期运动; 当  $u^* = 0.928$  时系统产生混沌现象(如图 4 所示).

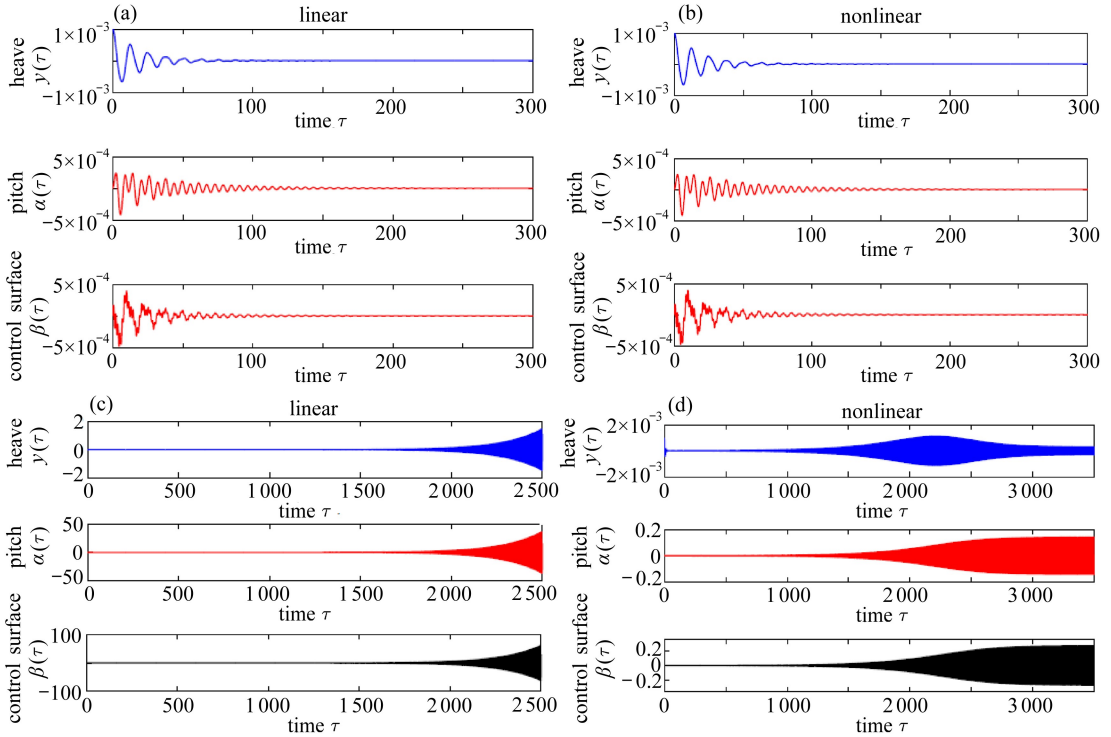
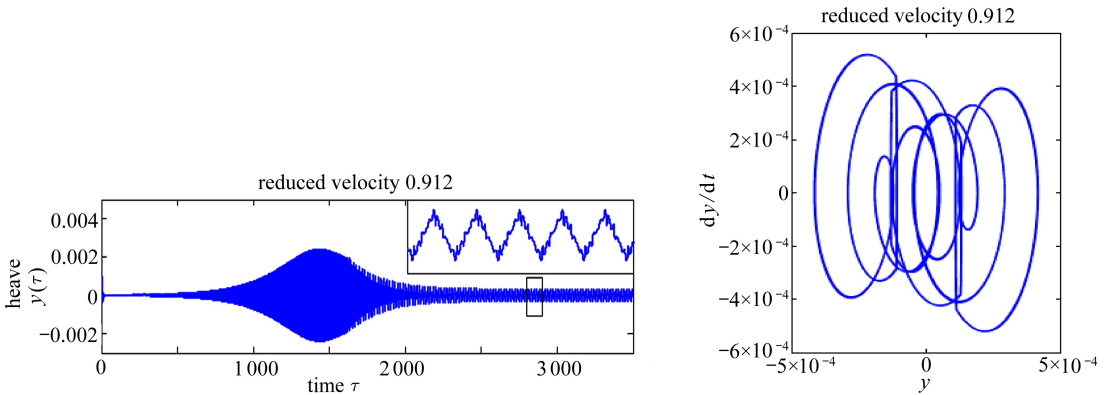
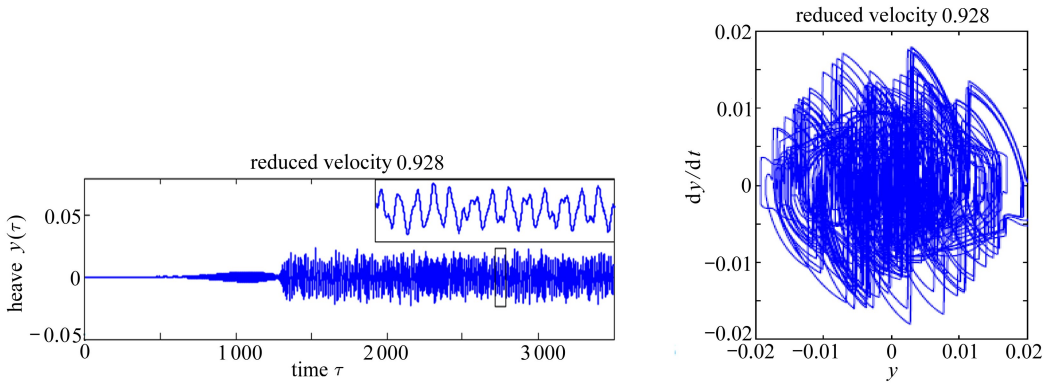


图 3 线性系统及非线性系统在风速小于临界风速((a), (b))和大于临界风速((c), (d))时的响应对比  
 Fig. 3 Time responses at subcritical ((a), (b)) and supercritical ((c), (d)) reduced velocities in the linear and nonlinear models



(a) 准周期响应

(a) Quasiperiodic response



(b) 混沌现象

(b) Chaotic motion

图4 准周期响应和混沌现象及对应的相位图

Fig. 4 Quasiperiodic response and chaotic motion, with the corresponding phase diagrams

为了描述非线性系统的整体响应特征,在不同风速下分别数值模拟系统响应,记录响应稳定后的极值形成峰值-峰值图,如图5所示.峰值-峰值图初步反映了系统的分岔结构,当  $u^* = 0.88$  时系统发生 Hopf 分岔,这与基于线性系统的特征值分析相一致.由峰值-峰值图可得当风速小于 0.903 时,控制面振动幅值小于 0.3,系统响应为光滑振动;如果风速大于 0.903,系统响应为非光滑振动.当风速介于 0.903 和 0.918 之间时响应为周期运动,形成极限环.当风速介于 0.918 与 0.922 之间以及 0.923 与 0.941 之间将出现混沌现象.当风速大于 0.903,除上述区域外系统都将发生准周期运动.

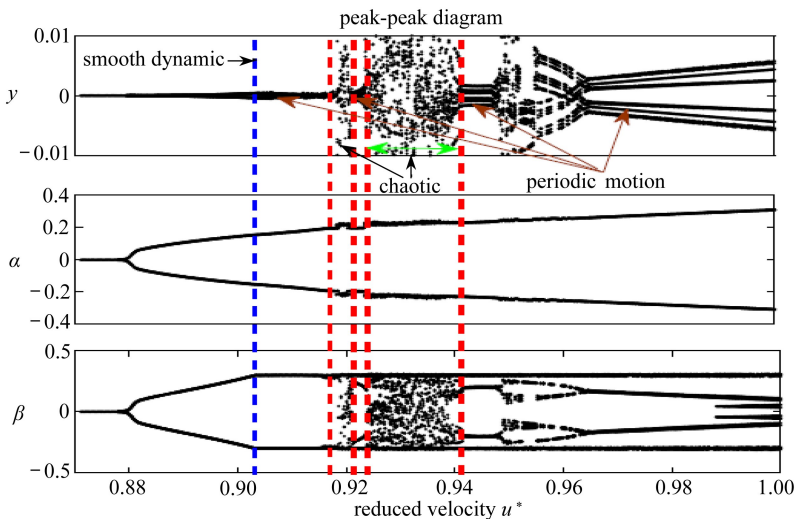


图5 峰值-峰值图

Fig. 5 The peak-to-peak value diagram

### 3 基于长度数值连续法的分岔和稳定性分析

数值连续法用于求解带一个或多个参数的非线性问题<sup>[16]</sup>,在求解气动弹性力学问题中已有相应的软件包如 AUTO<sup>[17]</sup>和 MATCONT<sup>[18]</sup>,Roberts 等<sup>[19]</sup>利用其求解双线性问题的解,Dimi-

triadis 求解了间隙非线性机翼振动的分岔问题<sup>[15]</sup>.数值连续法主要用于求解如下形式的非线性代数方程的解:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{f}$  表示非线性函数向量,  $\mathbf{x}$  表示未知数向量,  $\lambda$  表示变量. 给定方程在  $\lambda_0$  时已知解  $\mathbf{x}_0$ , 利用数值连续法寻找在变量  $\lambda_0 + \Delta\lambda$  时的解  $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ , 其中  $\Delta\lambda$  为微小变化.

在本文中需要求解的是常微分方程, 其形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda), \quad (5)$$

其中  $\mathbf{x} = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ ,  $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n]^T$ ,  $\lambda$  为变量参数. 使用数值连续法需要把常微分方程转化为代数方程. 基于系统的周期解分析分岔问题, 把方程(4)转化为一系列的非线性代数方程

$$F(\mathbf{x}(t), \lambda) = 0, \quad (6)$$

其中  $F$  表示非线性函数. 在特定的参数  $\lambda$  下, 给定一个假设的初始值  $\mathbf{x}_0$ , 基于 Newton(牛顿)迭代可以得到其精确解  $\mathbf{x}$ :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \lambda} \Delta \mathbf{x} = -F(\mathbf{x}_0, \lambda), \quad (7)$$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}, \quad (8)$$

其中  $\Delta \mathbf{x}$  表示对  $\mathbf{x}_0$  的改进, 经过多次迭代可以得到精确值.

把常微分方程转化为代数方程常用的方法为打靶法, 是一种边界值方法. 若方程的解  $\mathbf{x}(t)$  是周期解, 那么数值连续法就转化为求解如下的边界值问题:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T). \quad (9)$$

常微分方程转化为

$$F(\mathbf{x}, T, \lambda) = \sum_{i=1}^n |x_i(0) - x_i(T)| = 0, \quad (10)$$

给定初始值  $\mathbf{x}(0)$ , 通过数值积分得到  $\mathbf{x}(T)$ , 计算函数  $F$  的值. 对于求解微分方程的响应可以使用 Runge-Kutta(龙格-库塔)等数值方法. 假设系统参数为  $\lambda_0$  时, 响应为  $\mathbf{x}_0(t)$ , 周期为  $T_0$ , 则当参数为  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$  时,

$$\left( \left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}(0)} \right|_{\mathbf{x}_0, T_0, \lambda} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{\mathbf{x}_0, T_0, \lambda} \right) \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta T \end{pmatrix} = -F(\mathbf{x}_0(0), T_0, \lambda), \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0(0) \\ T_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta T \end{pmatrix}. \quad (12)$$

方程(11)表示  $n$  个方程有  $n+1$  个未知数. 在这个方程中, 使用相位固定法, 最简单的就是假设初值中一个元素始终为 0, 如  $x_1(0) = 0$ , 这样未知数就降为  $n$  个.

$\partial F / \partial \mathbf{x}(0)$  和  $\partial F / \partial T$  两个偏微分矩阵可以通过数值方法计算,  $\partial F / \partial \mathbf{x}(0) |_{\mathbf{x}_0, T_0, \lambda}$  可表示成

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}(0)} \right|_{\mathbf{x}_0, T_0, \lambda} = \frac{1}{\delta \mathbf{x}} \begin{pmatrix} F(\mathbf{x}(0) + \delta \mathbf{x}_1, T_0, \lambda) - F(\mathbf{x}(0), T_0, \lambda) \\ F(\mathbf{x}(0) + \delta \mathbf{x}_2, T_0, \lambda) - F(\mathbf{x}(0), T_0, \lambda) \\ \vdots \\ F(\mathbf{x}(0) + \delta \mathbf{x}_n, T_0, \lambda) - F(\mathbf{x}(0), T_0, \lambda) \end{pmatrix}^T, \quad (13)$$

其中  $\delta \mathbf{x}$  是微小量,  $\delta \mathbf{x}_i$  表示为  $n \times n$  矩阵  $\delta \times \mathbf{I}$  的第  $i$  列. 当  $\mathbf{x}(0)$  的第一个元素均为 0 时, 计算 Jacobi(雅可比)矩阵从  $i=2$  开始, 矩阵维数为  $n \times (n-1)$ .



上述方法为基本的数值连续法,称为自然参数连续.对于非线性问题,基于自然参数的连续法求解时其解的分支可能出现折返、交叉甚至消失.这类情况会产生奇异点,自然参数的连续法将失效.更加有效的方法是采用弧长连续(arclength continuation).弧长数值连续选用参数  $s$  不再采用系统参数  $\lambda$ ,对应的步长采用  $\Delta s$ .当数值连续进行到分岔附近则需要减少步长,以免丢失真实的解.当远离分岔时若采用很小步长,则影响方法的计算效率.故需采用变步长的策略<sup>[15]</sup>.弧长为  $\mathbf{x}(0)$ ,  $T$  和  $\lambda$  对应  $s$  的改变速率为

$$\Delta \mathbf{x} \frac{\partial \mathbf{x}^T(0)}{\partial s} \Big|_{x_0, T_0, \lambda_0} + \Delta T \frac{\partial T}{\partial s} \Big|_{x_0, T_0, \lambda_0} + \Delta \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial s} \Big|_{x_0, T_0, \lambda_0} = \Delta s, \quad (14)$$

把  $\Delta \lambda$  看成另外一个未知数,可以得到

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}(0)} & \frac{\partial F}{\partial T} & \frac{\partial F}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^T(0)}{\partial s} & \frac{\partial T}{\partial s} & \frac{\partial \lambda}{\partial s} \end{pmatrix} \Big|_{x_0, T_0, \lambda_0} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta T \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F(\mathbf{x}_0(0), T_0, \lambda_0) \\ \Delta s \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ T_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0(0) \\ T_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta T \\ \Delta \lambda \end{pmatrix}. \quad (16)$$

此时系统为  $n + 1$  个方程,可以求解  $n + 1$  个未知数.

方程组(15)中如何选择  $\Delta s$  是一个关键问题,如果选择  $\Delta s$  过大则会错失奇异点导致计算失败,选择  $\Delta s$  过小则会导致计算速度过慢.通常可以根据方向向量的曲率选择  $\Delta s$  的步长,在曲率大的时候选择小步长,小曲率时选择大步长.假设  $\mathbf{u} = [\Delta \mathbf{x}^T(0) \quad \Delta T \quad \Delta \lambda]$ ,对方程(15)进行 Newton 迭代,当  $\sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} < \varepsilon$  时迭代停止. $\mathbf{u}_1$  为第一次迭代后的增量, $\mathbf{u}_2$  为第二次迭代后的增量.定义迭代的收缩速率

$$\kappa = \frac{\sqrt{\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2}}{\sqrt{\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1}} \quad (17)$$

表示解在前两个迭代周期的逼近速度,假定此速率为常数  $\bar{\kappa}$ .弧长的新增量可以定义为

$$\bar{\Delta s} = \Delta s \sqrt{\frac{\bar{\kappa}}{\kappa}}. \quad (18)$$

对于周期解,另外一个重要性质是稳定性.若对其初始条件施加一个微小扰动,运动偏离原来周期运动则为不稳定,反之为稳定.对于一个周期为  $T$  的运动轨迹  $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}(0))$ ,其在  $t = T$  时的 Jacobi 矩阵为

$$\Phi_T(\mathbf{x}(0)) = \frac{\partial \mathbf{x}(t, \mathbf{x}(0))}{\partial \mathbf{x}(0)} \Big|_{t=T}. \quad (19)$$

对初始条件施加微扰动  $\Delta \mathbf{x}(0)$ ,对扰动后的解  $\mathbf{x}(T, \mathbf{x}(0) + \Delta \mathbf{x}(0))$  Taylor(泰勒)展开

$$\Delta \mathbf{x}(T) = \Phi_T(\mathbf{x}(0)) \Delta \mathbf{x}(0) + o(\|\Delta \mathbf{x}(0)\|^2), \quad (20)$$

其中  $\Delta \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(T, \mathbf{x}(0) + \Delta \mathbf{x}(0)) - \mathbf{x}(T, \mathbf{x}(0))$ ,表示经过一个周期后运动的偏离量,经过  $m$  个周期

$$\Delta \mathbf{x}(mT) = [\Phi_T(\mathbf{x}(0))]^m \Delta \mathbf{x}(0) + o(\|\Delta \mathbf{x}(0)\|^2). \quad (21)$$

周期运动的稳定性取决于矩阵  $\Phi_T$  的  $2n$  个特征值,即 Floquet 乘子.若 Floquet 乘子至少有一个值大于 1,则周期运动为不稳定,反之则系统稳定.

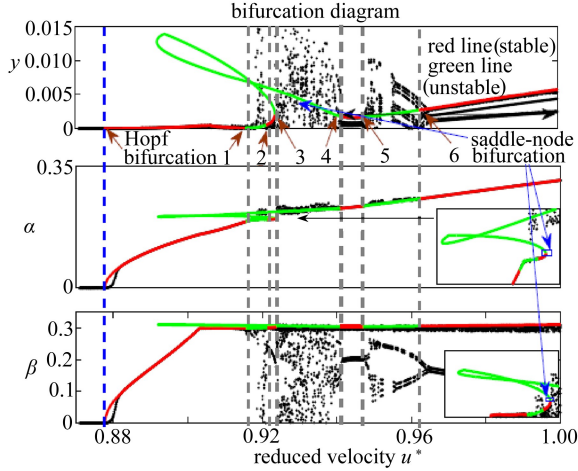


图 6 基于数值连续法的分岔图及其与峰值-峰值图对比(图中黑点表示峰值-峰值图)

Fig. 6 The bifurcation diagram from numerical continuation in comparison with the peak-to-peak value diagram

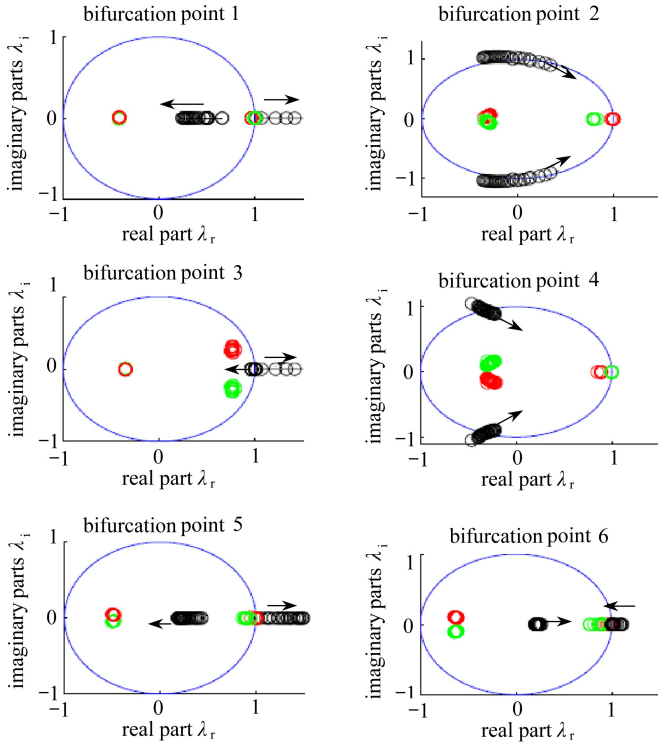


图 7 分岔点处 Floquet 乘子的变化趋势

Fig. 7 The Floquet multiplier movements at bifurcation points

给定一个初始的周期解,基于上述的弧长数值连续,可以得到系统在不同参数下的周期解及其稳定性,构造系统的分岔图,如图 6 所示.图 6 中红线为稳定解,绿色表示不稳定解.从分岔图中可以得到在风速为 0.88 时发生 Hopf 分岔,这和基于线性系统的特征值分析吻合.在风速介于 0.88 和 0.918 之间的区域是稳定的极限环运动,与数值模拟的结果及峰值-峰值图的稳定周期运动相吻合.在 0.918 处出现分岔点,运动由稳定转变为不稳定,在 0.918~0.921 之间的不稳定区间产生了混沌运动.在分岔图中第 2 点处,周期运动又转为稳定,产生了非光滑的准周



期运动,此外图中还可以发现在 0.940 5~0.946 5 之间有第三个稳定区间,此区间由峰值-峰值图可以发现提升和俯仰自由度的运动接近于单周期运动,而控制界面产生双周期运动.当风速大于 0.962 时也是稳定区间,此时 3 个自由度的运动均为三周期运动.在 0.923~0.940 5 区间为第二个不稳定区间,此区间为混沌运动.在 0.946 5~0.962 之间为第三个不稳定区间,此处将产生复杂的准周期运动.

分岔图中有 6 个点发生了稳定性转变(图 6 所示),为了研究分岔点的类型,图 7 描述了在分岔点附近的 Floquet 乘子变化趋势.在第 1 点处,可以发现其中一个实数 Floquet 乘子从单位圆内部逐渐往单位圆外部增长,表示在此处由稳定变为不稳定,这种变化为鞍形分岔.在第 3 点和第 5 点处实数 Floquet 乘子有相似的变化趋势,均为由稳定到不稳定的鞍形分岔.在第 6 点处实数 Floquet 乘子从单位圆外部逐渐往单位圆内部减少,同样是鞍形分岔,只是稳定性变化由不稳定趋向稳定.在第 2 点和第 4 点处的一对复数 Floquet 乘子由单位圆外部向单位圆内部运动,此分岔为 Neimark-Sacker 分岔,稳定性由不稳定趋向稳定.

## 4 结 论

本文研究三自由度二元机翼,根据气动弹性理论建立运动方程.通过数值模拟方程的响应得到峰值-峰值图初步判断此系统的整体振动特征,发现系统存在多种不同的振动形式,不仅存在极限环振动和非光滑准周期振动,而且在某些不稳定区间会出现混沌现象.通过弧长数值连续法构造系统的分岔图,对比峰值-峰值图显示两者的结果相吻合,验证系统由于控制面双线性的存在,导致机翼结构振动形态多变.计算周期运动的 Floquet 乘子,判定不稳定区间及分岔点的类型,得到系统存在多个不稳定和稳定区间,并识别到多个分岔点,出现 Hopf 分岔、鞍形分岔和 Neimark-Sacker 分岔.

## 参考文献(References):

- [1] Bunton R W, Denegri C W. Limit cycle oscillation characteristics of fighter aircraft[J]. *Journal of Aircraft, Engineering Note*, 2000, **37**(5): 916-918.
- [2] Gilliatt H C, Strganac T W, Kurdila A J. Nonlinear aeroelastic response of an airfoil[C]//*35th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, NV, USA, 1997: AIAA Paper 97-0459.
- [3] Jones D P, Roberts I, Gaitonde A L. Identification of limit cycles for piecewise nonlinear aeroelastic systems[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2007, **23**(7): 1012-1028.
- [4] TANG De-man, Dowell E H. Experimental and theoretical study of gust response for a wing-store model with freeplay[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **295**(3/5): 659-684.
- [5] 郭虎伦, 陈予恕. 超声速流中含间隙和立方非线性二元机翼的动力学分析[J]. *应用数学和力学*, 2012, **33**(1): 1-13. (GUO Hu-lun, CHEN Yu-shu. Dynamic analysis of a two-degree-of-freedom airfoil with freeplay and cubic nonlinearities in supersonic flow[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(1): 1-13. (in Chinese))
- [6] 齐欢欢, 徐鉴, 方明霞. 超音速飞行器机翼颤振的时滞反馈控制[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(2): 210-218. (QI Huan-huan, XU Jian, FANG Ming-xia. Time-delayed feedback control of flutter for supersonic airfoils[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(2): 210-218. (in Chinese))
- [7] 赵永辉, 胡海岩. 大展弦比夹芯翼大攻角颤振分析[J]. *振动工程学报*, 2004, **17**(1): 25-30. (ZHAO Yong-hui, HU Hai-yan. Flutter analysis of a high-aspect-ratio sandwich wing under large angle of attack[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, **17**(1): 25-30. (in Chi-

- nese))
- [8] 崔鹏, 韩景龙. 新型运输机机翼的颤振特性分析[J]. 振动工程学报, 2011, **24**(2): 192-199. (CUI Peng, HAN Jing-long. Flutter analysis of new transport-type wings[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2011, **24**(2): 192-199. (in Chinese))
- [9] 周秋萍, 邱志平. 机翼带外挂系统极限环颤振的区间分析[J]. 航空学报, 2010, **31**(3): 514-518. (ZHOU Qiu-ping, QIU Zhi-ping. Interval analysis for limit cycle flutter of a wing with an external store[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2010, **31**(3): 514-518. (in Chinese))
- [10] 史爱明, 杨永年, 叶正寅. 带结构刚度非线性的超音速弹翼颤振分析方法研究[J]. 西北工业大学学报, 2003, **21**(4): 481-485. (SHI Ai-ming, YANG Yong-nian, YE Zheng-yin. Investigation of flutter characteristics of wing with nonlinear stiffness in supersonic flow[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2003, **21**(4): 481-485. (in Chinese))
- [11] Vio G A, Cooper J E. Limit cycle oscillation prediction for aeroelastic systems with discrete bilinear stiffness[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, **3**: 100-119.
- [12] Liu L, Wong Y S, Lee B H K. Application of the centre manifold theory in non-linear aeroelasticity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **234**(4): 641-659.
- [13] Levitas J, Weller T, Singer J. Poincaré-like simple cell mapping for non-linear dynamical systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, **176**(5): 641-662.
- [14] Raghothama A, Narayanan S. Non-linear dynamics of a two-dimensional airfoil by incremental harmonic balance method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **226**(3): 493-517.
- [15] Dimitriadis G. Bifurcation analysis of aircraft with structural nonlinearity and freeplay using numerical continuation[J]. *Journal of Aircraft*, 2008, **45**(3): 893-905.
- [16] Kubicek M. Algorithm 502: dependence of solution of nonlinear systems on a parameter[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1976, **2**(1): 98-107.
- [17] Doedel E J, Champneys A R, Fairgrieve T F, et al. AUTO97-AUTO2000: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont): user's guide, tech rept[R]. Montreal, Canada: Concordia University, 2000.
- [18] Dhooge A, Govaerts W, Kuznetsov Y A. MATCONT: a MATLAB package for numerical bifurcation of ODEs[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2003, **29**(2): 141-164.
- [19] Roberts I, Jones D P, Lieven N A J, et al. Analysis of piecewise linear aeroelastic systems using numerical continuation[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2002, **216**(1): 1-11.

# Flutter Characteristics Analysis of 2D Rigid Airfoils With Control Surface Based on the Arc-Length Numerical Continuation Method

CHEN Heng, WANG Yang-yu, JIN Jiang-ming

(College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, P.R.China)

**Abstract:** A 3-DOF aeroelastic model was built for 2D rigid airfoils with control surface. This model was simplified with cubic nonlinear stiffness in heave and pitch, where the freeplay control surface was replaced with bilinear stiffness. According to the quasi-steady aerodynamic theory, the motion equations for the system was established. The peak-to-peak value diagram was used to depict the global dynamic properties of the airfoil at different flow velocities, and the arc-length numerical continuation method together with the Floquet multiplier was applied to construct the bifurcation diagram and study the aerodynamic stability. The bifurcation diagram matched the peak-to-peak value diagram well. The results show there are various dynamic behaviors due to freeplay nonlinearity. The aeroelastic model yields complicated limit cycle oscillations, quasi-periodic motions and chaotic phenomena when the angular displacement of the control surface reaches the clearance limit.

**Key words:** aeroelasticity; peak-to-peak value diagram; numerical continuation method; limit cycle; bifurcation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51405440)

---

引用本文/Cite this paper:

陈恒, 王扬渝, 金江明. 带控制面机翼结构基于弧长数值连续法的颤振特征研究[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(7): 769-779.

CHEN Heng, WANG Yang-yu, JIN Jiang-ming. Flutter characteristics analysis of 2D rigid airfoils with control surface based on the arc-length numerical continuation method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(7): 769-779.