

# 含裂纹平面问题 Erdogan 基本解的显式表达\*

许 秩<sup>1</sup>, 范学明<sup>1,2</sup>

(1. 华南理工大学 土木与交通学院, 广州 510640;

2. 亚热带建筑科学国家重点实验室(华南理工大学), 广州 510640)

**摘要:** 基本解是边界元法、基本解法和无网格法等数值方法的重要理论基础。在断裂问题中,采用含裂纹的基本解可以避免将裂纹表面作为边界条件,从而大大简化问题的求解。在复变函数表示的含裂纹平面问题 Erdogan 基本解的基础上,对 Erdogan 基本解的使用条件进行了注解,修正了 Erdogan 基本解的一些错误,并推导出 Erdogan 基本解中位移函数解答的显式表达形式。编写了基于 Erdogan 基本解显式表达的样条虚边界元法(spline fictitious boundary element method, SFBEM)计算程序,计算了具有复合边界条件平面问题的位移、应力和应力强度因子。数值算例结果表明了该文提出的 Erdogan 基本解显式表达形式的正确性。

**关键词:** 断裂力学; Erdogan 基本解; 显式表达; 样条虚边界元法

**中图分类号:** O343.1

**文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.370253

## 引 言

断裂力学在结构、机械、岩土、抗震等工程领域已得到越来越广泛的应用<sup>[1-3]</sup>。工程结构或者机械构件带裂纹工作,都会一定程度上影响到结构的强度和刚度,考虑裂纹引起的断裂问题是相当重要的。但是,只有极少数断裂力学问题存在解析解答,绝大多数工程实际中所遇到的断裂力学问题都要借助数值分析的方法才能解决。目前常用的数值方法包括有限元法、边界配置法和边界元法等。传统有限元法计算断裂力学问题时,由于在裂纹尖端应力变化剧烈,所以需要网格进行细分,即使引入奇异单元<sup>[4-5]</sup>或者扩展单元<sup>[6-7]</sup>,其计算量也相当可观。边界配置法<sup>[6]</sup>对于具体问题要选用不同的应力函数,不具备通用性。边界元法仅需对边界进行网格划分并满足边界条件,且方法的应力解答和位移解答具有相同的求解精度,在断裂力学问题中被广泛使用。

目前运用边界元法求解断裂力学的方法可以分为两类。第一类是运用常规的不含裂纹的弹性力学基本解进行求解,把裂纹当作边界条件进行处理,常见的方法有对偶边界元法<sup>[8-9]</sup>,但是常规的裂纹边界单元无法直接应用,需要采用特殊的单元或者结合裂纹尖端附近的应力场和位移场通过外推算法求解应力强度因子。第二类是采用含裂纹问题的基本解,即 Erdogan 基

\* 收稿日期: 2016-08-16; 修订日期: 2017-05-11

**基金项目:** 国家自然科学基金(面上项目)(51378009);高等学校博士学科点专项科研基金新教师类课题(20110172120038);中央高校基本科研业务费(2015ZM116);国家级大学生创新创业训练计划项目(201610561171)

**作者简介:** 许秩(1992—),男,博士生(E-mail: stxuz@163.com);

范学明(1979—),男,讲师,博士(通讯作者。E-mail: fanxm@scut.edu.cn)。

本解<sup>[10]</sup>,对裂纹问题进行边界元列式,此时裂纹表面边界条件自动满足,裂纹表面无需作为应力边界处理,可以直接计算应力强度因子.但是由于 Erdogan 基本解采用形式相对复杂的复变函数表示,且其位移基本解存在积分式子表达,这给其应用带来不便,因此只有少量文献运用其求解简单应力边界条件的问题<sup>[11-13]</sup>.

本文基于 Erdogan 基本解的复变函数表示形式,运用三角函数进行等量代换,求解出了 Erdogan 基本解中位移基本解的显式表达形式,避免了对复变函数进行数值积分所带来的精度和效率的降低.从而完善了 Erdogan 基本解,提出了其应力和位移基本解的整套表达形式,拓宽了其应用领域.最后通过与样条虚边界元法结合,求解不同边界条件下含裂纹问题的应力、位移和应力强度因子,验证了本文提出的显式表达式的正确性.

## 1 Erdogan 基本解

在无限大含裂纹平面内任意点  $(z_0 = x_0 + iy_0)$  处分别沿  $x$  轴和  $y$  轴方向作用一对集中力  $Q$  和  $P$ ,如图 1 所示.

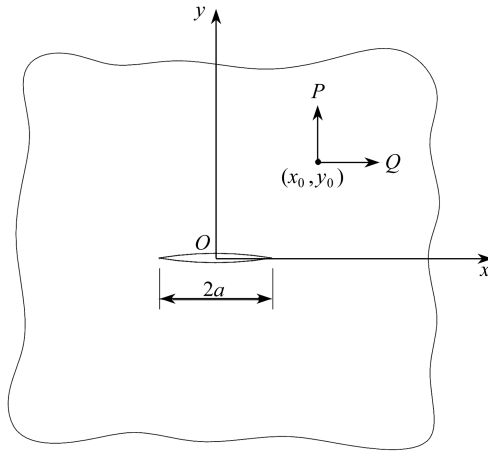


图 1 无限大含裂纹平面

Fig. 1 An infinite plane with a crack

Erdogan 在文献[10]中给出了该问题的复变函数解答.在任意点处  $(z = x + iy)$  的应力、位移以及裂纹右端应力强度因子分别为

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 2[\phi(z) + \overline{\phi(z)}], \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[(\bar{z} - z)\phi'(z) - \phi(z) + \overline{\Omega(z)}], \end{cases} \quad (1)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa \int_0^z \phi(z) dz - \int_0^{\bar{z}} \Omega(\bar{z}) d\bar{z} + (\bar{z} - z) \overline{\phi(z)}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} K = K_I - iK_{II} &= 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} [(\sqrt{z-a})\phi(z)] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \frac{1}{(1+\kappa)} \left\{ (Q + iP) \left[ \left( \frac{a+z_0}{\sqrt{z_0^2-a^2}} - 1 \right) - \kappa \left( \frac{a+\bar{z}_0}{\sqrt{z_0^2-a^2}} - 1 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{a(Q-iP)(\bar{z}_0-z_0)}{(\bar{z}_0-a)\sqrt{z_0^2-a^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \phi(z) = -\frac{S}{z-z_0} + \phi_0(z), \\
 \Omega(z) = \frac{\kappa S}{z-\bar{z}_0} + \frac{\bar{S}(\bar{z}_0-z_0)}{(z-\bar{z}_0)^2} + \phi_0(z), \\
 \phi_0(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2-a^2}} \left\{ \frac{S}{z-z_0} [I(z) - I(z_0)] - \frac{\kappa S}{z-\bar{z}_0} [I(z) - I(\bar{z}_0)] - \right. \\
 \quad \left. \bar{S}(\bar{z}_0-z_0) \left[ \frac{I(z) - I(\bar{z}_0)}{(z-\bar{z}_0)^2} - \frac{J(\bar{z}_0)}{z-\bar{z}_0} \right] \right\}, \\
 I(z) = \pi(\sqrt{z^2-a^2} - z), \\
 J(z) = \pi \left( \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} - 1 \right), \\
 S = \frac{Q + iP}{2\pi(1+\kappa)}, \\
 \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{(plane strain problem),} \\ 3-\nu & \text{(plane stress problem),} \\ 1+\nu & \end{cases}
 \end{array} \right. \quad (4)$$

其中  $a$  为半裂纹宽度,  $\nu$  为材料的 Poisson(泊松)比. 如果式(4)中的点  $z$  落在裂纹表面, 即  $z = x_a$  ( $-a \leq x_a \leq a$ ) 时, 那么式中的  $I(z)$  和  $J(z)$  在裂纹上下表面的定义有所区别, 分别为

$$\left\{ \begin{array}{l}
 I(x_a) = \begin{cases} \pi[\sqrt{x_a^2-a^2} - z] & \text{(for the upper crack surface),} \\ \pi[-\sqrt{x_a^2-a^2} - z] & \text{(for the lower crack surface),} \end{cases} \\
 J(x_a) = \begin{cases} \pi \left[ \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2-a^2}} - 1 \right] & \text{(for the upper crack surface),} \\ \pi \left[ -\frac{x_a}{\sqrt{x_a^2-a^2}} - 1 \right] & \text{(for the lower crack surface).} \end{cases}
 \end{array} \right. \quad (5)$$

值得注意的是, 式(4)中的开平方根部分  $\sqrt{z^2-a^2}$  是一个双值函数, 但是文献[10]中并未对其取值进行说明. 根据文献[12]的研究结果, 当  $z$  分布在第一象限、第四象限、 $y$  轴正半轴和  $x$  轴正半轴(不含裂纹)时,  $\sqrt{z^2-a^2}$  的取值为

$$\sqrt{z^2-a^2} = \sqrt{r} e^{i(\theta/2)}; \quad (6)$$

当  $z$  分布在第二象限、第三象限、 $y$  轴负半轴和  $x$  轴负半轴(不含裂纹)时,  $\sqrt{z^2-a^2}$  的取值为

$$\sqrt{z^2-a^2} = \sqrt{r} e^{i(\theta/2+\pi)}, \quad (7)$$

式中  $r$  和  $\theta$  分别为  $(z^2-a^2)$  的模和辐角.

从式(2)可以看出, Erdogan 基本解中位移函数是以应力函数积分形式表示出来的, 并没有给出位移函数具体表达式, 这给其应用带来了不便. 在笔者能查找到的文献<sup>[11-13]</sup>中, 基于 Erdogan 基本解的边界元法只能求解简单应力边界条件的问题, 并且只能给出其应力和应力强度因子的结果. 总之, 位移函数以积分形式表示, 无法显式表达, 极大地限制了 Erdogan 基本解的应用范围, 因此有必要给出 Erdogan 基本解中位移函数的显示表达式.

## 2 Erdogan 基本解中位移函数的显式表达

Erdogan 给出的基本解的位移函数中,应力函数为积分上下限是 0 和  $z$  的定积分,在弹性力学复变理论<sup>[14]</sup>中,此积分为不定积分;文献[15]在引用复变函数表示基本解时,也是用不定积分表示的.而且从物理概念的角度来看,如果此解是 Erdogan 给出的定积分形式,则当场点  $z = 0$  时,其位移函数值为 0,即无论源点作用点在何处,场点  $z = 0$  处的位移为 0,这不符合基本解的物理特性.因此,位移函数的正确表达形式为

$$2\mu(u + iv) = \kappa \int \phi(z) dz - \int \Omega(\bar{z}) d\bar{z} + (\bar{z} - z) \overline{\phi(z)}. \quad (8)$$

将式(4)代入到式(8)得

$$\begin{aligned} 2\mu(u + iv) &= \kappa \int \left( -\frac{S}{z - z_0} + \phi_0(z) \right) dz - \int \left( \frac{\kappa S}{\bar{z} - \bar{z}_0} + \frac{\bar{S}(\bar{z}_0 - z_0)}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^2} + \phi_0(\bar{z}) \right) d\bar{z} + \\ &(\bar{z} - z) \overline{\left( -\frac{S}{z - z_0} + \phi_0(z) \right)} = \\ &- \kappa S \ln[(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)] + \frac{\bar{S}(\bar{z}_0 - z_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} + (\bar{z} - z) \overline{\left( -\frac{S}{z - z_0} + \phi_0(z) \right)} + \\ &\kappa \int \phi_0(z) dz - \int \phi_0(\bar{z}) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\int \phi_0(z) dz$  和  $\int \phi_0(\bar{z}) d\bar{z}$  的计算存在难度,本节将重点进行这一部分不定积分的推导.在求解不定积分时,积分常数只引起刚体位移,而不产生应力,对应力和位移基本解的最终表示形式没有影响,固在求解式(9)和下文的积分时略去.

将式(4)中  $I(z)$  和  $J(z)$  的表达式代入到  $\phi_0(z)$  的具体表达式,化简得

$$\begin{aligned} \phi_0(z) &= \frac{S}{2} \left[ \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z_0^2 - a^2}}{(z - z_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] - \\ &\frac{\kappa S}{2} \left[ \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}}{(z - \bar{z}_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right] - \\ &\frac{\bar{S}(\bar{z}_0 - z_0)}{2} \left[ \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2} + \frac{a^2 - z\bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2 \sqrt{(z^2 - a^2)(\bar{z}_0^2 - a^2)}} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

所以

$$\begin{aligned} \int \phi_0(z) dz &= \frac{S}{2} \int \left( \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z_0^2 - a^2}}{(z - z_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) dz - \\ &\frac{\kappa S}{2} \int \left( \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}}{(z - \bar{z}_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) dz - \\ &\frac{\bar{S}(\bar{z}_0 - z_0)}{2} \int \left( \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2} + \frac{a^2 - z\bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2 \sqrt{(z^2 - a^2)(\bar{z}_0^2 - a^2)}} \right) dz, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\int \left( \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z_0^2 - a^2}}{(z - z_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) dz$  和  $\int \frac{a^2 - z\bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2 \sqrt{(z^2 - a^2)(\bar{z}_0^2 - a^2)}} dz$  的计算比较复杂, 需要分别进行处理.

令式  $\int \left( \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z_0^2 - a^2}}{(z - z_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) dz$  中  $z = \frac{a}{\cos \theta}$  和  $z_0 = \frac{a}{\cos \theta_0}$ , 其中  $\theta$  为变量,  $\theta_0$  为

已知量, 得

$$\int \left( \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z_0^2 - a^2}}{(z - z_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) dz = \int \left( \frac{a(\tan \theta - \tan \theta_0)}{a \tan \theta (a/\cos \theta - a/\cos \theta_0)} - \frac{1}{a \tan \theta} \right) d\left(\frac{a}{\cos \theta}\right), \quad (12)$$

等式右边为

$$\int \left( \frac{a(\tan \theta - \tan \theta_0)}{a \tan \theta (a/\cos \theta - a/\cos \theta_0)} - \frac{1}{a \tan \theta} \right) d\left(\frac{a}{\cos \theta}\right) = \int \frac{1}{\frac{a}{\cos \theta} - \frac{a}{\cos \theta_0}} d\left(\frac{a}{\cos \theta}\right) - \int \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta - \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta. \quad (13)$$

式(13)中3部分的结果分别为

$$\int \frac{1}{\frac{a}{\cos \theta} - \frac{a}{\cos \theta_0}} d\left(\frac{a}{\cos \theta}\right) = \ln \left( \frac{a}{\cos \theta} - \frac{a}{\cos \theta_0} \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta &= \int \frac{-\sin \theta_0 + \sin \theta - \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \\ &= \int \left( \frac{\sin \theta - \sin \theta_0}{\cos \theta - \cos \theta_0} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} \right) d\theta = \\ &= \int \frac{2\sin \left( \frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta + \theta_0}{2} \right)}{-2\sin \left( \frac{\theta - \theta_0}{2} \right) \sin \left( \frac{\theta + \theta_0}{2} \right)} d\theta + \int \frac{1}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\cos \theta = \\ &= \int \frac{2\sin \left( \frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta + \theta_0}{2} \right)}{-\sin^2 \left( \frac{\theta + \theta_0}{2} \right)} d\theta + \ln(\cos \theta - \cos \theta_0) = \\ &= \int \frac{-\sin(\theta + \theta_0)}{1 - \cos(\theta + \theta_0)} d\theta + \ln(\cos \theta - \cos \theta_0) = \\ &= \ln \left( \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{1 - \cos(\theta + \theta_0)} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} d\theta = \int \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} d\theta =$$

$$\int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta + \int \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} d\theta = \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right). \quad (16)$$

联立式(12)~(16)得

$$\int \left( \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z_0^2 - a^2}}{(z - z_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) dz = \ln [ (\sqrt{z^2 - a^2} \sqrt{z_0^2 - a^2} + z \cdot z_0 - a^2) / (\sqrt{z^2 - a^2} + z) ]. \quad (17)$$

同理

$$\int \frac{\sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2}}{(z - \bar{z}_0) \sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} dz = \ln [ (\sqrt{z^2 - a^2} \sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2} + z \cdot \bar{z}_0 - a^2) / (\sqrt{z^2 - a^2} + z) ]. \quad (18)$$

式(11)中

$$\frac{a^2 - z\bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2 \sqrt{(z^2 - a^2)(\bar{z}_0^2 - a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}} \frac{a^2 - z^2 + z^2 - z\bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2 \sqrt{(z^2 - a^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}} \frac{z(z - \bar{z}_0)}{\sqrt{(z^2 - a^2)} - \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}} - \frac{1}{\sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}} \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2}, \quad (19)$$

利用除法求导公式的逆变换,得式(19)的积分为

$$\frac{1}{\sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}} \int \frac{z(z - \bar{z}_0)}{\sqrt{(z^2 - a^2)} - \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}} - \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2} dz = \frac{\sqrt{(z^2 - a^2)}}{(z - \bar{z}_0) \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}}. \quad (20)$$

综合式(11)、(17)、(18)和(20)的计算结果,得

$$\int \phi_0(z) dz = \frac{S}{2} \ln [ (\sqrt{z^2 - a^2} \sqrt{z_0^2 - a^2} + z z_0 - a^2) / (\sqrt{z^2 - a^2} + z) ] - \frac{\kappa S}{2} \ln [ (\sqrt{z^2 - a^2} \sqrt{\bar{z}_0^2 - a^2} + z \bar{z}_0 - a^2) / (\sqrt{z^2 - a^2} + z) ] - \frac{\bar{S}(\bar{z}_0 - z_0)}{2} \left[ \frac{\sqrt{(z^2 - a^2)} - \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}}{(z - \bar{z}_0) \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}} \right]. \quad (21)$$

显然当  $a = 0$  时,  $\int \phi_0(z) dz$  为与场点  $z$  取值无关的函数,即当裂纹长度为 0(没有裂纹)时,此基本解退化为弹性力学问题的 Kelvin 基本解<sup>[16]</sup>.将式(21)重新回代到位移函数(9)中,得

$$2\mu(u + iv) = -\kappa S \ln [ (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) ] + \frac{\bar{S}(\bar{z}_0 - z_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} + (\bar{z} - z) \left( -\frac{S}{z - z_0} + \phi_0(z) \right) + \kappa M(z, z_0) - M(\bar{z}, z_0), \quad (22)$$

式中

$$\begin{cases} M(z, z_0) = \frac{S}{2} L(z, z_0) - \frac{\kappa S}{2} L(z, \bar{z}_0) - \frac{\bar{S}(\bar{z}_0 - z_0)}{2} \left[ \frac{\sqrt{(z^2 - a^2)} - \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}}{(z - \bar{z}_0) \sqrt{(\bar{z}_0^2 - a^2)}} \right], \\ L(z, z_0) = \ln \left[ (\sqrt{z^2 - a^2} \sqrt{z_0^2 - a^2} + zz_0 - a^2) / (\sqrt{z^2 - a^2} + z) \right]. \end{cases} \quad (23)$$

注意到,这里的根号运算同样为双值函数,取值和上节所述是一致的.式(1)、式(3)和式(22)就构成了含裂纹平面问题 Erdogan 基本解的完整显式表达式.从中可以看出,当场点  $z$  无限趋近源点  $z_0$  时,点  $z$  处的应力值会变得无限大;此外,当场点  $z$  无限趋近于裂纹尖端时,位移函数不会像应力函数一样存在奇异性,这也符合断裂力学中应力场与位移场的分布规律.本节纠正了 Erdogan 基本解中位移函数错误的表示方式,并且推导出位移函数的显式表达形式.含裂纹平面问题 Erdogan 基本解的完整显式表达式形式简单,易于运用到边界元法等数值计算方法中求解带复杂边界条件的平面断裂力学问题.

### 3 数值算例

为了验证本文推导出来的 Erdogan 基本解显示表达形式的正确性和适用性,结合非奇异的样条虚边界元法<sup>[17]</sup>进行算例计算.样条虚边界元法在边界外面布置未知虚荷载,利用叠加原理和边界条件建立边界非奇异积分方程,再数值求解积分方程可得未知虚荷载,最后利用叠加原理得到位移、应力和应力强度因子等结果.样条虚边界元法可以避免直接边界元法中对 Erdogan 基本解进行奇异积分的运算,从而提高计算精度.样条虚边界元法已经成功应用于断裂力学领域<sup>[13]</sup>,以扩展有限元法(extended finite element method, XFEM)的计算结果为对比,重点考察了位移基本解显式表达的正确性和其在复杂边界条件下求解应力强度因子的应用.算例 3.1 主要考查本文推导出的 Erdogan 基本解中位移函数的精度,算例 3.2 运用本文给出的 Erdogan 基本解的显式表达形式求解了复杂边界问题.

#### 3.1 单轴受拉带中心 I 型裂纹矩形板问题

图 2 为带中心 I 型裂纹的方板,半裂纹长度  $a = 4.8$  cm;方板长为  $2H = 32$  cm,宽为  $2W = 16$  cm,弹性模量为  $E = 206$  GPa, Poisson 比  $\nu = 0.3$ ;假设该问题为平面应变问题,板厚度  $t = 1$  cm,方板在两对边受均布荷载  $0.5$  MPa.

采用基于 Erdogan 基本解显式表达形式的样条虚边界元法和扩展有限元法分别计算该方板裂纹右端的应力强度因子和板中部分点的位移响应结果.在样条虚边界元法中,采用 30 个虚边界元和 60 个边界子端进行求解,虚边界与实边界直接的距离  $d_0 = 1.6$  cm,数值积分采用单向 5 个 Gauss (高斯)积分点.在扩展有限元法中,采用 3 200(40×80)个扩展单元.

本问题应力强度因子存在解析解,由样条虚边界元法和扩展有限元法计算出来的应力强度因子如表 1 所示.

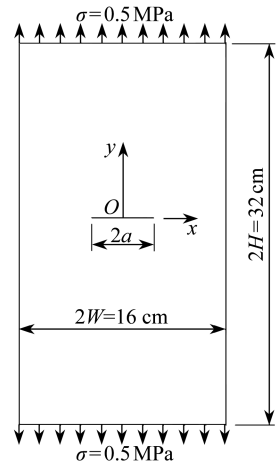


图 2 单轴受拉带中心 I 型裂纹矩形板

Fig. 2 A rectangular plate with a center crack subjected to uniform tension

表 1 不同方法的精度和效率对比

Table 1 The comparison of accuracy and efficiency between different methods

method	$K_I / (\text{MPa} \cdot \text{cm}^{1/2})$	error $e / (\%)$	time $t_c / \text{s}$
analytical solution	2.510	—	—
SFBEM based on Erdogan's solution	2.506	0.159	2.234
XFEM solution	2.514	0.159	211.567

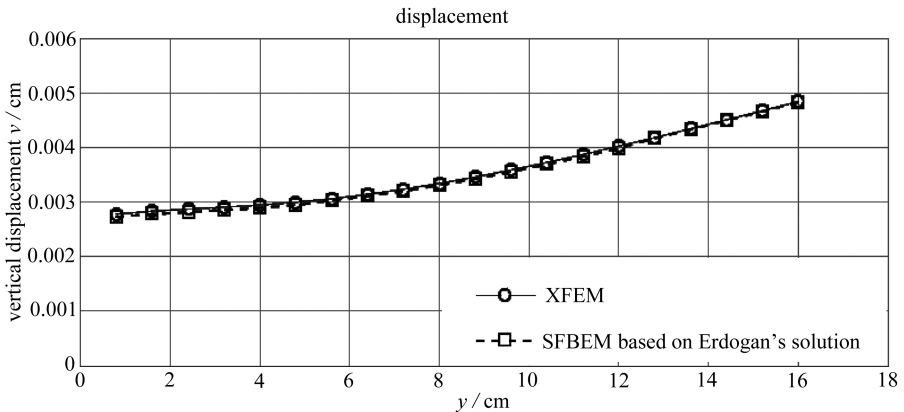
从表 1 可以看得出,与解析解相比,基于 Erdogan 基本解显式表达形式的样条虚边界元法计算出来的应力强度因子和扩展有限元法计算出来的结果具有相同的精度,而且由于在样条虚边界元法中自由度数远远少于扩展有限元法,所以样条虚边界元法的计算效率要比扩展有限元法高很多。

表 2 给出了样条虚边界元法和扩展有限元法计算的方板裂纹上表面的位移结果,图 3 绘制出了这两种方法计算出来的方板中轴线 ( $x = 0$ ) 上等间距点位移的计算结果。

表 2 不同方法计算裂纹上表面位移结果对比

Table 2 The comparison of displacements at the upper crack surface between different methods

$x / \text{cm}$	displacement $u / \text{cm}$		deviation $\delta / (\%)$
	SFBEM based on Erdogan's solution	XFEM solution	
0.000	$2.660 \times 10^{-3}$	$2.703 \times 10^{-3}$	1.619
$4.000 \times 10^{-3}$	$2.662 \times 10^{-3}$	$2.694 \times 10^{-3}$	1.190
$8.000 \times 10^{-3}$	$2.634 \times 10^{-3}$	$2.666 \times 10^{-3}$	1.193
$1.200 \times 10^{-2}$	$2.587 \times 10^{-3}$	$2.618 \times 10^{-3}$	1.197
$1.600 \times 10^{-2}$	$2.519 \times 10^{-3}$	$2.550 \times 10^{-3}$	1.203
$2.000 \times 10^{-2}$	$2.417 \times 10^{-3}$	$2.458 \times 10^{-3}$	1.680
$2.400 \times 10^{-2}$	$2.302 \times 10^{-3}$	$2.342 \times 10^{-3}$	1.705
$2.800 \times 10^{-2}$	$2.157 \times 10^{-3}$	$2.195 \times 10^{-3}$	1.729
$3.200 \times 10^{-2}$	$1.977 \times 10^{-3}$	$2.012 \times 10^{-3}$	1.744
$3.600 \times 10^{-2}$	$1.746 \times 10^{-3}$	$1.780 \times 10^{-3}$	1.902
$4.000 \times 10^{-2}$	$1.449 \times 10^{-3}$	$1.477 \times 10^{-3}$	1.866
$4.400 \times 10^{-2}$	$1.036 \times 10^{-3}$	$1.040 \times 10^{-3}$	0.419
$4.800 \times 10^{-2}$	0.000	$-1.000 \times 10^{-6}$	—

图 3 中轴线 ( $x = 0$ ) 位移变化曲线Fig. 3 The displacement on section  $x = 0$  of the plane with a centre crack



从表 2 可以看出,运用本文推导出的 Erdogan 基本解中位移函数显式表达的样条虚边界元法计算出来的位移结果,与扩展有限元法的计算结果偏差都在 2% 以内.值得注意的是,由对称性可知,在裂纹尖端处应该没有轴向位移,样条虚边界元法求出的轴向位移结果为 0 cm,而扩展有限元法计算出来的轴向位移为  $-1 \times 10^{-6}$  cm,所以在这一点的计算上,使用解析推导出来的 Erdogan 基本解中位移函数显式表达的样条虚边界元法的精度高于扩展有限元法.

图 3 给出了两种方法在中轴线上轴向位移的解答,可以看出,基于 Erdogan 基本解的样条虚边界元法计算出来的位移解答和扩展有限元法吻合得比较好,这同样也说明了 Erdogan 基本解中位移函数的显式表达式是正确的.

### 3.2 受均布荷载的复合型裂纹悬臂梁

图 4 为带裂纹的悬臂深梁,左端固定,其他边自由.长为  $a = 20$  cm,高为  $b = 15$  cm,弹性模量为  $E = 2.24 \times 10^4$  MPa, Poisson 比  $\nu = 0.2$ ;裂纹在梁上跨中处为单边裂纹,裂纹长度为  $d = 1$  cm;假设该问题为平面应变问题,厚度  $t = 1$  cm,梁下端受均布荷载为 1 N/cm,如图 4 所示.

采用基于 Erdogan 基本解显式表达形式的样条虚边界元法和扩展有限元法分别计算该悬臂梁的应力强度因子.在样条虚边界元法中,采用 280 个虚边界元和 140 个边界子端进行求解,虚边界与实边界直接的距离  $d_0 = 0.38$  cm,数值积分采用单向 5 个积分点的 Gauss 积分.在扩展有限元法中,采用 1 200(40×30)个扩展单元.

采用基于 Erdogan 基本解显式表达形式的样条虚边界元法计算出来的应力强度因子如表 3 所示.位移和应力结果如图 5 和图 6 所示.

表 3 不同方法计算的复合型应力强度因子结果

Table 3 Results of stress intensity factors

method	$K_I / (\text{MPa} \cdot \text{cm}^{1/2})$	deviation $\delta_1 / (\%)$	$K_{II} / (\text{MPa} \cdot \text{cm}^{1/2})$	deviation $\delta_2 / (\%)$	time $t_c / \text{s}$
SFBEM based on Erdogan's solution	2.343	0.255	0.318	4.605	38.439
XFEM	2.349	-	0.304	-	59.502

表 3 的结果表明,在复杂边界条件情况下,基于 Erdogan 基本解的样条虚边界元法的复合型应力强度因子结果与扩展有限元法接近,且基于 Erdogan 基本解的样条虚边界元法的计算效率要高于扩展有限元法.

从图 5 可以看出,应力的最大值出现在裂纹尖端处,这是因为裂纹尖端处的应力场存在奇异性,但是也可以看出,该奇异性的影响范围不大.图 6 中水平方向的位移存在对称性,而且在裂纹处因为裂纹的张开而存在突变,竖向位移随着距离固定端变远而变大;而且还要注意,水平位移解答和竖向位移解答都不存在奇异性,这也印证了本文推导出的 Erdogan 基本解中的位移函数不存在奇异性的结论.

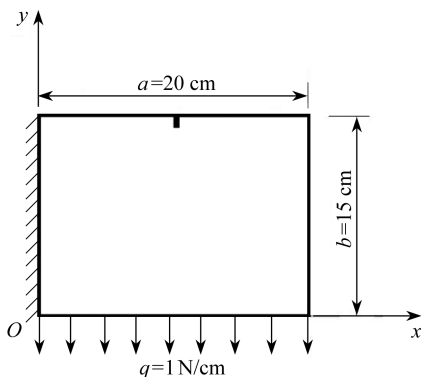


图 4 受均布荷载的带单边裂纹悬臂梁

Fig. 4 The cantilever beam with an edge crack subjected to uniform load

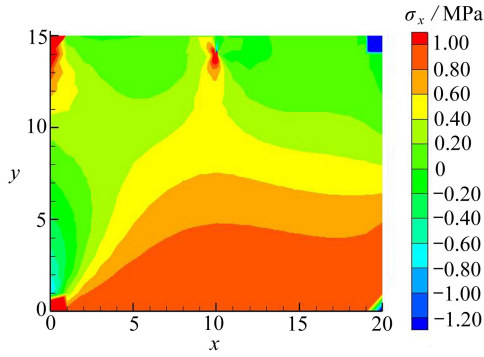
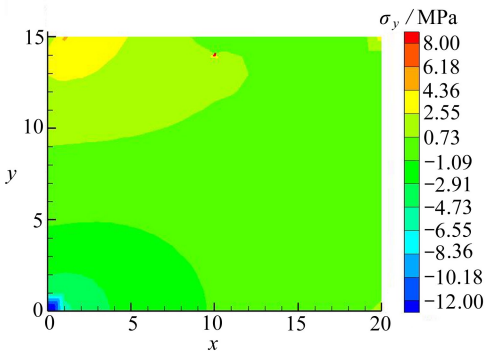
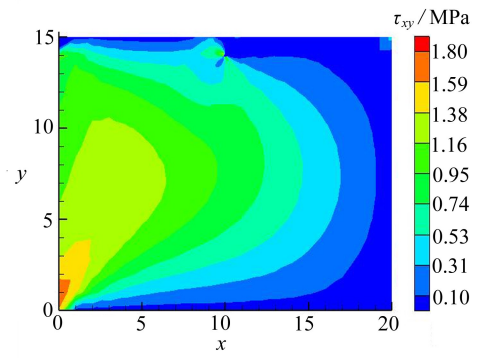
(a)  $\sigma_x$  应力云图(a)  $\sigma_x$  stress contour(b)  $\sigma_y$  应力云图(b)  $\sigma_y$  stress contour(c)  $\tau_{xy}$  应力云图(c)  $\tau_{xy}$  stress contour

图 5 应力云图

Fig. 5 The stress contour

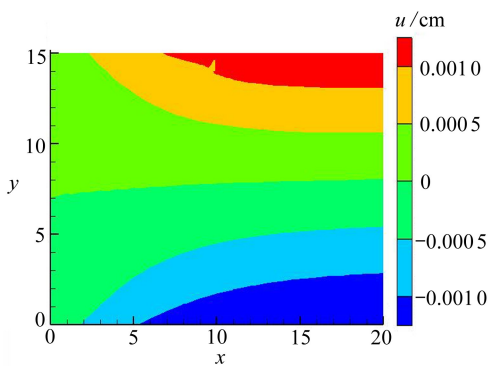
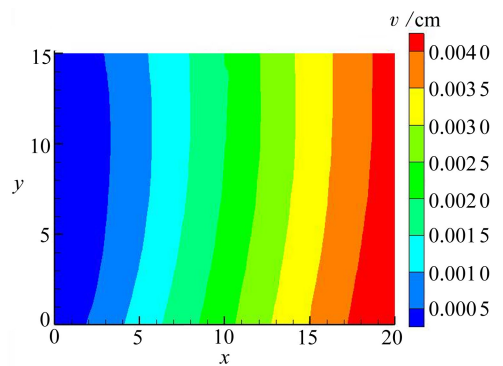
(a) 水平方向  $u$  位移图(a) Horizontal displacement  $u$  contour(b) 竖直方向  $v$  位移图(b) Vertical displacement  $v$  contour

图 6 位移云图

Fig. 6 The displacement contour

## 4 结 论

本文运用三角函数进行等量代换,推导出了含裂纹问题的 Erdogan 基本解中位移函数的显式表达形式.首先纠正了 Erdogan 对于位移函数表示的错误形式,将其中的定积分式子改为不定积分式子,然后运用三角函数对变量进行换元,处理了位移函数中复杂的积分问题,显式表达出了基本解中的位移函数.该位移函数形式简单,方便运用.最后结合样条虚边界元法给出了不同带裂纹结构的响应解答.从结果可以看出,本文求解出的位移函数显式表达形式具有很高精度,并且完善了 Erdogan 基本解的表达形式,使其在求解复杂边界条件的断裂力学问题中具有相当的优势.Erdogan 基本解,由于位移函数得到显式表达,减少了其数值积分花费的时间,可以提高边界元法在断裂问题中的计算效率,具有很好的运用前景,如断裂力学中的随机、动力、多裂纹和非线性等分析.

**致谢** 本文作者衷心感谢亚热带建筑科学国家重点实验室开放基金(2017ZB32)对本文的资助.

### 参考文献(References):

- [1] 酆正能. 应用断裂力学[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2012.(LI Zheng-neng. *Applied Fracture Mechanics*[M]. Beijing: Beihang University Press, 2012.(in Chinese))
- [2] Zehnder A T. *Fracture Mechanics*[M]. Netherlands: Springer, 2012.
- [3] 付宇明,田振国,郑丽娟. 轴对称金属模具电磁热裂纹止裂中热应力场的分析[J]. 应用数学和力学,2006,27(3): 331-336.(FU Yu-ming, TIAN Zhen-guo, ZHENG Li-juan. Thermal stress field when crack arrest in an axial symmetry metal die using electromagnetic heating[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(3): 331-336.(in Chinese))
- [4] Benzley S E. Representation of singularities with isoparametric finite elements[J]. *Clinical Endocrinology*, 1974, 8(8): 537-545.
- [5] Tan M A, Meguid S A. Analysis of bimaterial wedges using a new singular finite element[J]. *International Journal of Fracture*, 1997, 88(4): 373-391.
- [6] MENG Qing-hua, WANG Zhen-qing. Extended finite element method for power-law creep crack growth[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2014, 127: 148-160.
- [7] Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(1): 131-150.
- [8] Portela A, Aliabadi M H, Rooke D P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation[J]. *Computers & Structures*, 1993, 46(2): 237-247.
- [9] Leonel E D, Venturini W S. Dual boundary element formulation applied to analysis of multi-fractured domains[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2010, 34(12): 1092-1099.
- [10] Erdogan. On the stress distribution in a plate with collinear cuts under arbitrary loads[C]// *Proceedings of the 4th US National Congress of Applied Meehanics*. 1962: 547-553.
- [11] Tan P W, Raju I S, Newman I, et al. Boundary force method for analyzing two-dimensional cracked bodies[R]. Hampton, Virginia: NASA Langley Research Center, 1986.
- [12] 苏成,郑淳. 基于 Erdogan 基本解边界元法计算应力强度因子[J]. 力学学报,2007,39(1): 93-99.(SU Cheng, ZHENG Chun. Calculation of stress intensity factors by boundary element method based on Erdogan fundamental solutions[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Ap-*

- plied Mechanics*, 2007, **39**(1): 93-99. (in Chinese))
- [13] SU Cheng, ZHENG Chun. Probabilistic fracture mechanics analysis of linear-elastic cracked structures by spline fictitious boundary element method [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2012, **36**(12): 1828-1837.
- [14] 吴家龙. 弹性力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 2010. (WU Jia-long. *Elasticity Mechanics*[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2010. (in Chinese))
- [15] Mogilevskaya S G, Linkov A M. Complex fundamental solutions and complex variables boundary element method in elasticity[J]. *Computational Mechanics*, 1998, **22**(1): 88-92.
- [16] Banerjee P K, Butterfield R. *Boundary Element Method in Engineering Science*[M]. London: McGraw Hill, 1981.
- [17] SU Cheng, HAN Da-jian. Multidomain SFBEM and its application in elastic plane problems [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2000, **126**(10): 1057-1063.

## The Explicit Expression of Erdogan's Fundamental Solution for Plane Problems With Cracks

XU Zhi<sup>1</sup>, FAN Xue-ming<sup>1,2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, P.R.China;

2. State Key Laboratory of Subtropical Building Science(South China University of Technology), Guangzhou 510640, P.R.China)

**Abstract:** The fundamental solution plays an essential role in many numerical methods such as the boundary element method (BEM), the method of fundamental solution and the boundary-type meshless methods. For fracture problems, application of fundamental solutions in domains with cracks can avoid deeming the crack surface as boundary condition and simplify the problems significantly. Based on the complex variable expression of Erdogan's fundamental solution (EFS) for plane problems, the application conditions for EFS were noted, some faults in EFS were corrected and the explicit expression of the displacement in EFS was obtained. The computer program of the spline fictitious boundary element method (SFBEM) based on EFS was compiled to calculate the numerical solutions to mixed boundary condition problems. Numerical examples prove the correctness and accuracy of the derived explicit expression of EFS.

**Key words:** fracture mechanics; Erdogan's fundamental solution; explicit expression; spline fictitious boundary element method

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program) (51378009)

引用本文/Cite this paper:

许秩, 范学明. 含裂纹平面问题 Erdogan 基本解的显式表达[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(9): 1009-1020.

XU Zhi, FAN Xue-ming. The explicit expression of Erdogan's fundamental solution for plane problems with cracks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(9): 1009-1020.