

软物质准晶广义流体动力学的一个应用 ——圆柱绕流的近似解*

范天佑

(北京理工大学 物理学院,北京 100081)

(我刊编委陈伟球推荐)

摘要: 文中报道了笔者建议的软物质准晶广义流体动力学的一个应用——软物质准晶圆柱绕流的近似解.人们熟知,在普通流体动力学中,二维圆柱绕流问题遇到很大的困难,Stokes 求解它,未能成功,这就是著名 Stokes 佯谬.为了克服这一困难,Oseen 分析了原因不在边界条件的提法,也不在 Stokes 的求解,问题出在 Navier-Stokes 方程,对方程进行了修改,得到了二维绕流问题的有物理意义的近似分析解.本文借助于 Oseen 的方法讨论 12 次对称软物质准晶广义流体动力学二维绕流问题.由于问题比普通流体动力学复杂得多,严格的求解,在目前的条件下是根本不可能的.笔者提出一种近似方法——交替程序去构造其零级近似解,并且把该结果用于软物质准晶的位错问题.

关键词: 软物质; 准晶; 广义流体动力学; Stokes-Oseen 流; 近似解; 位错

中图分类号: O35; O753+.3 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.370251

引言

范天佑^[1]建议了软物质准晶动力学模型并且得到它的方程组,这提供了求解该动力学初值-边值问题解的基础.由于问题的复杂性,一般只能用数值方法求解.这不排除针对少数特殊情形,用解析方法求近似解.近似分析解,尽管有其局限性,但对人们理解软物质准晶的变形与运动仍然具有一定的意义.本文讨论 12-次对称软物质准晶绕圆柱流动的近似解.我们知道 12-次对称准晶频繁地在液晶、聚合物、胶体和其他软物质中被观测到^[2-6],为迄今最重要的一类软物质准晶.其近似分析解和数值解,首先帮助验证了作者建议的软物质准晶动力学方程组的正确性和有效性,其次,它们还具有一定的应用价值.

1 12-次对称软物质准晶动力学方程组

正如前文介绍,12-次对称准晶在多种不同软物质中被频繁地发现,成了普适的一种软物质准晶,研究其变形与运动成了一个重要课题.为了研究其变形与运动,当务之急是发展软物质准晶广义流体动力学,或简单地,广义动力学.这种广义流体动力学,或广义动力学,基础是 Landau 的对称性破缺或元激发原理和群论分析^[1].与固体准晶不同,除了声子和相位子元激

* 收稿日期: 2016-08-14; 修订日期: 2016-09-29

基金项目: 国家自然科学基金(11272053)

作者简介: 范天佑(1939—),男,教授(E-mail: tyfan2013@163.com).

发之外,还应该考虑流体声子.因而其基本场变量为声子型位移场 $\mathbf{u} = iu_x + ju_y$, 相位子型位移场 $\mathbf{w} = iw_x + jw_y$ 和流体速度场 $\mathbf{V} = iV_x + jV_y$. 由于流体声子的引进,将不可避免地存在流体压力,流体压力与质量密度的关系,即状态方程或物态方程必不可少,这是软物质研究中的一个关键难题.范天佑^[1]初步解决了这一问题,使软物质准晶广义流体动力学或广义动力学方程组最终得以建立,具体形式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial t} + \frac{\partial(V_x \rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \rho V_x)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2(\rho V_x) + \\ \quad \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{V} + M \nabla^2 u_x + (L + M - B) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} - (A - B) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial t} + \frac{\partial(V_x \rho V_y)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y \rho V_y)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2(\rho V_y) + \\ \quad \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{V} + M \nabla^2 u_y + (L + M - B) \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} - (A - B) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = V_x + \Gamma_u \left[M \nabla^2 u_x + (L + M) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} \right], \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = V_y + \Gamma_u \left[M \nabla^2 u_y + (L + M) \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} \right], \\ \frac{\partial w_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_x + (K_2 + K_3) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial w_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_y + (K_2 + K_3) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right], \\ p = f(\rho) = 3 \frac{k_B T}{l^3 \rho_0^3} (\rho_0^2 \rho + \rho_0 \rho^2 + \rho^3), \end{array} \right. \quad (1)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$, $\mathbf{V} = iV_x + jV_y$, $\mathbf{u} = iu_x + ju_y$, 而 $L = C_{12}$, $M = (C_{11} - C_{12})/2$ 是声子弹性模量, K_1, K_2, K_3 为相位子的弹性模量, η 为流体声子动力黏性系数, ρ 为材料的质量密度.相应的本构方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ik} + R_{ijkl} w_{kl}, \\ H_{ij} = K_{ijkl} w_{ij} + R_{kl ij} \varepsilon_{kl}, \\ \sigma'_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta_{ijkl} \dot{\xi}_{kl}, \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ w_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}, \\ \dot{\xi}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right). \end{array} \right. \quad (2)$$

针对 12 次对称软物质准晶的具体情形,本构定律为^[7]

$$\begin{cases}
 \sigma_{xx} = L(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2M\varepsilon_{xx} + R(w_{xx} + w_{yy}), \\
 \sigma_{yy} = L(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + 2M\varepsilon_{yy} - R(w_{xx} + w_{yy}), \\
 \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2M\varepsilon_{xy} + R(w_{yx} - w_{xy}), \\
 H_{xx} = K_1 w_{xx} + K_2 w_{yy} + R(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \\
 H_{yy} = K_1 w_{yy} + K_2 w_{xx} + R(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \\
 H_{xy} = K_1 w_{xy} - K_2 w_{yx} - 2R\varepsilon_{xy}, \\
 H_{yx} = K_1 w_{yx} - K_2 w_{xy} + 2R\varepsilon_{xy}, \\
 \sigma'_{xx} = -p + 2\eta\dot{\xi}_{xx} + 2\eta(\dot{\xi}_{xx} + \dot{\xi}_{yy})/3, \\
 \sigma'_{yy} = -p + 2\eta\dot{\xi}_{yy} + 2\eta(\dot{\xi}_{xx} + \dot{\xi}_{yy})/3, \\
 \sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = 2\eta\dot{\xi}_{xy}.
 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases}
 \sigma'_{xx} = -p + 2\eta\dot{\xi}_{xx} + 2\eta(\dot{\xi}_{xx} + \dot{\xi}_{yy})/3, \\
 \sigma'_{yy} = -p + 2\eta\dot{\xi}_{yy} + 2\eta(\dot{\xi}_{xx} + \dot{\xi}_{yy})/3, \\
 \sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = 2\eta\dot{\xi}_{xy}.
 \end{cases} \quad (4)$$

因为12次对称准晶,声子-相位子不耦合,所以方程(2)中 $R_{ijkl} = 0$,这导致方程(3)中 $R = 0$, Γ_u 和 Γ_w 为声子与相位子耗散系数, A 和 B 代表由于质量密度变化引起的材料常数.方程得到的细节参考文献[1].

2 不可压缩定常(稳态)情形和 Oseen 修正

作为上述理论的一个应用,考虑软物质的二维 Stokes 流动.我们熟知,在经典粘性中,二维 Stokes 绕流解不存在,这是著名的 Stokes 佯谬^[8,9].为了克服这一困难,Oseen^[8]做了深刻分析.分析的结果,发现问题不在绕流边界条件的提法,也不在 Stokes 的解法,而是对二维绕流问题,Navier-Stokes 方程必须修改.修改之后,二维绕流问题得到有物理意义的近似解.现在假设方程(1)描写的软物质为不可压缩,同时只考虑定常情形.采用 Oseen 等^[8,9]修改 Navier-Stokes 方程的方法,本文对方程组(1)修改如下:

$$\begin{cases}
 \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \\
 \frac{\partial(U_x \rho U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(U_y \rho U_x)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2(\rho V_x) + \\
 \quad \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{V} + M \nabla^2 u_x + (L + M - B) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} - (A - B) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial x}, \\
 \frac{\partial(U_x \rho U_y)}{\partial x} + \frac{\partial(U_y \rho U_y)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2(\rho V_y) + \\
 \quad \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{V} + M \nabla^2 u_y + (L + M - B) \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} - (A - B) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial y}, \\
 U_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = V_x + \Gamma_u \left[M \nabla^2 u_x + (L + M) \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} \right], \\
 U_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = V_y + \Gamma_u \left[M \nabla^2 u_y + (L + M) \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} \right], \\
 U_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_x + (K_2 + K_3) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right], \\
 U_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_y + (K_2 + K_3) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right], \\
 \rho = g(p) = \text{const},
 \end{cases} \quad (5)$$

上式中 U_k 代表外加来流速度场, 方程(5)描写的是 12 次对称软物质准晶的广义 Stokes-Oseen 液体.

3 广义 Oseen 问题, 零阶近似解

假设平行 x 方向速度值为 U_∞ 的一个缓慢来流如图 1 所示, 在远处的压力 p_∞ 被忽略. 在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中流体的边界条件为

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty : \\ \quad V_r = U_\infty \cos \theta, \quad V_\theta = -U_\infty \sin \theta, \\ r = a : \\ \quad V_r = V_\theta = 0. \end{cases} \quad (6)$$

考虑到圆柱无限长, 来流不随 z 方向变化, 因而问题与 z 无关.

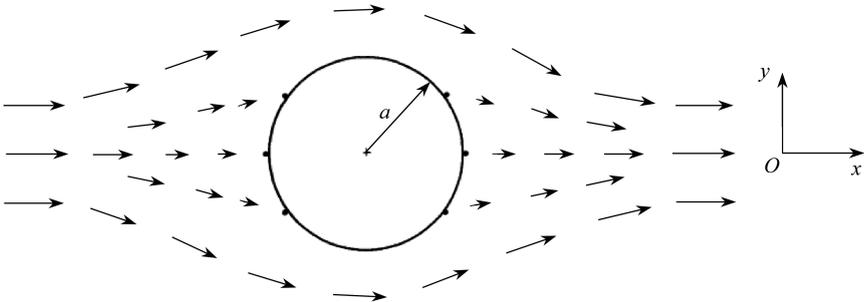


图 1 软物质准晶绕半径为 a 的圆柱流动

Fig. 1 A flow of soft-matter quasicrystals past a circular cylinder

求解这一边值问题的标准解法是分离变量法, 即令

$$\begin{cases} V_r = f(r)F(\theta), \quad V_\theta = g(r)G(\theta), \quad p = \eta h(r)H(\theta), \\ u_r = j(r)J(\theta), \quad u_\theta = k(r)K(\theta), \quad w_r = l(r)L(\theta), \quad w_\theta = m(r)M(\theta), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $f(r)$, $F(\theta)$, $g(r)$, $G(\theta)$, $h(r)$, $H(\theta)$, $j(r)$, $J(\theta)$, $k(r)$, $K(\theta)$, $l(r)$, $L(\theta)$, $m(r)$, $M(\theta)$ 为待定的未知函数. 同时场方程也能分离变量, 因而偏微分方程能够化成常微分方程求解. 虽然分离变量步骤取得顺利进展, 但是自变量为 r 的常微分方程不可能精确求解, 整个求精确解的努力功亏一篑. 不得已只好求近似解. 这里建议一种交替法.

第一步取经典 Oseen 解为现在方程(5)在边界条件(6)下的零级近似解(参看文献[8-10]):

$$\begin{cases} V_r^{(0)} = \frac{U_\infty \cos \theta}{1 - 2\ln(ka/2) - 2\gamma} \left(-1 + \frac{a^2}{r^2} + 2\ln \frac{r}{a} \right), \\ V_\theta^{(0)} = -\frac{U_\infty \sin \theta}{1 - 2\ln(ka/2) - 2\gamma} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} + 2\ln \frac{r}{a} \right), \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$2k = \rho U_\infty / \eta, \quad \gamma = 0.5772. \quad (9)$$

自然它不是精确解. 下面还需要进行交替计算.

4 软物质准晶声子响应

上面提到现阶段数学工具的困难,对软物质问题作精确分析的不可行,只得采取交替步骤.在求得流体运动的零级近似解(8)、(9)之后,可以考虑软物质准晶声子弹性响应.

由解(8)、(9)和方程(4)与(2)流体应力可以计算得到.然后按照边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} r = a: \\ \sigma_{rr} = \sigma'_{rr} = 0, \\ \sigma_{r\theta} = \sigma'_{r\theta} = \tau \sin \theta; \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty: \\ \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

可以求解声子应力,其中

$$\tau = \frac{2\eta U_\infty}{a \left(1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}ka\right) - 2\gamma \right)}. \quad (11)$$

计算的结果得到声子应力场的零阶近似解

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{2\eta U_\infty}{a \left(1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}ka\right) - 2\gamma \right)} \frac{3 + \kappa}{1 + \kappa} \left(-\frac{a}{r} + \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{2\eta U_\infty}{a \left(1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}ka\right) - 2\gamma \right)} \frac{1}{1 + \kappa} \left((\kappa - 1) \frac{a}{r} - (3 + \kappa) \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{2\eta U_\infty}{a \left(1 - 2\ln\left(\frac{1}{2}ka\right) - 2\gamma \right)} \frac{1}{2(1 + \kappa)} \left((\kappa - 1) \frac{a}{r} + (3 + \kappa) \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta, \end{array} \right. \quad (12)$$

其中 $\kappa = 3 - 4\nu$ 为平面应变情形; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 为平面应力情形; ν 代表材料的 Poisson 比.不过实际有意义的,只是平面应变情形,即圆柱为无限长.

联合解(8)与(12)得到软物质准晶绕流的流场和声子弹性场的零阶近似解答.相位子弹性场的求解将在下面讨论.

图 2~5 给出声子弹性场分布的若干数值结果.计算用到的数据为: $\rho = 1.5 \text{ kg/cm}^3$; $\eta = 0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$; $U_\infty = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} \text{ cm/s}$; $a = 0.1 \text{ cm}$; $\nu = 0.3, 0.35, 0.4$.

5 软物质准晶相位子响应的求解讨论

由于 12 次对称准晶相位子场-声子场不耦合,因而不可能通过解答(12)得到相位子场的任何结果,这是一个缺憾.但是由方程组(5)的第 6 与第 7 个方程可以发现相位子场-流体声子场耦合,这给了我们研究由于 12 次对称准晶相位子场对绕流的响应的难得机遇.方程组(5)的第 6 与第 7 个方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_x + (K_2 + K_3) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right], \\ U_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + U_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_y + (K_2 + K_3) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right]. \end{array} \right. \quad (13)$$

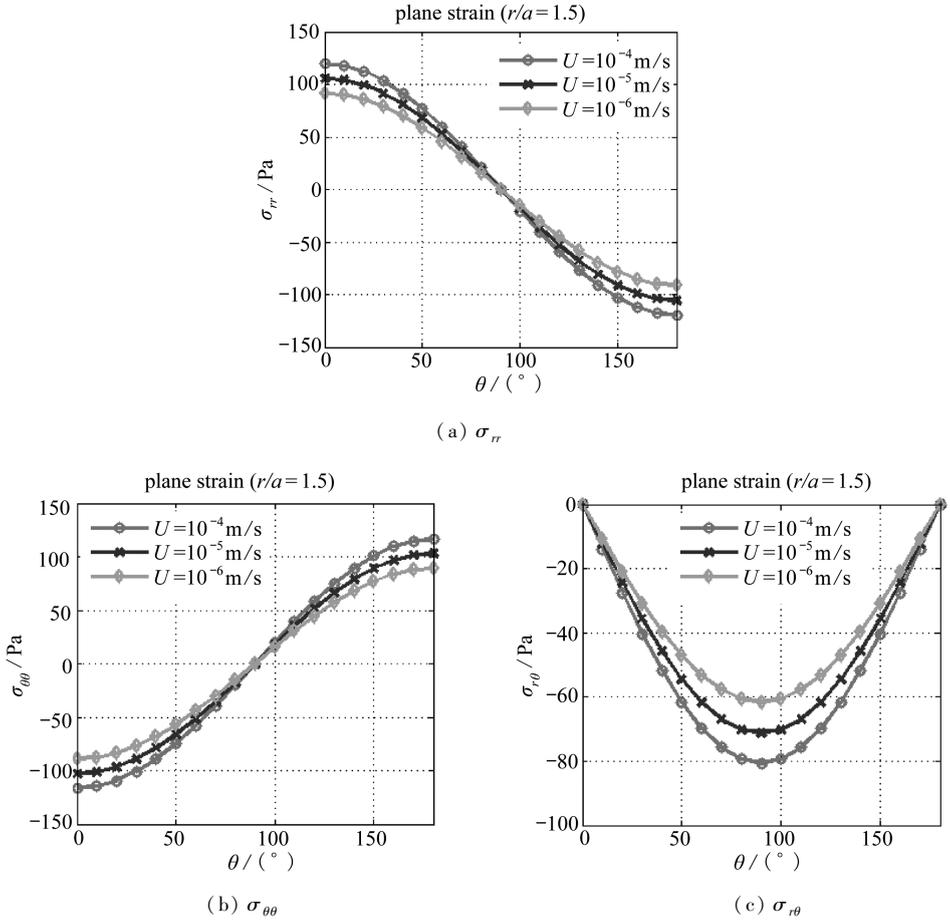


图2 声子应力随来流速度值的角分布(平面应变状态, $\nu = 0.3$)

Fig. 2 Angular variations of phonon stresses vs. incoming flow velocity U (plane strain case, $\nu = 0.3$)

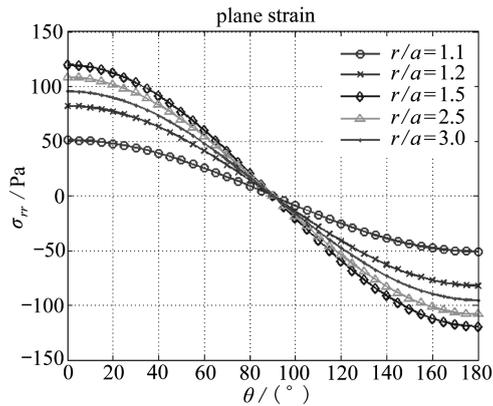


图3 声子法向正应力随测量距离(从圆柱中心量起的距离)的角分布(平面应变状态, $\nu = 0.3$, $U_\infty = 10^{-4}$ m/s)

Fig. 3 Angular variations of the radial normal phonon stress vs. the radial distance (plane strain case, $\nu = 0.3$, $U_\infty = 10^{-4}$ m/s)

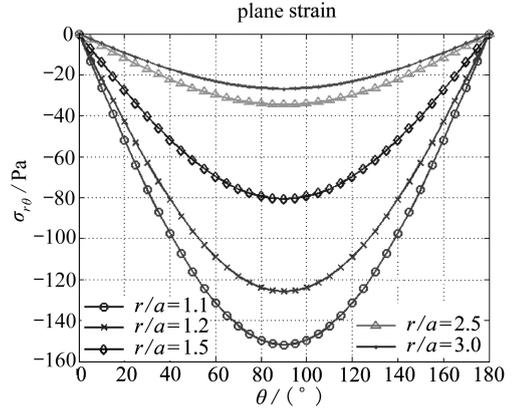
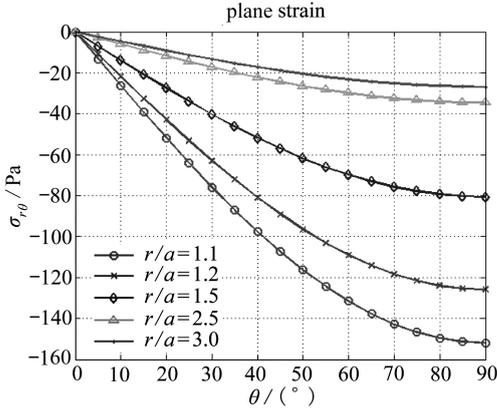


图 4 声子剪应力随测量距离(从圆柱中心量起的距离)的角分布
(平面应变状态, $\nu = 0.3$, $U_\infty = 10^{-4}$ m/s)

Fig. 4 Angular variations of the shear phonon stress vs. the radial distance
(plane strain case, $\nu = 0.3$, $U_\infty = 10^{-4}$ m/s)

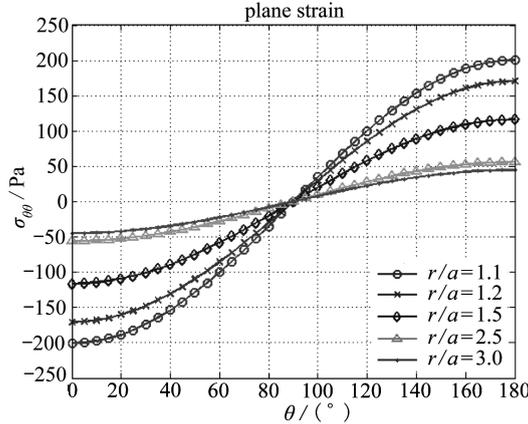


图 5 声子切向正应力随测量距离(从圆柱中心量起的距离)的角分布
(平面应变状态, $\nu = 0.3$, $U_\infty = 10^{-4}$ m/s)

Fig. 5 Angular variations of the tangent normal phonon stress vs. the radial distance
(plane strain case, $\nu = 0.3$, $U_\infty = 10^{-4}$ m/s)

按照 Oseen 修正和图 1 的边界条件, 式(13)化成

$$\begin{cases} U_\infty \frac{\partial w_x}{\partial x} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_x + (K_2 + K_3) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right], \\ U_\infty \frac{\partial w_y}{\partial x} = \Gamma_w \left[K_1 \nabla^2 w_y + (K_2 + K_3) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \right]. \end{cases} \quad (14)$$

因为 K_2, K_3 比 K_1 小得多, 忽略 K_2, K_3 后得到方程(14) 的零级近似解为

$$\begin{cases} w_x^{(0)}(x, y) = A \exp[-(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4C})x/2] \sin(\sqrt{C}y), & x > 0, \\ w_y^{(0)}(x, y) = B \exp[-(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4C})x/2] \cos(\sqrt{C}y), & x > 0, \\ w_x^{(0)}(x, y) = A \exp[(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4C})x/2] \sin(\sqrt{C}y), & x < 0, \\ w_y^{(0)}(x, y) = B \exp[(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4C})x/2] \cos(\sqrt{C}y), & x < 0, \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\alpha = \frac{U_\infty}{K_1 \Gamma_w}, \quad (16)$$

而 A, B, C 是待定的未知常数, 注意这里的与方程组(1) 中的 A, B 意义完全不同, 实际上, 在不可压缩条件下, 方程组(1) 中的材料常数 A, B 已经等于 0.

由方程组(2) 可容易地得到相位子应变分量

$$w_{xx} = \frac{\partial w_x}{\partial x}, \quad w_{yy} = \frac{\partial w_y}{\partial y}, \quad w_{xy} = \frac{\partial w_x}{\partial y}, \quad w_{yx} = \frac{\partial w_y}{\partial x}.$$

由本构定律可以得到应力分量 $H_{xx}, H_{yy}, H_{xy}, H_{yx}$, 进而得到圆柱坐标中的应力分量

$$\begin{cases} H_{rr} = \frac{H_{xx} + H_{yy}}{2} + \frac{H_{xx} - H_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \frac{H_{xy} + H_{yx}}{2} \sin(2\theta), \\ H_{\theta\theta} = \frac{H_{xx} + H_{yy}}{2} + \frac{H_{xx} - H_{yy}}{2} \cos(2\theta) - \frac{H_{xy} + H_{yx}}{2} \sin(2\theta), \\ H_{r\theta} = \frac{H_{yy} - H_{xx}}{2} \sin(2\theta) + H_{xy} \cos^2\theta - H_{yx} \sin^2\theta, \\ H_{\theta r} = \frac{H_{yy} - H_{xx}}{2} \sin(2\theta) - H_{xy} \sin^2\theta - H_{yx} \cos^2\theta. \end{cases} \quad (17)$$

根据边界条件

$$r = a: H_{rr} = H_{r\theta} = 0 \quad (18)$$

原则上可以确定上述常数, 然而应力分量(17) 是待定常数 A 和 B 的齐次函数, 边界条件(18) 也是齐次的, 这样常数 A 和 B 不可能由边界条件(18) 确定, 只有常数 C 可以间接得到(因为极其冗长和复杂, 因而没有意义). 这样相位子的响应, 实际上无法得到显式结果.

6 对软物质准晶位错问题的应用

软物质准晶位错和液晶位错一样, 只有零级近似解, 即不考虑流体效应的解, 例如 12 次对称准晶位错的声子场零级近似解^[11]

$$\begin{aligned} u_x^{(0)} &= \frac{b_1^\parallel}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} + \frac{L + M}{L + 2M} \frac{xy}{r^2} \right) + \frac{b_2^\parallel}{2\pi} \left(\frac{M}{L + 2M} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{L + M}{L + 2M} \frac{y^2}{r^2} \right), \\ u_y^{(0)} &= -\frac{b_1^\parallel}{2\pi} \left(\frac{M}{L + 2M} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{L + M}{L + 2M} \frac{x^2}{r^2} \right) + \frac{b_2^\parallel}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{L + M}{L + 2M} \frac{xy}{r^2} \right), \\ u_z &= 0, \end{aligned}$$

其中 $b_1^\parallel, b_2^\parallel$ 为声子 Burgers 矢量的分量. 位错的相位子场零级近似解

$$\begin{aligned} w_x^{(0)} &= \frac{b_1^\perp}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{(K_1 + K_2)(K_2 + K_3)}{2K_1(K_1 + K_2 + K_3)} \frac{xy}{r^2} \right) + \\ &\quad \frac{b_2^\perp}{4\pi} \left(-\frac{K_2(K_1 + K_2 + K_3) - K_1K_3}{K_1(K_1 + K_2 + K_3)} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{(K_1 + K_2)(K_2 + K_3)}{K_1(K_1 + K_2 + K_3)} \frac{y^2}{r^2} \right), \\ w_y^{(0)} &= \frac{b_1^\perp}{4\pi} \left(\frac{K_2(K_1 + K_2 + K_3) - K_1K_3}{K_1(K_1 + K_2 + K_3)} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{(K_1 + K_2)(K_2 + K_3)}{K_1(K_1 + K_2 + K_3)} \frac{x^2}{r^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\frac{b_2^\perp}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} + \frac{(K_1 + K_2)(K_2 + K_3)}{2K_1(K_1 + K_2 + K_3)} \frac{xy}{r^2} \right),$$

其中 b_1^\perp, b_2^\perp 为相位子 Burgers 矢量的分量.

根据前面的解可以得到流体修正如下^[11-12]:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= \frac{b_1^\parallel}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} + \frac{L + M}{L + 2M} \frac{xy}{r^2} \right) + \frac{b_2^\parallel}{2\pi} \left(\frac{M}{L + 2M} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{L + M}{L + 2M} \frac{y^2}{r^2} \right) + \\ &\quad \frac{Br_0}{2M} \left(\frac{\kappa}{1 + \kappa} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{3 + \kappa}{2(1 + \kappa)} \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos^2 \theta - \frac{Br_0}{2M} \left(-2 \ln \frac{r}{r_0} + \frac{3 + \kappa}{2(1 + \kappa)} \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin^2 \theta, \\ u_y^{(1)} &= -\frac{b_1^\parallel}{2\pi} \left(\frac{M}{L + 2M} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{L + M}{L + 2M} \frac{x^2}{r^2} \right) + \frac{b_2^\parallel}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{L + M}{L + 2M} \frac{xy}{r^2} \right) - \\ &\quad \frac{Br_0}{2M} \left(\frac{2\kappa}{1 + \kappa} \ln \frac{r}{r_0} + \frac{3 + \kappa}{2(1 + \kappa)} \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \cos \theta - \\ &\quad \frac{Br_0}{2M} \left(-2 \ln \frac{r}{r_0} + \frac{3 + \kappa}{2(1 + \kappa)} \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \cos \theta, \\ u_z &= 0, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\eta U_\infty}{r_0 \left(1 - 2 \ln \left(\frac{1}{2} k r_0 \right) - 2\gamma \right)}, \quad 2k = \frac{\rho U_\infty}{\eta}, \quad \gamma = 0.5772, \\ \kappa &= 3 - 4\nu, \quad \nu = \frac{L}{2(L + M)}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

由于相位子的响应未能完全确定,位错相位子解的修正也未能得到.不过流体修正很小.

7 结论与讨论

软物质准晶绕流问题,其数学求解困难极大,不仅现在没有精确的分析解,在可以预见的将来,也不可能得到精确分析解.即便其数值解,现在也没有,最快,也要半年到一年的时间才可能得到.在目前这种困难条件下,不得已采用近似分析解.这一近似解,满足了流体边界条件,也满足了声子弹性和相位子弹性的边界条件,部分地满足了控制方程组,这是它的近似性.为正在进行的数值求解提供了一个比较的依据.根据本小组其他的数值解^[13]的结果,软物质准晶流体应力与声子应力在数量级上相近,本文的结果与这一结果一致.以上事实表明本文的近似解具有一定的可靠性.现在数值解已经得到(即将发表),肯定了近似分析解在解的结构上仍然成立,但是也发现了其缺陷,因为经典 Oseen 解是一个不完全的解,其中流体压力未能确定,由它得到的应力仅仅是黏性应力部分,不含流体压力对速度和应力的贡献,所以近似分析解存在较大的局限性.这些问题,在即将发表的数值解中有详细讨论,但是数值解不可能得到分析表达式.

本文近似地,但是定量地揭示了软物质中的流效应,得到绕流问题的零级近似解后,讨论了可能的应用.现在给出的是第一次交替计算.下一次交替计算,也已经得到^[14],这里未介绍.由它去对位错解进行修正也是初步的.这个初步的近似修正只是对软物质准晶位错的讨论有一定参考价值,并不能检验广义流体动力学近似分析本身的精度如何.

参考文献(References):

- [1] 范天佑. 软物质准晶广义流体动力学方程组[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 331-344.(FAN Tian-you. Equation systems of generalized hydrodynamics for soft-matter quasicrystals[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 331-344.(in Chinese))
- [2] ZENG Xiang-bing, Ungar G, LIU Yong-song, et al. Supramolecular dendritic liquid quasicrystals[J]. *Nature*, 2004, **428**: 157-160.
- [3] Takano A, Kawashima W, Noro A, et al. A mesoscopic Archimedean tiling having a complexity in polymeric stars[J]. *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, 2005, **43**(18): 2427-2432.
- [4] Hayashida K, Dotera T, Takano A, et al. Polymeric quasicrystal: mesoscopic quasicrystalline tiling in ABC star polymers[J]. *Physical Review Letters*, 2007, **98**: 195502. doi: 10.1103/PhysRevLett.98.195502.
- [5] Talapin D V, Shevchenko E V, Bodnarchuk M I, et al. Quasicrystalline order in self-assembled binary nanoparticle superlattices[J]. *Nature*, 2009, **461**: 964-967.
- [6] Fischer S, Exner A, Zielske K, et al. Colloidal quasicrystals with 12-fold and 18-fold diffraction symmetry[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2011, **108**(5): 1810-1814.
- [7] FAN Tian-you. *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*[M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [8] Oseen C W. Über die Stokes' sche formel, und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik[J]. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1910, **6**(29).
- [9] Sleozkin N A. *Incompressible Viscous Fluid Dynamics*[M]. Chapter 7. Moscow: Gostehizdat Press, 1959.(in Russian).
- [10] Kochin N E, Kibel' I A, Rose N V. *Theoretical Fluid Mechanics*[M]. Vol 2. Moscow: Governing Press of Physics-Mathematics, 1963: 516-534.(in Russian)
- [11] FAN Tian-you. *Generalized Dynamics of Soft-Matter Quasicrystals—Mathematical Models and Solutions*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2017.
- [12] Li X F, Fan T Y. Dislocations in the second kind two-dimensional quasicrystals of soft matter [J]. *Physica B: Physics of Condensed Matter*, 2016, **502**: 175-180.
- [13] Cheng H, Fan T Y, Wei H. Characters of deformation and motion of soft-matter quasicrystals [J]. *Results in Physics*, 2016.
- [14] Fan T Y, Cheng H. The first approximation of solution of soft-matter quasicrystal past circular cylinder[Z]. 2017.

An Application of the Generalized Hydrodynamics for Soft-Matter Quasicrystals—Flow Past a Cylinder

FAN Tian-you

(School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P.R.China)

(Recommended by CHEN Wei-qiu, M. AMM Editorial Board)

Abstract: An application of the generalized hydrodynamics for soft-matter quasicrystals with 12-fold symmetry—flow past a cylinder, was demonstrated by means of an alternating procedure, and a zeroth-order approximate analytic solution was obtained, in which the classical Oseen solution was used. The flow velocity field and the phonon stress field were approximately determined, and the possible solution of the phason stress field was also discussed. At last a possible modification to dislocation of soft-matter quasicrystals due to the present solution was considered.

Key words: soft matter; quasicrystal; generalized hydrodynamics; Stokes-Oseen flow; approximate solution; dislocation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11272053)

引用本文/Cite this paper:

范天佑. 软物质准晶广义流体动力学的一个应用——圆柱绕流的近似解[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(3): 265-275.

FAN Tian-you. An application of the generalized hydrodynamics for soft-matter quasicrystals—flow past a cylinder[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(3): 265-275.