

基于 Monte-Carlo 随机有限元方法的 随机边界条件下自然对流换热 不确定性研究*

何贻海, 姜昌伟, 姚 鸣, 张炳晴, 朱炎鹤, 张钟庆

(长沙理工大学 能源与动力工程学院, 长沙 410114)

摘要: 为分析边界条件不确定性对方腔内自然对流换热的影响,发展了一种求解随机边界条件下自然对流换热不确定性传播的 Monte-Carlo 随机有限元方法.通过对输入参数场随机边界条件进行 Karhunen-Loeve 展开及基于 Latin(拉丁)抽样法生成边界条件随机样本,数值计算了不同边界条件随机样本下方腔内自然对流换热流场与温度场,并用采样统计方法计算了随机输出场的平均值与标准偏差.根据计算框架编写了求解随机边界条件下方腔内自然对流换热不确定性的 MATLAB 随机有限元程序,分析了随机边界条件相关长度与方差对自然对流不确定性的影响.结果表明:平均温度场及流场与确定性温度场及流场分布基本相同;随机边界条件下 Nu 数概率分布基本呈现正态分布,平均 Nu 数随着相关长度和方差增加而增大;方差对自然对流换热的影响强于相关长度的影响.

关键词: Monte-Carlo 方法; 随机有限元; 随机边界条件; 自然对流; 不确定性

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.370224

引 言

封闭腔体内流动与换热现象广泛存在于各工程领域,如地下水与大气环流、太阳能热利用、建筑物隔热绝缘、电子器件冷却、动力电站封闭母线等^[1-2].国内外学者对封闭腔体内流动与换热现象开展了大量研究.Córdoba 等^[3]研究了流体黏性随温度变化的方腔内自然对流换热.Yousaf 等^[4]研究了周期性垂直壁粗糙度对方腔内自然对流的影响,发现粗糙壁面对腔体内对流换热具有很大影响,当冷热壁面呈现正弦粗糙时腔体内传热性能最多降低 28%.Dubois 等^[5]利用多重弛豫时间晶格 Boltzmann(玻尔兹曼)方法研究了 Ra 数变化范围为 $10^3 \sim 10^6$ 时方腔内的自然对流.常春等^[6]通过实验及数值方法对非均匀边界条件下太阳能高温吸热管内的湍流传热进行了分析.上述研究都是考虑确定性条件即控制方程中所有参数均视为确定性变量(物性参数、几何条件与边界条件)下的流动与传热,实际上,由于恶劣的环境因素、不完整的

* 收稿日期: 2016-07-21; 修订日期: 2016-08-13

基金项目: 国家自然科学基金(11572056); 湖南省研究生科研创新项目(CX2016B409); 湖南省教育厅重点项目(15A006)

作者简介: 何贻海(1991—),男,硕士生(E-mail: 645259125@qq.com);

姜昌伟(1973—),男,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: cw_jiang@163.com).

知识及不可避免的测量误差等会引起物性参数、几何条件与边界条件等的不确定性,同时这些不确定性在控制方程中传播会造成流动与传热的不确定性^[7-9]。

近年来,不确定性条件下的热传导问题渐渐成为研究的热点并发展出多种热传导不确定性分析的数值计算方法.最先发展起来的是 Monte-Carlo 随机有限元方法 (Monte-Carlo stochastic finite element method, MCSFEM),该方法被认为是目前解决随机问题最简单的方法,其实质是通过生成大量的输入随机场,然后进行每个输入随机场下的确定性分析,最后运用统计分析方法计算输出随机场的随机性质.Zhou 等^[8]采用 Neumann(诺伊曼)随机有限元法(NSFEM)研究了寒冷地区宽路基高速公路的温度分布特征,发现不同时刻土壤特性和边界条件的随机性作用不同.Hosseini 等^[9]应用随机混合数值方法对机械性能参数均为 Gauss(高斯)分布变量时热冲击下的厚空心圆柱体弹性波进行了瞬态分析.云永琥等^[10]采用加权最小二乘无网格法来分析随机稳态温度场.这些研究通过采用随机方法获得了不确定性条件对温度场的不确定性影响.王涛等^[11-14]应用 Monte-Carlo 随机有限元法对土壤物性参数不确定性条件下的单管及多圈管的冻结温度场进行了瞬态分析,同时他们还研究了立井井壁随机温度场.孙红等^[15]基于 Monte-Carlo 方法对冻土路基随机温度场进行了分析.Zhang 等^[16]采用了准 Monte-Carlo 有限体积法求解扩散系数不确定性的对流扩散方程,并给出了其收敛标准.除了 Monte-Carlo 随机有限元方法外,一些学者提出了广义多项式混沌方法、概率配点法、随机区间有限体积法等方法.Xiu 等^[17]提出一种广义多项式混沌算法求解具有不确定性输入的瞬态热传导,如随机导热系数和热容,并用于电子芯片温度场不确定性分析,获得电子芯片温度场不确定性分布.Wang 等^[18-20]同时考虑材料属性、外部荷载与边界条件,发展了 3 种预测不确定性条件下稳态温度场的数值计算方法——随机区间有限体积法、稀疏网格随机配点法及模糊随机有限元方法,并与传统的 Monte-Carlo 法相比,验证了这 3 种方法运用于稳态热传导问题的可行性与有效性。

与热传导问题不确定性分析相比,流动与传热耦合问题的不确定性分析需要同时耦合计算质量守恒方程、动量守恒方程及能量守恒方程,其不确定性分析要远比热传导问题复杂,因此流动与传热耦合问题不确定性分析的研究与应用报道并不多见.本文把 Monte-Carlo 随机有限元方法引入到流动与传热耦合问题的不确定性分析中并编写了相应的 MATLAB 程序,进行了随机边界条件下方腔内自然对流的不确定性分析。

1 确定性物理数学模型

考虑长度为 L 的二维方腔,其物理模型与坐标系统如图 1 所示.方腔内充满密度为 ρ 、分子黏度为 μ 、导热系数为 k 的 Newton(牛顿)流体.方腔左侧垂直壁面等温加热,右侧垂直壁面等温冷却,上下壁面绝热。

方腔内流体自然对流确定性无量纲控制方程表示如下:

连续性方程

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad (1)$$

动量方程

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right), \quad (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Ra \cdot Pr \cdot \theta; \quad (3)$$

能量方程

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}. \tag{4}$$

式(1)~(4)中无量纲参数分别为

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, U = \frac{u \cdot L}{\alpha}, V = \frac{v \cdot L}{\alpha}, \theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_c},$$

$$P = \frac{p \cdot L^2}{\rho \alpha^2}, T_0 = \frac{T_h + T_c}{2}, Ra = \frac{g \beta (T_h - T_c) L^2}{\nu \alpha}, Pr = \frac{\nu}{\alpha},$$

其中 X, Y 为无量纲坐标; U, V 为无量纲速度; θ 为无量纲温度; P 为无量纲压力; Pr 为 Prandtl (普朗特) 数, 取固定值为 1; Ra 为 Rayleigh (瑞利) 数, 取固定值为 10^3 ; T 为流体温度, K, 且参考温度定义为 $T_0 = (T_h + T_c)/2$, K, 下标 0, h, c 分别表示参考值、高温值和低温值; g 为重力加速度, $m \cdot s^{-2}$; β 为热膨胀系数, K^{-1} .

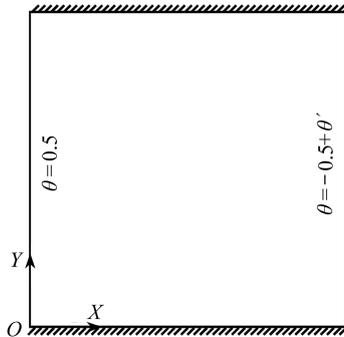


图 1 随机温度边界条件下方腔内自然对流示意图

Fig. 1 Schematic of natural convection in cavity under stochastic boundary condition

采用热壁面的平均 Nusselt (努谢尔) 数来描述自然对流换热性能:

$$Nu = \int_0^1 - \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=0} dY. \tag{5}$$

2 随机边界条件及其 Karhunen-Loeve 展开

由于方腔壁面加热或冷却的不均匀性及不可避免的温度测量误差会造成方腔壁面温度不确定性, 本文仅考虑冷壁面温度随机波动即不确定性的影响, 则冷壁面温度可以表示为

$$\theta(X=1, Y) = \theta_c + \theta'(Y) = -0.5 + \theta'(Y). \tag{6}$$

使用 $\langle \cdot \rangle$ 表示期望, 则 $\langle \theta(X=1, Y) \rangle = \theta_c, \langle \theta'(Y) \rangle = 0$, 即冷壁面平均温度与 Y 轴位置不相关.

假定冷壁面温度呈 Gauss 随机分布, 则其特征由归一化方差 σ_θ^2 与协方差函数 κ 决定:

$$\kappa(Y_1, Y_2) \equiv \kappa(|Y_1, Y_2|) \equiv \langle \theta'(Y_1) \theta'(Y_2) \rangle = \sigma_\theta^2 \exp[-|Y_1 - Y_2|/L_c], \tag{7}$$

其中, L_c 为相关长度. 通过 Fourier 级数展开, 协方差函数 κ 可以分解^[21-22]为

$$\kappa(Y_1, Y_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i f_i(Y_1) f_i(Y_2), \tag{8}$$

式中, λ_i 和 $f_i(Y)$ 分别为特征根和特征函数. 由此, $\theta(X=1, Y)$ 可表示为

$$\theta(X = 1, Y) = -0.5 + \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} f_i(Y) \xi_i, \tag{9}$$

式中, ξ_i 为 0 均值单位方差的正交 Gauss 随机变量. 在实际应用中, 对于扰动随机项, 可以选取前 N 项(本研究取前 100 项)近似表示为

$$\theta(X = 1, Y) = \theta_c + \sum_{i=0}^N \sqrt{\lambda_i} f_i(Y) \xi_i. \tag{10}$$

特征根 λ_i 和特征函数 $f_i(Y)$ 可通过求解 Fredholm 方程(11)得到

$$\int_0^1 \kappa(Y_1, Y_2) f(Y_2) dY_2 = \lambda f(Y_1). \tag{11}$$

Fredholm 方程可以通过解析方法与数值计算方法两种方法得到, 本文采用解析方法获得特征根 λ_i 与特征函数 $f_i(Y)$ 如下:

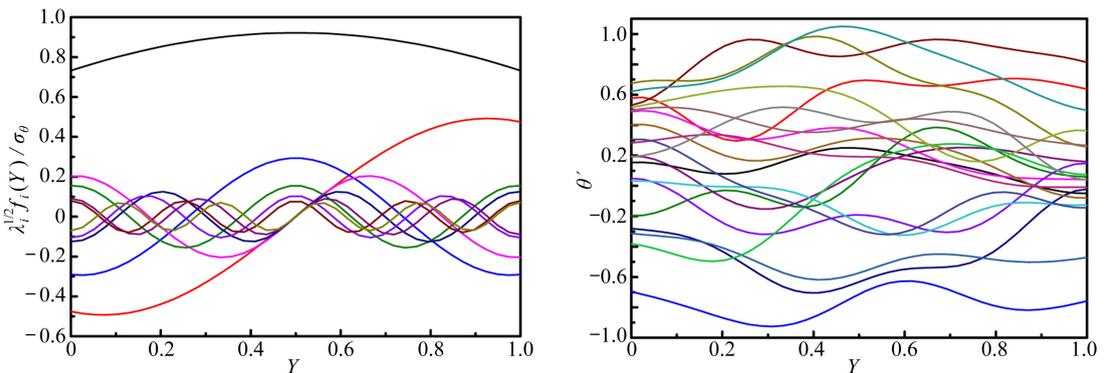
$$\lambda_i = \sigma_\theta^2 \frac{2L_c}{1 + (\omega_i L_c)^2}, \tag{12}$$

$$f_i(Y) = \begin{cases} \frac{\cos[\omega_i(Y - 1/2)]}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sin(\omega_i)}{2\omega_i}}}, & i = 2n; n = 1, 2, 3, \dots, \\ \frac{\sin[\omega_i(Y - 1/2)]}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin(\omega_i)}{2\omega_i}}}, & i = 2n - 1; n = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \tag{13}$$

式中 ω_i 为方程(14)的正根

$$\left[1 - L_c \omega \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] \left[L_c \omega + \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] = 0. \tag{14}$$

图 2 给出了冷壁面随机温度边界相关场的特征模式及随机场实现, 其中图 2(a) 为相关长度 $L_c = 1$ 时前 10 项特征值与特征向量, 图 2(b) 为 20 组冷壁面随机温度扰动 θ' 的随机场实现.



(a) 特征模式 (a) Eigenmodes (b) 随机实现 (b) Stochastic realizations

图 2 随机边界条件相关场特征模式及随机场实现

Fig. 2 Eigenmodes and realizations of the stochastic boundary condition correlation field

3 Monte-Carlo 随机有限元方法的实现及验证

3.1 Monte-Carlo 随机有限元方法的实现

Monte-Carlo 方法是从同一母体中抽取简单子体来做抽样实验的方法.简单子体是具有相同分布的独立随机变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 由 Wiener-Khinchin (辛钦) 大数定理与 Bernoulli (伯努利) 大数定理可知, 当样本数量足够大时, 抽出子体的平均值收敛于数学期望, 事件出现频率收敛于事件概率.图 3 给出基于 Monte-Carlo 随机有限元方法的随机温度边界条件下方腔内流体自然对流数值计算程序运行流程图, 并根据程序运行流程图编制了相应的 MATLAB 程序代码.程序运行流程图基本步骤如下:

1) 应用 Karhunen-Loeve 展开对已知协方差函数的冷壁面随机温度边界条件输入场进行展开, 采用 Latin 抽样法生成 0 均值单位方差的正交 Gauss 随机变量 ξ_i , 然后生成冷壁面随机温度边界条件输入场样本.

2) 将每个冷壁面随机温度边界条件输入场样本代入确定性自然对流数值计算程序开展求解, 得到每个样本下的随机输出场.

3) 统计所有样本所对应的随机输出场 A (速度场、温度场、压力场及 Nu 数等) 的平均值矩阵与方差矩阵, 评估输出场的统计特性并进行不确定性分析.

平均值(期望)矩阵

$$E(A) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M A_i; \quad (15)$$

标准偏差矩阵

$$D(A) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M [A_i - E(A)]^2}, \quad (16)$$

其中, M 为样本数目, 本研究中取 5 000 个样本数目, A_i 为第 i 个随机温度输入场样本所对应的随机输出场.

3.2 Monte-Carlo 随机有限元方法正确性验证

Monte-Carlo 方法是求解随机偏微分方程及其他随机问题的经典方法, 其应用范围几乎没有限制, 目前国内外关于不确定性数值求解的文献普遍将该方法用于验证其他方法(如概率配点法、随机区间有限体积法等)算法正确性与结果准确性的基准.本文应用 Monte-Carlo 方法开展随机边界条件下方腔内流体自然对流不确定性研究, 可能产生误差的主要因素包括以下 3 个方面:

1) 确定性条件下方腔内流体自然对流的数值计算引起的误差.本文平均 Nu 数计算结果与基准值 1.118^[4] 完全吻合, 这表明本文确定性条件下方腔内流体自然对流的数值计算结果正确.

2) 随机边界条件 Karhunen-Loeve 展开引起的误差.本文随机边界条件 Karhunen-Loeve 展开采用解析方法获得, 因此所产生误差主要为截断误差.文献[23]表明随机边界条件截断项数超过 15 项时截断误差几乎可以忽略, 而本文截断项数取 100 项, 随机边界条件 Karhunen-Loeve 展开引起的误差很小, 可以不予考虑.

3) 随机边界条件样本数引起的误差.如图 4 所示, 随机边界条件样本数较少时, 计算结果(温度与速度最大标准偏差)出现较大震荡.当样本数达到 2 000 时, 最大标准偏差波动基本趋于平稳, 标准偏差不再随样本数增加而改变, 本文选取 5 000 个样本数, 可以获得计算结果的稳定解.

综上所述, Monte-Carlo 方法应用于随机边界条件下方腔内自然对流不确定性研究可行, 其结果是正确的。

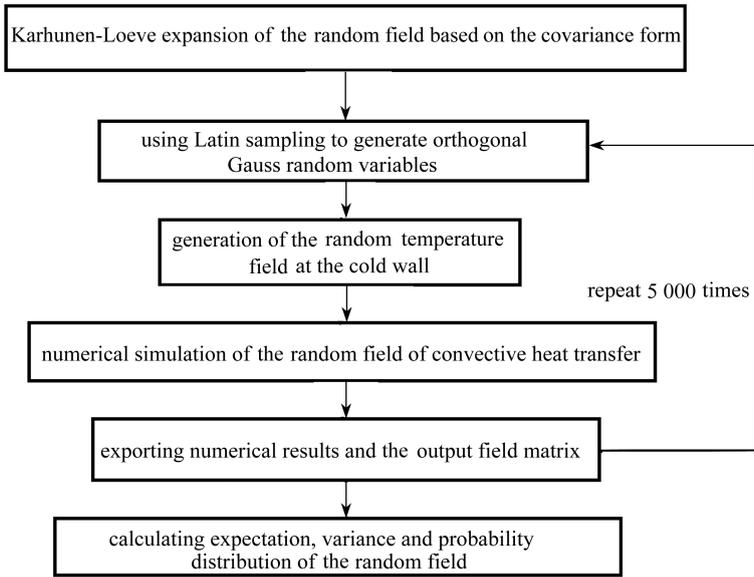


图3 程序运行流程图
Fig. 3 The flow chart of simulation

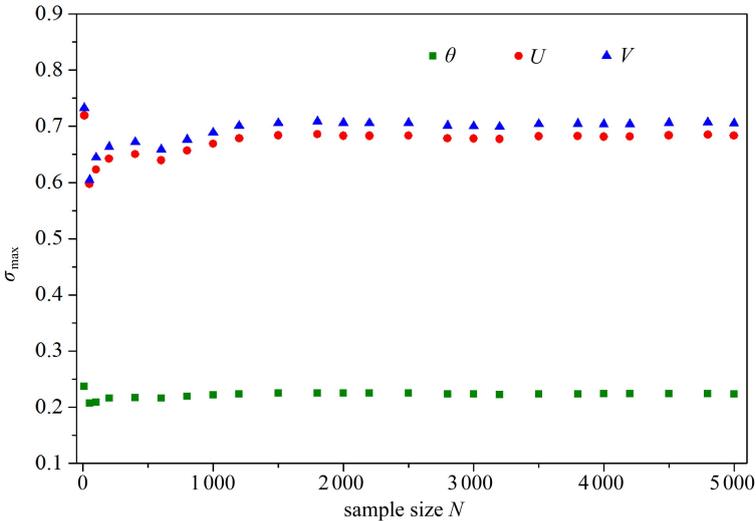


图4 随机边界条件样本数对温度与速度标准偏差的影响
Fig. 4 The maximum standard deviation of temperature, U -velocity, and V -velocity over the computational domain plotted vs. the sample size

4 数值算例分析

图5、图6分别给出了 $L_c = 1, \sigma_\theta = 0.25$ 时随机输出场平均值和确定性输出场分布, 随机输出场平均值与确定性输出场分布规律基本相同。图7给出了随机输出场平均值与确定性输出场偏差, 由图可知, 随机输出场平均值与确定性输出场存在着一定程度的偏差。速度场 U 偏差

较大区域主要集中于方腔中上部与中下部区域,速度场 V 偏差较大区域主要集中于方腔中部偏左部与中部偏右区域,与速度漩涡位置一致.这主要是由于壁面的黏滞效应,使得靠近壁面处速度较小,而方腔中部流体流动速度较快,冷壁面随机温度分布对方腔中部速度场产生较大的影响.温度场偏差较大区域主要集中于方腔右上角与左下角区域.而压力场偏差较大区域集中于方腔左上角与右下角区域.

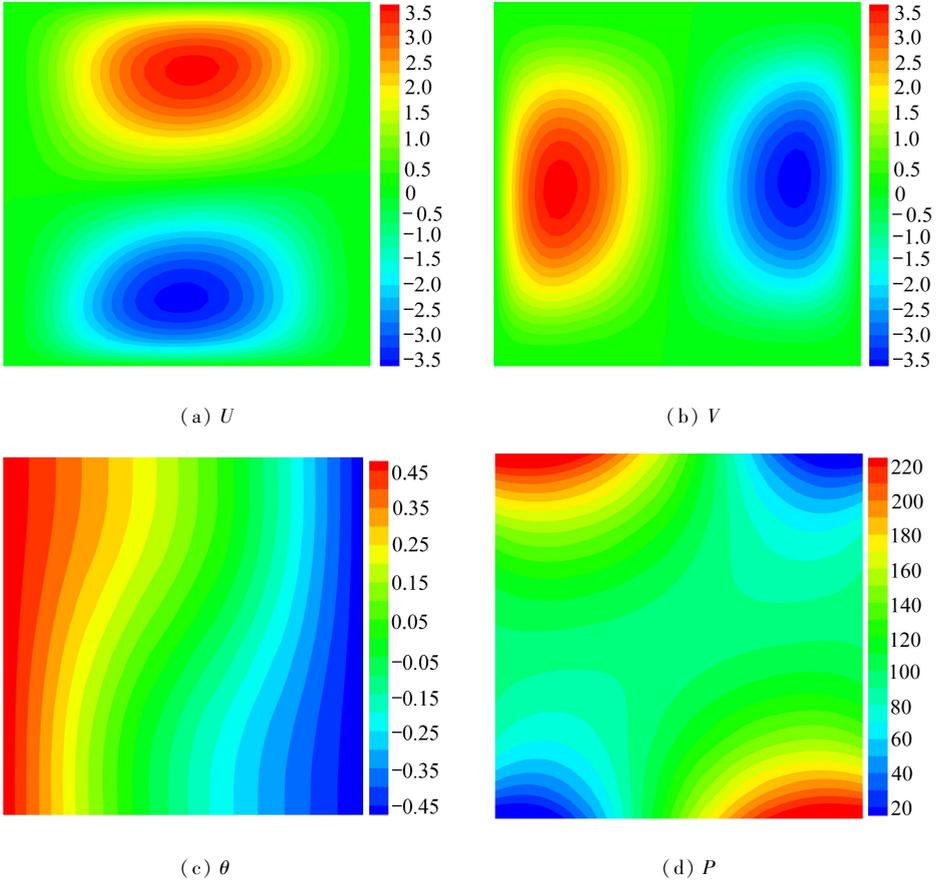
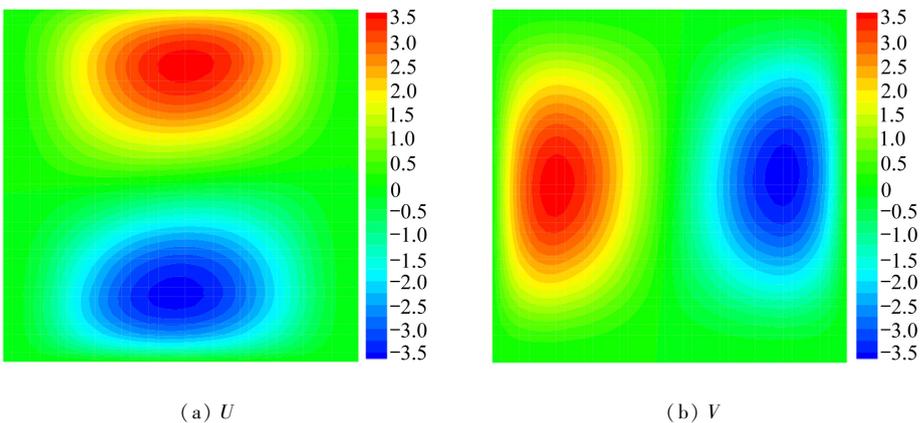


图5 随机输出场平均值 ($L_c = 1, \sigma_\theta = 0.25$)

Fig. 5 Mean values of the stochastic output field ($L_c = 1, \sigma_\theta = 0.25$)



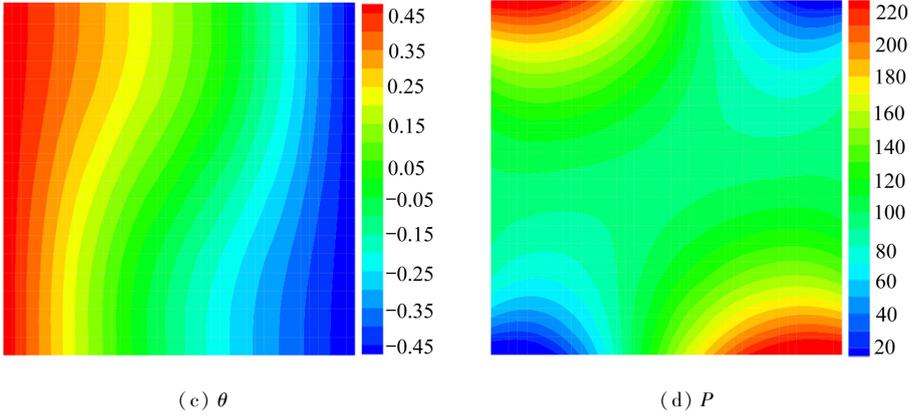


图6 确定性输出场

Fig. 6 The deterministic output field

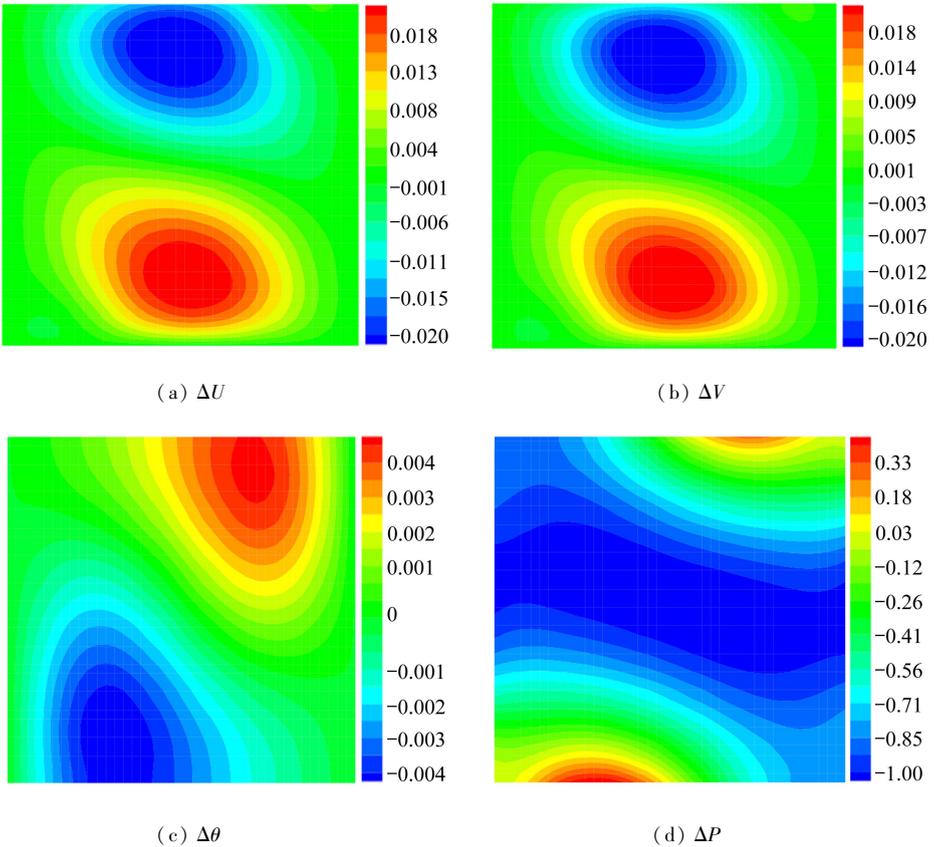


图7 平均值与确定值偏差 ($L_c = 1, \sigma_\theta = 0.25$)

Fig. 7 Differences between means and deterministic solutions ($L_c = 1, \sigma_\theta = 0.25$)

图8给出了随机场输出标准偏差.从图中可以看出,水平方向分速度标准偏差极大值位于方腔中上和中下部,而垂直方向分速度标准偏差极大值位于方腔中部偏左和偏右区域,这是由于壁面的黏滞效应使得方腔靠近壁面处速度较小,从而速度偏差较小.而冷壁面存在温度不确定性造成温度标准偏差极大值出现在冷壁面处.

Nu 数反映了对流换热的强弱, $Ra = 10^3, Pr = 1$ 时确定性边界条件下方腔内流体自然壁面

Nu 数为 1.118. 表 1 为冷壁面随机温度边界相关长度与方差对壁面 Nu 数均值及其标准偏差的影响, 可以看出, 冷壁面温度边界不确定性使得 Nu 数均值增大, 也就是随机边界条件下方腔内自然对流换热能力高于确定性边界条件下的换热能力. 当方差 σ_θ 相同时, 随着相关长度 L_c 增大, Nu 数均值及其标准偏差 $\sigma(Nu)$ 增大; 当相关长度 L_c 相同时, Nu 数均值及其标准偏差 $\sigma(Nu)$ 也随着方差 σ_θ 增大而增大, 方差 σ_θ 对 Nu 数均值与标准偏差 $\sigma(Nu)$ 的影响大于相关长度 L_c 的影响.

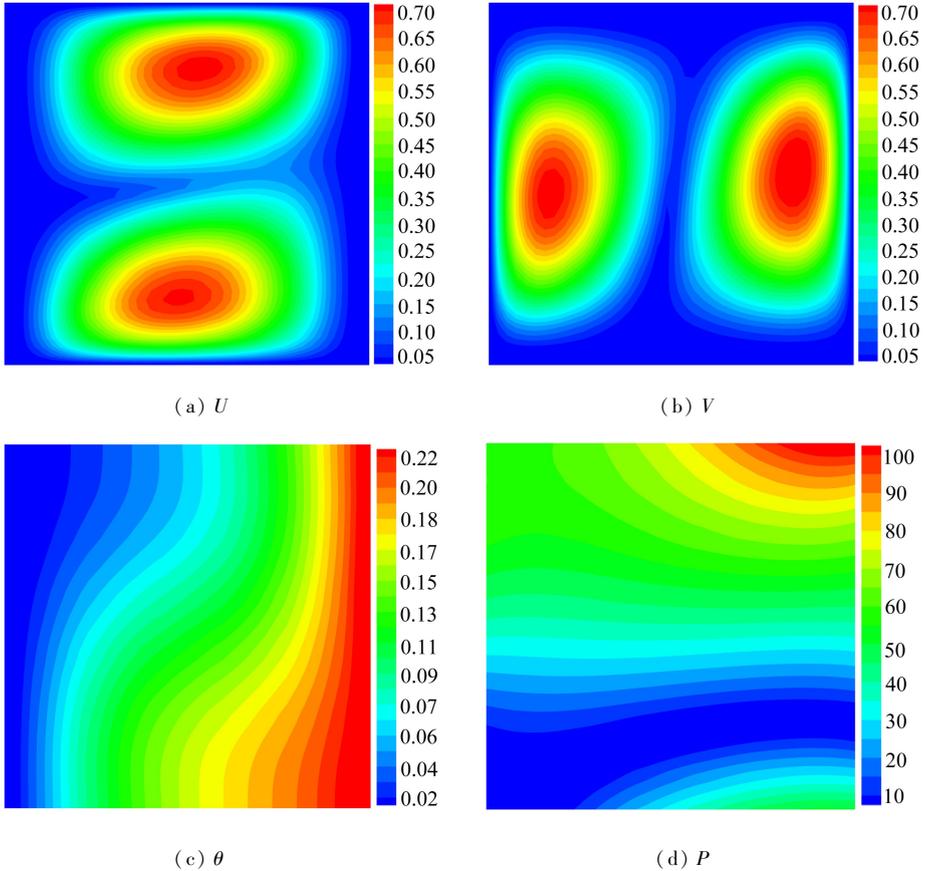


图 8 随机输出场标准偏差 ($L_c = 1, \sigma_\theta = 0.25$)

Fig. 8 Standard deviations of the stochastic output field ($L_c = 1, \sigma_\theta = 0.25$)

表 1 随机边界条件下的 Nu 数均值及其标准偏差

Table 1 Mean Nusselt numbers and standard deviations under stochastic boundary condition

L_c	σ_θ	\overline{Nu}	$\sigma(Nu)$
0.5	0.125	1.120	0.125
	0.25	1.127	0.251
	0.5	1.152	0.506
1	0.125	1.121	0.142
	0.25	1.129	0.284
	0.5	1.159	0.572
2	0.125	1.121	0.152
	0.25	1.130	0.305
	0.5	1.164	0.614

图 9 是相关长度 $L_c = 1$, 方差 σ_θ 分别为 0.125, 0.25, 0.50 时 Nu 数的概率分布, 图 10 是方差 $\sigma_\theta = 0.125$, 相关长度 L_c 分别为 0.5, 1.0, 2.0 时 Nu 数的概率分布. 由图 9~10 可知, Nu 数大体呈现正态分布且概率分布最大区域集中于确定性边界条件下所对应的 Nu 数 ($Nu = 1.118$), 方差 σ_θ 和相关长度 L_c 值越小, 即随机温度偏差越小, Nu 数越集中于 1.118, 同时方差 σ_θ 对 Nu 数分布的影响大于相关长度 L_c 的影响.

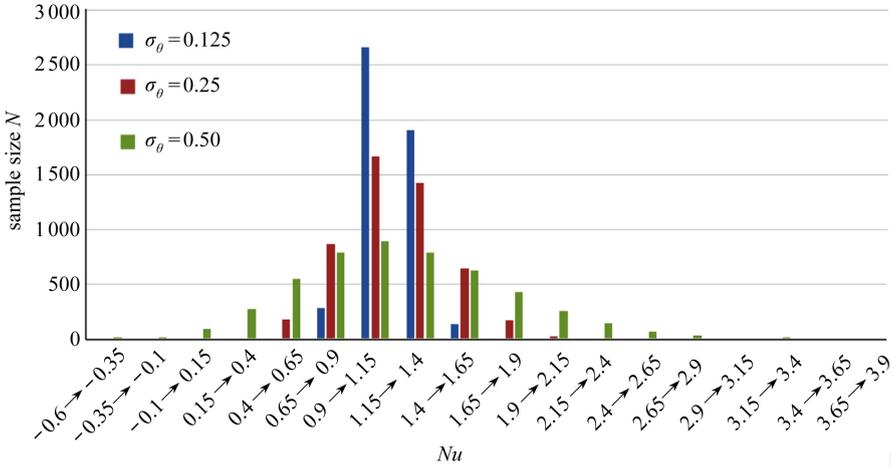


图 9 不同方差下 Nu 数概率分布 ($L_c = 1$)

Fig. 9 Probability distributions of the Nusselt number for different variances ($L_c = 1$)

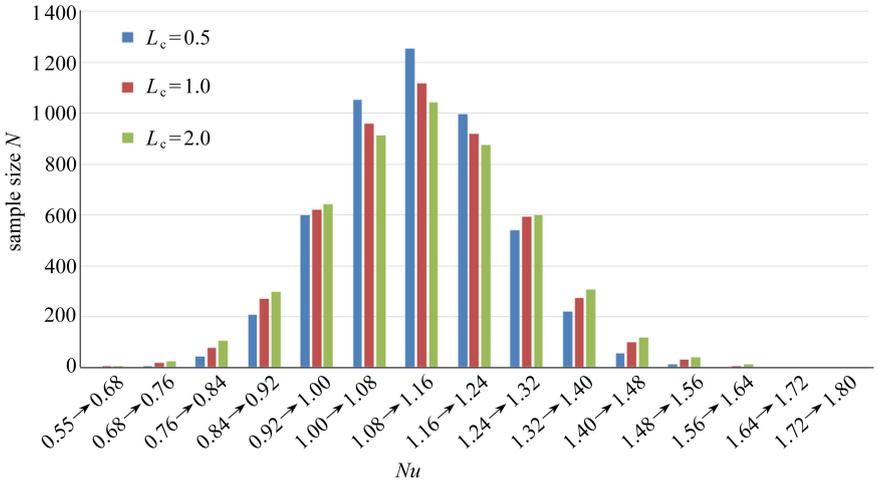


图 10 不同相关长度下 Nu 数概率分布 ($\sigma_\theta = 0.125$)

Fig. 10 Probability distributions of the Nusselt number for different correlation lengths ($\sigma_\theta = 0.125$)

5 结 论

建立了基于 Monte-Carlo 随机有限元方法的随机边界条件下自然对流换热不确定性研究方法, 分析了冷壁面随机温度边界不确定性对自然对流的影响, 得出主要结论:

1) 提出了基于 Karhunen-Loeve (KL) 展开及 Latin 抽样法生成随机温度边界随机样本的方法, 并与自然对流确定性控制方程相耦合, 发展出求解自然对流换热问题的 KL-Monte-Carlo 随

机有限元方法并编制了相应的程序代码。

2) 分析了随机温度边界相关长度 L_c 与方差 σ_θ 对自然对流换热不确定性的影响,发现平均随机输出与确定性输出分布规律基本相同,方差 σ_θ 对方腔内流体自然对流换热的影响大于相关长度 L_c 的影响。

参考文献(References):

- [1] 李贝贝, 严祯荣, 陈建, 等. 充满多孔介质的方腔内双扩散自然对流格子 Boltzmann 模拟[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(2): 184-194. (LI Bei-bei, YAN Zhen-rong, CHEN Jian, et al. Lattice Boltzmann simulation of double diffusive natural convection in a square enclosure filled with porous medium[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(2): 184-194. (in Chinese))
- [2] 杨征, 陈海生, 王亮, 等. 竖直圆柱形水箱保温过程热分层现象与机理研究[J]. 中国电机工程学报, 2015, **35**(6): 1420-1428. (YANG Zheng, CHEN Hai-sheng, WANG Liang, et al. Study on behavior and mechanism of thermal stratification of vertical cylindrical heat storage tank in insulation process[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2015, **35**(6): 1420-1428. (in Chinese))
- [3] Córdoba P A, Silin N, Dari E A. Natural convection in a cubical cavity filled with a fluid showing temperature-dependent viscosity[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2015, **98**: 255-265.
- [4] Yousaf M, Usman S. Natural convection heat transfer in a square cavity with sinusoidal roughness elements[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, **90**: 180-190.
- [5] Dubois F, Lin C A, Tekitek M M. Anisotropic thermal lattice Boltzmann simulation of 2D natural convection in a square cavity[J]. *Computers and Fluids*, 2016, **124**: 278-287.
- [6] 常春, 张强强, 李鑫. 周向非均匀热流边界条件下太阳能高温吸热管内湍流传热特性研究[J]. 中国电机工程学报, 2012, **32**(17): 104-109. (CHANG Chun, ZHANG Qiang-qiang, LI Xin. Turbulent heat transfer characteristics in solar thermal absorber tubes with circumferentially non-uniform heat flux boundary condition[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2012, **32**(17): 104-109. (in Chinese))
- [7] 刘智益, 王晓东, 康顺. 多元多项式混沌法在随机方腔流动模拟中的应用[J]. 工程热物理学报, 2012, **33**(3): 419-422. (LIU Zhi-yi, WANG Xiao-dong, KANG Shun. Application of multi-dimensional polynomial chaos on numerical simulations of stochastic cavity flow[J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2012, **33**(3): 419-422. (in Chinese))
- [8] ZHOU Guo-qing, WANG Tao, WANG Jian-zhou, et al. Stochastic analysis of uncertain temperature characteristics for expressway with wide subgrade in cold regions[J]. *Cold Regions Science and Technology*, 2015, **114**: 36-43.
- [9] Hosseini S M, Shahabian F. Transient analysis of thermo-elastic waves in thick hollow cylinders using a stochastic hybrid numerical method, considering Gaussian mechanical properties[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, **35**(10): 4697-4714.
- [10] 云永琥, 陈建军, 刘国梁, 等. 加权最小二乘无网格法的随机稳态温度场分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2015, **43**(11): 115-120. (YUN Yong-hu, CHEN Jian-jun, LIU Guo-liang, et al. Meshless weighted least square method for thermal analysis of stochastic steady-state temperature field[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2015, **43**(11): 115-120. (in Chinese))
- [11] 王涛, 周国庆. 考虑土性参数不确定性的单管冻结温度场分析[J]. 煤炭学报, 2014, **39**(6):

- 1063-1068.(WANG Tao, ZHOU Guo-qing. Analysis of temperature field around a single freezing pipe considering variability of soil parameters[J]. *Journal of China Coal Society*, 2014, **39**(6): 1063-1068.(in Chinese))
- [12] 王涛, 周国庆, 阴琪翔, 等. 考虑土性参数不确定性的多圈管冻结温度场分析[J]. 采矿与安全工程学报, 2016, **33**(2): 297-304.(WANG Tao, ZHOU Guo-qing, YIN Qi-xiang, et al. Analysis of temperature field for multi-circle-pipe freezing considering variability of soil parameters [J]. *Journal of Mining & Safety Engineering*, 2016, **33**(2): 297-304.(in Chinese))
- [13] 王涛, 周国庆. 瞬态随机温度场的 Neumann 展开 Monte-Carlo 解法[J]. 中国矿业大学学报, 2014, **43**(1): 43-48.(WANG Tao, ZHOU Guo-qing. Neumann expansion Monte-Carlo method for transient and stochastic temperature field[J]. *Journal of China University of Mining & Technology*, 2014, **43**(1): 43-48.(in Chinese))
- [14] 王涛, 周国庆. 基于 Monte-Carlo 法的立井井壁随机温度场分析[J]. 采矿与安全工程学报, 2014, **31**(4): 612-619.(WANG Tao, ZHOU Guo-qing. Random temperature field of shaft wall based on Monte-Carlo method[J]. *Journal of Mining & Safety Engineering*, 2014, **31**(4): 612-619.(in Chinese))
- [15] 孙红, 牛富俊, 陈哲, 等. 基于 Monte-Carlo 法的冻土路基随机温度场分析[J]. 上海交通大学学报, 2011, **45**(5): 738-748.(SUN Hong, NIU Fu-jun, CHEN Zhe, et al. Stochastic temperature field of frozen soil roadbed based on Monte-Carlo method[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2011, **45**(5): 738-748.(in Chinese))
- [16] ZHANG Qian, ZHANG Zhi-yue. Monte Carlo finite volume element methods for the convection-diffusion equation with a random diffusion coefficient[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, **2014**: 642470.
- [17] XIU Dong-bin, Karniadakis G E. A new stochastic approach to transient heat conduction modeling with uncertainty[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2003, **46**(24): 4681-4693.
- [18] WANG Chong, QIU Zhi-ping. Hybrid uncertain analysis for steady-state heat conduction with random and interval parameters[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, **80**: 319-328.
- [19] WANG Chong, QIU Zhi-ping, YANG Yao-wen, et al. Uncertainty propagation of heat conduction problem with multiple random inputs [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, **99**: 95-101.
- [20] WANG Chong, QIU Zhi-ping, HE Yan-yan. Fuzzy stochastic finite element method for the hybrid uncertain temperature field prediction [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, **91**: 512-519.
- [21] Ghanem R G, Spanos P D. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [22] Ghanem R. Probabilistic characterization of transport in heterogeneous porous media[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 1998, **158**(3/4): 199-220.
- [23] 史良胜, 蔡树英, 杨金忠. 三维地下水流随机分析的配点法[J]. 水利学报, 2010, **41**(1): 47-54.(SHI Liang-sheng, CAI Shu-ying, YANG Jin-zhong. The collocation method for stochastic analysis of three-dimensional groundwater flow[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2010, **41**(1): 47-54.(in Chinese))

Uncertainty Research of Natural Convection Heat Transfer Under Stochastic Boundary Condition Based on the Monte-Carlo Stochastic Finite Element Method

HE Yi-hai, JIANG Chang-wei, YAO Ming, ZHANG Bing-qing,
ZHU Yan-he, ZHANG Zhong-qing

(School of Energy and Power Engineering, Changsha University of Science and Technology,
Changsha 410114, P.R.China)

Abstract: In order to study the effects of stochastic boundary conditions on natural convection heat transfer in square cavities, a Monte-Carlo stochastic finite element method was developed to solve uncertainty propagation of natural convection heat transfer under stochastic boundary condition. The input random parameters were expanded through the Karhunen-Loeve expansion and the random samples of boundary condition were generated with the Latin sampling method. The flow field and temperature field in the square cavity for different random samples of boundary condition were calculated numerically. The mathematical expectations and variances of stochastic output fields were calculated with the sampling statistical method. The stochastic finite element program with the MATLAB language was coded to solve the uncertainty propagation of natural convection heat transfer in cavity under stochastic boundary condition based on the computational framework. The effects of the correlation length and the variance of stochastic boundary condition on natural convection uncertainty were analyzed. The results show that the mean temperature field and flow field are basically the same as the deterministic temperature field and flow field, respectively. The probability distribution of the Nusselt number under stochastic boundary condition is a normal distribution. The mean Nusselt number increases with the correlation length and the variance, the variance has a greater influence on natural convection heat transfer than the correlation length.

Key words: Monte-Carlo method; stochastic finite element; stochastic boundary condition; natural convection; uncertainty

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11572056)

引用本文/Cite this paper:

何贻海, 姜昌伟, 姚鸣, 张炳晴, 朱炎鹤, 张钟庆. 基于 Monte-Carlo 随机有限元方法的随机边界条件下自然对流换热不确定性研究[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(5): 581-593.

HE Yi-hai, JIANG Chang-wei, YAO Ming, ZHANG Bing-qing, ZHU Yan-he, ZHANG Zhong-qing. Uncertainty research of natural convection heat transfer under stochastic boundary condition based on the Monte-Carlo stochastic finite element method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(5): 581-593.