

# 非连续变形分析的 MLS 后处理方法<sup>\*</sup>

孙越<sup>1</sup>, 冯象初<sup>1</sup>, 肖俊<sup>2</sup>, 王颖<sup>2</sup>

(1. 西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710126;  
2. 中国科学院大学 工程科学学院, 北京 100049)

**摘要:** 非连续变形分析(discontinuous deformation analysis, DDA)通过引入虚拟节理网格将块体离散成子块体系统进行断裂扩展数值模拟.针对这种方法难以获得精确块体应力分布的问题,提出一种基于无网格法移动最小二乘(moving least squares, MLS)插值的应力恢复算法.利用 DDA 计算得到的节点位移,通过恰当构造 MLS 形函数及其导数,推导了块体任意点应力的计算公式.数值算例将基于 MLS 后处理的结果与解析解及平均值法后处理结果进行比较,验证了所提出方法的精确性和有效性.

**关键词:** 无网格法; 移动最小二乘插值; 应力恢复; 非连续变形分析; 块体粘接模型  
**中图分类号:** O242.1      **文献标志码:** A      **doi:** 10.21656/1000-0887.370259

## 引 言

DDA<sup>[1]</sup>是岩土工程中目前应用较为广泛的一种不连续介质计算方法<sup>[2-4]</sup>.该方法将裂隙岩体看作由多边形块体组成的离散系统,块体之间通过节理面上的接触弹簧连接.由于 DDA 采用隐式时间积分格式,并基于最小势能原理组集瞬态平衡方程组,因此每个块体满足动量守恒,无需引入数值阻尼,也不必取很小的时间步长,适用于静力学和完全动力学计算.

DDA 采用一阶完全多项式近似块体位移,多项式系数为未知待求变量.因此,每个块体的应力和应变在一个时间步内实际上是保持不变的.这种常应力假设有利于提高效率,降低积分和求逆矩阵运算带来的计算消耗,但同时也使得块体的力学行为近似于刚体.当需要得到精确的块体内应力分布和节理面上准确的接触压力时,比如块体开裂问题,采用更加复杂的函数来逼近块体位移场是十分必要的.目前,这方面的工作包括:

(a) 使用二阶或更高阶的完全多项式近似块体位移,这种方法也被简称为高阶 DDA<sup>[5]</sup>.

(b) 采用有限元网格将块体剖分成单元集合,在每个单元上应用传统有限元法(finite element method, FEM)基于节点的位移逼近,这样块体的位移就是单元位移函数的分片连续函数,这一方法被称为基于节点的 DDA<sup>[6-7]</sup>.

(c) 在块体上构造无网格法(meshless methods)位移近似函数<sup>[8-10]</sup>,从而将块体位移变成无网格法节点位移函数的组合.

(d) 在块体内部利用有限元型网格生成虚拟节理,预设足够大的内摩擦角、黏聚力和张

\* 收稿日期: 2016-08-24; 修订日期: 2016-11-18

基金项目: 国家自然科学基金(61271294;61471338)

作者简介: 孙越(1983—),男,博士生(通讯作者. E-mail: yue\_sun@163.com).

拉强度阻止虚拟节理上发生滑动、分离和嵌入,从而将块体变成一个子块体构成的系统,而块体位移成为子块体位移的分片不连续多项式,这类方法一般称为子块体 DDA<sup>[2,11-12]</sup>。

比较上述方法,可以发现:由于多项式逼近受到 Weierstrass 定理的限制<sup>[5]</sup>,方法(a)只适用于规则形状块体,比如矩形和长方体;方法(b)存在与传统 FEM 类似的不足,即节点位移需要满足较高的光滑阶,因此在大变形和非线性弹性问题中容易出现锁闭问题;方法(c)使用非多项式函数近似位移,需要采用数值积分方法,此外由于所采用的插值函数在节点处不可导,每个时间步需要引入一个插值步骤来计算应变能,因此其求解效率比较低;方法(d)与标准 DDA 的区别仅在于引入虚拟节理网格对块体细分,不存在其他方法中遇到的问题,易于进行断裂扩展数值模拟<sup>[2,11-12]</sup>。但方法(d)每个网格节点是属于不同子块体顶点的重合点,因此节点处的位移是不连续的,并且块体应力是子块体应力的阶梯函数,在每个子块体内部是常数。目前,一般采用节点处的平均应力作为节点应力,但这种平均值方法会导致过于光滑的结果,尤其在应力集中区域会显著降低应力水平,给判断裂纹起裂和捕捉裂纹扩展带来困难。

最近,Zhao 和 Gu<sup>[13]</sup>提出一种子块体 DDA 应力恢复算法,用于克服平均值法后处理的不足。该方法基于子块体 DDA 的计算结果,根据每个节点处的 Mohr 圆构造子块体间作用力在所有节点上的误差能量泛函,令其最小化得到子块体间在节点处的作用力,再根据子块体边界上的应力和外力平衡条件计算出子块体应力。然而采用这种应力恢复方法只能获得节点上的应力,每个子块体内的应力依然是常数,所以无法获取非节点位置的准确应力。

MLS 插值是无网格法中常用的一种具有紧支特性的近似函数<sup>[14]</sup>,并被文献[8]当做块体位移模式函数引入 DDA。Tabbara 等<sup>[15]</sup>将 MLS 插值方法引入 FEM 进行应力恢复。近来,Bordas 和 Duflo<sup>[16]</sup>以及 Ródenas 等<sup>[17]</sup>又将这种方法应用于扩展 FEM 后处理。本文提出子块体 DDA 的一种采用 MLS 插值近似的后处理方法,以 DDA 网格节点为 MLS 插值节点,计算 MLS 形函数及其导数,继而根据节点位移计算估值点的应变和应力。与文献[13]所提出的算法相比,本文给出的应力恢复方法能够得到块体内任何点的应力,块体的应力场可以通过提高 MLS 插值基函数次数得到高阶变化的分布。与文献[8]不同的是,本文给出的方法将 MLS 插值用于后处理而不是块体位移的近似函数,因此不需要使用 Gauss(高斯)数值积分。从这个意义上讲,本文方法也可以看作是无网格法与 DDA 的一种耦合方法。

为了验证所提出的方法,通过将所提出基于 MLS 后处理的子块体 DDA 应用于两个典型数值算例的求解。通过与解析解及平均值后处理的结果相比较,证明了本文所提出方法的精确性和有效性。数值算例中所使用的子块体方法是基于块体粘接模型(bonding block model, BBM)<sup>[18]</sup>的 DDA。由于子块体 DDA 借助虚拟节理上的接触弹簧来维持相邻子块体间位移的弱连续性,因此需要增加大量计算开销用于子块体间的接触检测和虚拟节理上接触弹簧的开闭迭代运算。BBM 为此做出改进,通过引入粘接弹簧替代接触弹簧来阻止相邻子块体间的相对滑动、分离和嵌入,从而避免了这些问题。

## 1 相关研究

本节对子块体 DDA 及 BBM 作扼要介绍,为在下一节展开基于 MLS 插值的 DDA 应力恢复方法和在第 3 节进行数值实验提供基本的概念。DDA<sup>[1]</sup>认为节理岩体是几何形状和接触状态不断改变的块体系统(二维块体是一个多边形区域,三维块体是一个多面体)。允许块体间节理面上发生张开、滑动和闭合 3 种接触状态,并在每个接触点施加一个法向接触弹簧和一个剪切接触弹簧。接触弹簧的数学意义是罚函数,其值一般可设置为 10 到 100 倍的块体弹性模

量<sup>[19]</sup>.接触弹簧需要满足两个约束条件,即张开状态的接触对之间不存在拉力,而在闭合的接触对之间不允许有嵌入发生.在计算过程中,这两个约束条件通过开闭迭代实现,这是一个反复进行“试错-校正”选择合适时间步长和调整接触弹簧施加的过程.

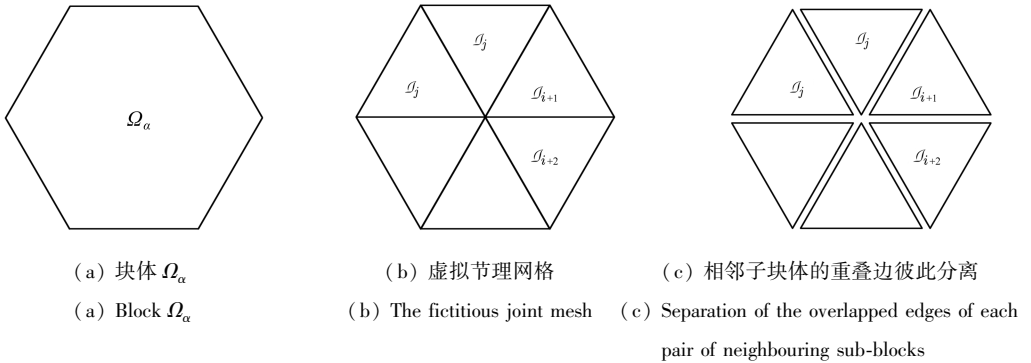


图 1 块体  $\Omega_\alpha$  被离散为子块体  $\sigma_i, \dots, \sigma_j$

Fig. 1 Block  $\Omega_\alpha$  subdivided into sub-blocks  $\sigma_i, \dots, \sigma_j$

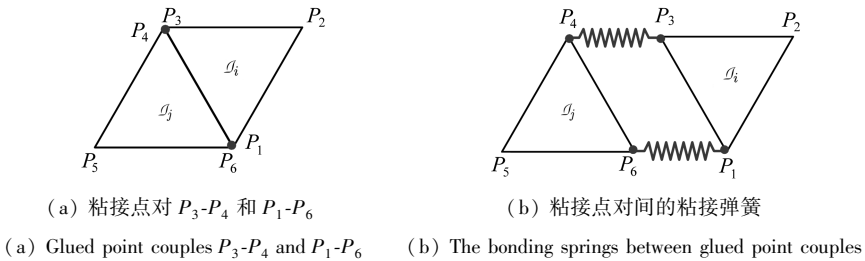


图 2 基于 BBM 的 DDA 在粘接点对间施加粘接弹簧阻止相邻子块体  $\sigma_i$  和  $\sigma_j$  的相对运动

Fig. 2 The BBM-based DDA with bonding springs to prevent the relative movements between adjacent sub-blocks  $\sigma_i$  and  $\sigma_j$

子块体 DDA<sup>[2,11-12]</sup>采用如图 1 所示的离散方式,在块体内部利用有限元型网格生成虚拟节理网络,将块体划分为子块体的集合.通过设置很强的节理力学属性,包括内摩擦角、黏聚力和张拉强度,可以使虚拟节理上子块体间的接触弹簧在计算过程中保持施加,阻止子块体间发生相对滑动、嵌入和脱离,从而满足虚拟节理上位移的弱连续性.这样块体的位移就成为其子块体位移的一个分片弱连续多项式.这里的“弱连续”指的是在罚函数意义下虚拟节理两边子块体边界点的位移近似相等.容易看到,子块体 DDA 实际上就是 DDA,其差别仅在于是否在块体内部引入虚拟节理.子块体 DDA 的优势是无需修改 DDA,从而便于实现,但其不足在于虚拟节理上的接触也需要接触检测和开闭迭代,因此其效率有待提高.为此,BBM 在虚拟节理上引入如图 2 所示的粘接弹簧连接粘接点对,粘接点对是相邻子块体的重合顶点,也是生成虚拟节理的网格节点.除了用粘接弹簧代替接触弹簧以避免引入多余计算,BBM 与 DDA 和子块体 DDA 是完全相同的,因此下文不再特别区分.

子块体 DDA 采用以下线性多项式近似每个子块体的位移  $\mathbf{u} = (u, v)^T$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{a}, \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{T}$  是子块体上定义的多项式基函数,  $\mathbf{a}$  是对应的未知待求多项式系数,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(y - y_0) & x - x_0 & 0 & \frac{y - y_0}{2} \\ 0 & 1 & x - x_0 & 0 & y - y_0 & \frac{x - x_0}{2} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{a} = (u_0 \quad v_0 \quad r_0 \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy})^T, \quad (3)$$

与 DDA 的位移近似方法相似, 上式中  $(x_0, y_0)$  是子块体中心坐标,  $u_0, v_0$  和  $r_0$  分别是中心处  $x$  方向位移、 $y$  方向位移和旋转弧度,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  和  $\gamma_{xy}$  为应变分量. 对于由  $M$  个子块体构成的系统, 每个子块体上的刚度矩阵是一个 6 阶方阵, 在每个时间步, 所有子块体的位移多项式系数通过求解如下分块矩阵形式的瞬态平衡方程组得到

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1M} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{M1} & \mathbf{K}_{M2} & \cdots & \mathbf{K}_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_M \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{a}_i \in R^{6 \times 1}$  表示子块体  $i$  上的位移多项式系数向量, 刚度子矩阵  $\mathbf{K}_{ij} \in R^{6 \times 6}$  和右端项  $\mathbf{b}_i \in R^{6 \times 1}$  通过最小化系统总势能  $\Pi$  得到, 即

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_{ri} \partial a_{sj}} \rightarrow \mathbf{K}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \Pi(0)}{\partial a_{ri}} \rightarrow \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (5b)$$

$a_{ri}$  和  $a_{sj}$  分别表示未知待求系数向量  $\mathbf{a}_i$  和  $\mathbf{a}_j$  的行元素,  $r, s = 1, 2, \dots, 6$ , 箭头表示左边的结果组集到对应于右边子矩阵的总平衡方程适当的位置. 在子块体 DDA 中, 总势能  $\Pi$  来源于子块体应变能、初应力势能、固定点弹簧应变能、接触弹簧应变能、外荷载势能等, 而基于 BBM 的子块体 DDA 需要考虑粘接弹簧应变能.

## 2 提出的方法

本节以子块体 DDA 虚拟节理网格节点为 MLS 节点, 基于 MLS 插值法给出后处理算法, 计算块体内任意点  $\mathbf{x}$  的应力和应变. 为此, 考虑如图 3 所示块体, 设子块体 DDA 采用具有  $\Lambda$  个节点的三角形网格将其离散为一个子块体系统. 任意节点  $\mathbf{x}_l$  的坐标可设为  $(x_l, y_l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, \Lambda$ .  $\circ$  标记落入定义域的节点,  $\square$  标记  $\Omega_x$  外的节点.

与 FEM 和无网格方法不同, 子块体 DDA 得到的位移在相邻子块体之间不连续, 因此同一个节点实际上是属于不同子块体的顶点. 如图 1 所示, 每一个节点都是以其为顶点的所有子块体的重叠点. 考虑到块体材料的连续性, 其内部不应发生分离、嵌入或相对滑动, 除非是达到断裂临界值而出现的真实裂纹. 所以很自然地, 本文取子块体 DDA 得到的顶点位移在节点处的平均值作为节点位移. 对于二维的情形, 记节点  $\mathbf{x}_l$  的位移为  $\mathbf{u}_l^h = (u_{1l}^h, u_{2l}^h)^T$ ,  $l = 1, 2, \dots, \Lambda$ , 其中  $u_{1l}^h$  和  $u_{2l}^h$  分别表示子块体 DDA 计算得到的沿  $x$  轴和  $y$  轴的位移分量数值解.

如图 3 所示, 对块体内任意坐标为  $(x, y)$  的点  $\mathbf{x}$ , 定义以它为中心半径为  $R_x$  的圆形邻域  $\Omega_x$ , 称之为点  $\mathbf{x}$  的定义域. 若已知点  $\mathbf{x}$  的形函数  $\mathbf{N}(\mathbf{x}) \in R^{1 \times \Lambda}$ , 则  $\mathbf{x}$  在  $i$  方向的位移分量  $u_i^*$  可用节点位移  $u_{il}^h$  表示为

$$u_i^* = \mathbf{N}(\mathbf{x}) (u_{i1}^h \quad u_{i2}^h \quad \cdots \quad u_{i\Lambda}^h)^T, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

这里需要指出的是,只有那些位于点  $\mathbf{x}$  邻域  $\Omega_{\mathbf{x}}$  内的节点在上式中产生作用,通过构造恰当的形函数可使其他点的贡献为 0.此时,只要计算出形函数矩阵  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  的导数矩阵  $\mathbf{N}_{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{N}_{\mathbf{y}}$ ,就可以根据弹性力学几何方程得到该点所有应变分量,继而基于材料本构方程计算出点  $\mathbf{x}$  处的应力张量.因此,下面分两个步骤恢复块体内任意点的应力和应变:首先基于节点坐标给出 MLS 形函数矩阵  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ ,然后推导应力和应变的计算公式.

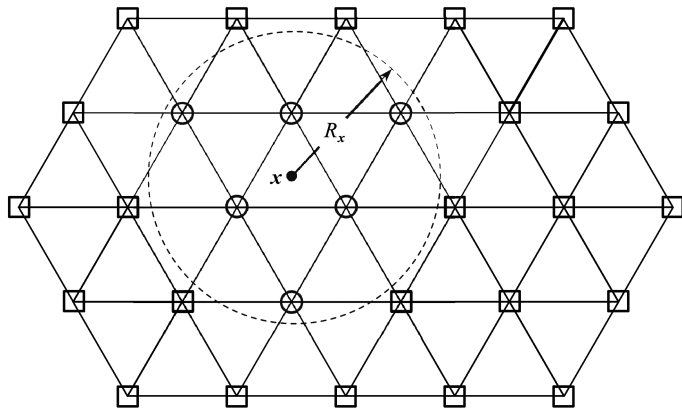


图 3 块体内任意点  $\mathbf{x}$  的定义域  $\Omega_{\mathbf{x}}$  和定义域半径  $R_{\mathbf{x}}$

Fig. 3 Domain  $\Omega_{\mathbf{x}}$  of any point  $\mathbf{x}$  in a block, and radius  $R_{\mathbf{x}}$  of  $\Omega_{\mathbf{x}}$

## 2.1 MLS 形函数的构造

块体内任一点  $\mathbf{x}$  的位移分量  $u_i^*$  可以用下面的 MLS 插值多项式来拟合:

$$u_i^* = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  为插值多项式基函数向量,其一阶和二阶形式分别由式(8a)和式(8b)给出

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (1 \quad x \quad y)^T, \quad (8a)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2)^T, \quad (8b)$$

$\mathbf{a}_i(\mathbf{x})$  是点  $\mathbf{x}$  处对应于第  $i$  个位移分量的插值多项式未知待定系数,有以下具体形式:

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})(u_{i1} \quad u_{i2} \quad \cdots \quad u_{iN})^T, \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in R^{m \times m}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) \in R^{m \times A},$$

基函数  $\mathbf{p}$  取式(8a)时  $m = 3$ ,当基函数  $\mathbf{p}$  取式(8b)时  $m = 6$ ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^A w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I), \quad (10)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N)\mathbf{p}(\mathbf{x}_N)), \quad (11)$$

上面两式中,权函数  $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$  是关于点  $\mathbf{x}$  与节点  $\mathbf{x}_I$  之间距离  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|_2$  的单调递减函数,这里  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|_2 = \sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2}$ .如图 3 所示,当点  $\mathbf{x}$  位于节点  $\mathbf{x}_I$  处时  $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$  达到最大值,而当节点  $\mathbf{x}_I$  在点  $\mathbf{x}$  的定义域  $\Omega_{\mathbf{x}}$  外部时  $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = 0$ .因此,权函数  $w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$  是紧支的,其支集范围受点  $\mathbf{x}$  定义域的控制.本文取以下形式的权函数:

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \begin{cases} \frac{e^{-r^2\beta^2} - e^{-\beta^2}}{1 - e^{-\beta^2}}, & r \leq 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \quad (12)$$



$\beta$  控制权函数衰减速度, 数值实验中取  $\beta = 3$ , 而比值  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|_2 / R_x$ . 这样, 点  $\mathbf{x}$  处的插值结果仅与位于其邻域  $\Omega_x$  内的节点位移有关, 而不受其他节点的影响. 将式(9)代入式(6), 即可得到点  $\mathbf{x}$  处的形函数  $N(\mathbf{x})$  的具体形式:

$$N(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (13)$$

在上式中, 矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  必须非奇异从而保证其逆矩阵存在. 在计算中, 这要求  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  的条件数不能过大, 因此需要点  $\mathbf{x}$  的定义域覆盖足够多的节点  $\mathbf{x}_I$ . 但其定义域的半径  $R_x$  也不能过大, 否则得到的插值结果会因为局部特性的消失而变得过于光滑, 造成大的误差. 为此, 本文采取以下步骤确定  $R_x$  的值:

步骤 1 计算点  $\mathbf{x}$  与所有节点  $\mathbf{x}_I$  的距离  $d_I(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|_2, I = 1, 2, \dots, A$ ;

步骤 2 采用快速排序算法 (quick sort) 对以上得到的距离按照从小到大排序为  $d_1, d_2, \dots, d_A$ ;

步骤 3 令  $R_x = d_{2m}, 1 \leq 2m \leq A$ , 其中  $m$  为基函数  $\mathbf{p}$  的维数;

步骤 4 若矩阵  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  条件数大于  $1.0 \times 10^{12}$ , 则增大  $R_x$  直到  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  条件数不大于  $1.0 \times 10^{12}$ .

## 2.2 应力恢复

块体内任意点  $\mathbf{x}$  的应变  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  可根据以下几何方程通过该点位移  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)^T$  计算:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(\mathbf{x}) \\ \varepsilon_y(\mathbf{x}) \\ \gamma_{xy}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix}. \quad (14)$$

将式(6)代入上式, 则

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} N_x(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_y(\mathbf{x}) \\ N_y(\mathbf{x}) & N_x(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^h \\ u_2^h \end{pmatrix}, \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{u}_i^h = (u_{i1}^h \ u_{i2}^h \ \dots \ u_{iA}^h)^T, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

此外,  $N_\xi(\mathbf{x}) = \partial N(\mathbf{x}) / \partial \xi$ ,  $\xi$  表示  $x$  或  $y$ , 并由式(13)可知,

$$N_\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\xi(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}_\xi(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_\xi(\mathbf{x}), \quad (17)$$

式中

$$\mathbf{p}_\xi = \partial \mathbf{p} / \partial \xi, \quad \mathbf{A}_\xi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial \xi} = \sum_{I=1}^A w_\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I), \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_\xi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x})}{\partial \xi} = (w_\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \ w_\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \ \dots \ w_\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_A) \mathbf{p}(\mathbf{x}_A)), \quad (19)$$

其中,  $w_\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \partial w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) / \partial \xi$ . 根据线弹性问题本构方程, 应力可由应变按照下式解出:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_x(\mathbf{x}) \\ \sigma_y(\mathbf{x}) \\ \tau_{xy}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}), \quad (20)$$

其中  $E$  和  $\nu$  分别为材料的弹性模量和 Poisson(泊松)比.将式(15)代入上式可得

$$\sigma_x(\mathbf{x}) = \frac{E}{1-\nu^2} (N_x(\mathbf{x})\mathbf{u}_1^h + \nu N_y(\mathbf{x})\mathbf{u}_2^h), \quad (21a)$$

$$\sigma_y(\mathbf{x}) = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu N_x(\mathbf{x})\mathbf{u}_1^h + N_y(\mathbf{x})\mathbf{u}_2^h), \quad (21a)$$

$$\tau_{xy}(\mathbf{x}) = \frac{E}{2(1+\nu)} (N_y(\mathbf{x})\mathbf{u}_1^h + N_x(\mathbf{x})\mathbf{u}_2^h). \quad (21c)$$

由于以上各式没有限制点  $\mathbf{x}$  的位置,因此式(21a)~(21c)描述了块体内部的应力场分布.可以通过提高基函数  $p(\mathbf{x})$  的最高次数来得到更高阶变化的应力.

## 3 数值算例

### 3.1 算例 1

考虑如图 4(a)所示悬臂梁,其长为  $L = 10$  m,宽度为  $b = 1$  m.坐标系原点取在模型的左下角, $x$ 轴沿梁的下表面向右.整个悬臂梁满足线弹性各向同性,弹性模量  $E = 3.0 \times 10^8$  Pa, Poisson 比  $\nu = 0.3$ .悬臂梁左端面  $\Gamma_u = \{(x,y): x=0\}$  为 Dirichlet 边界,右端面  $\Gamma_t = \{(x,y): x=L\}$  为 Neumann 边界. $\Gamma_u$  上位移所有分量逐点为 0,  $\Gamma_t$  上定义有方向为  $y$ 轴负方向的集度为  $P = 1$  kN/m 的均布荷载.该问题有如下解析解<sup>[20]</sup>:

$$\sigma_x = -\frac{12P}{b^3} \left( y - \frac{b}{2} \right) (x - L), \quad (22a)$$

$$\sigma_y = 0, \quad (22a)$$

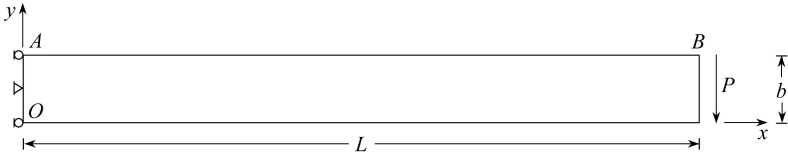
$$\tau_{xy} = -\frac{6P}{b^3} \left[ \frac{1}{4} b^2 - \left( y - \frac{b}{2} \right)^2 \right], \quad (22c)$$

其中,  $x \in [0, L]$ ,  $y \in [0, b]$ .下面,采用基于 BBM 的 DDA 求解该问题,并采用二次 MLS 插值基函数对结果进行应力恢复.将整个梁看做一个块体,并按照图 4(b)所示的无结构网格将其剖分成子块体类型的三角形单元.为了检验所提出的基于 MLS 的后处理方法的精确性和有效性,将图 4(a)所示模型上表面  $\overline{AB} = \{(x,y): 0 \leq x \leq L, y=b\}$  作为研究对象,考察其上分布的应力.

图 5 绘制了理论解和通过 DDA 得到的  $\overline{AB}$  上的应力结果,包括  $x$  方向应力分量  $\sigma_x$ ,  $y$  方向应力分量  $\sigma_y$  和剪切应力分量  $\tau_{xy}$ , theoretical 表示解析解, average 表示基于平均值后处理的结果, MLS-based 表示基于 MLS 插值方法后处理的结果.其中, DDA 的计算结果分别用平均值方法和 MLS 插值法进行后处理.从图 5 可以看到,基于 MLS 后处理的结果比采用平均值后处理方法得到的解更加接近弹性理论给出的应力曲线.尤其对于水平方向应力分量  $\sigma_x$ ,平均值方法得到的解与理论值有较为明显的偏差,而基于 MLS 插值的结果与解析解是吻合的.

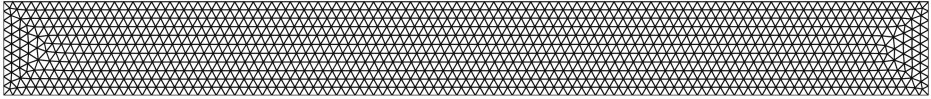
图 5 中,基于两种后处理方法的 DDA 得到的应力分量  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  在点  $A(0,b)$  附近的结果与解析解有一定的误差.根据式(22)可知,解析解在点  $A$  的值为  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ .这一误差是由于基于 BBM 的 DDA 在 Dirichlet 边界  $\Gamma_u$  上采用罚函数法引入位移边界条件,但罚函数法不能将位

移变化彻底消除为 0,从而导致很小的非零应力和应变.从图 5 可以发现,稍微离开固定端的应力结果与解析解完全符合,而 MLS 后处理降低了平均值后处理在固定端处点 A 处的误差.



(a) 几何模型

(a) The geometry model



(b) 所采用的三角形网格(包含 2 202 个单元和 1 212 个节点)

(b) The triangular mesh(with 2 202 elements and 1 212 nodes)

图 4 算例 1 自由端受向下均布荷载 P 的悬臂梁

Fig. 4 The cantilever beam subjected to the uniform load of intensity P along the free end

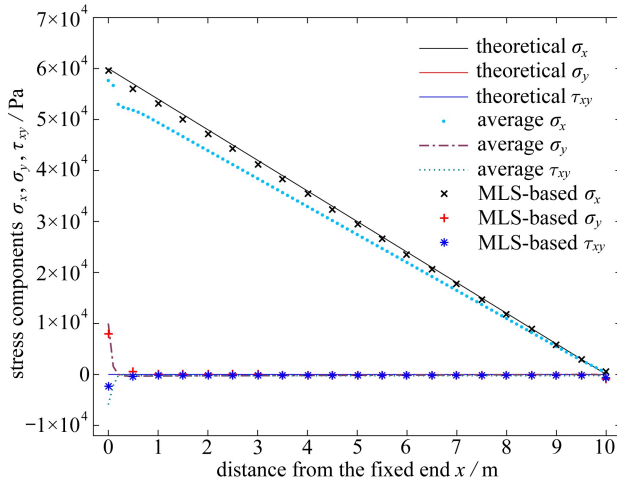


图 5 比较采用不同后处理方法的 DDA 得到的沿图 4(a)中梁上表面  $\overline{AB}$  上分布的应力

Fig. 5 Comparison of stress distributions along top surface  $\overline{AB}$  of the cantilever beam shown in fig. 4(a) solved through DDA with different post-processing methods

### 3.2 算例 2

考虑如图 6(a)所示的中间带有圆孔的薄板,薄板边长为  $2L = 20$  m,圆孔的直径为  $d = 2$  m.取平面直角坐标系的原点在中间圆孔的圆心处,且  $x$  轴水平向右.薄板满足线弹性各向同性,弹性模量  $E = 3$  GPa, Poisson 比  $\nu = 0.3$ .薄板左右两侧  $\{(x, y) : x = \pm L\}$  受到集度为  $q = 1$  MPa 的均布拉伸应力作用.该问题有如下解析解<sup>[20]</sup>:

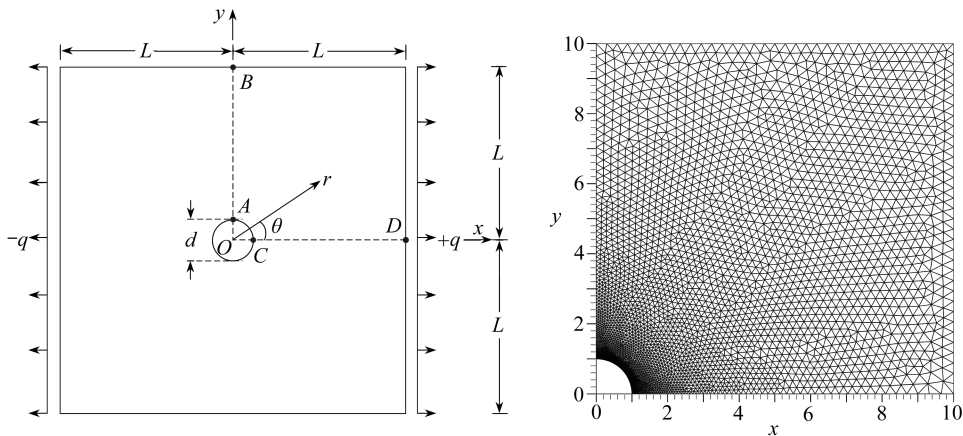
$$\sigma_x = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta), \tag{23a}$$

$$\sigma_y = -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta), \tag{23b}$$



$$\tau_{xy} = -\frac{a^2}{r^2} \left( \frac{3}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta), \quad (23c)$$

其中,  $a = d/2$  为中间圆孔的半径,  $(r, \theta)$  为极坐标系坐标, 圆孔圆心为极点,  $x$  轴正向的极角为  $\theta = 0$ , 每个应力分量的单位为 MPa.



(a) 几何模型和坐标系设置

(b) 对 1/4 模型所采用的无结构三角形网格

(a) The geometry model and the coordinate system

(b) The unstructured triangular mesh for the 1/4 model

图 6 算例 2 两侧受拉伸应力作用的中间带圆孔薄板

Fig. 6 The thin plate with a center hole under the tension along the two sides in example 2

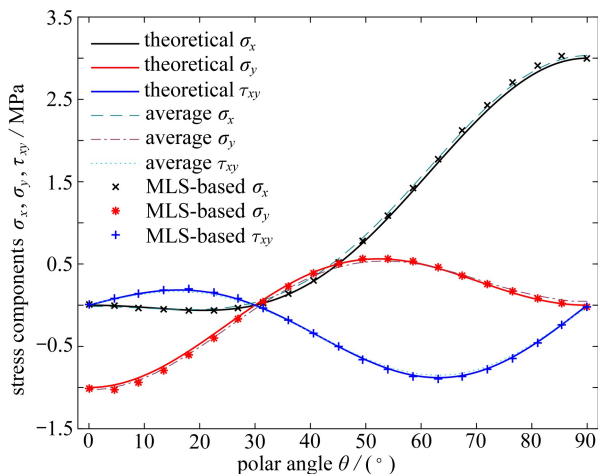


图 7 基于不同后处理方法得到的算例 2 中沿弧线  $\widehat{AC}$  分布的应力分量变化曲线与解析解的比较

Fig. 7 Comparison between stress components along arc  $\widehat{AC}$  computed with different post-processing procedures and analytical solutions in example 2

下面采用基于 BBM 的 DDA 求解这一问题, 并采用二次 MLS 插值基函数对结果进行应力恢复. 从图 6(a) 可知该模型关于原点对称, 因此仅需考虑第一象限内的 1/4 模型  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L\}$ . 将 1/4 薄板模型看做一个块体, 采用图 6(b) 所示无结构三角形网格对其进行几何离散, 包含 6 956 个单元和 3 613 个节点. 此时需在对称线  $\overline{AB}$  和  $\overline{CD}$  上引入以下位移边界条件:

$$u_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{AB} = \left\{ (x, y) : x = 0, \frac{d}{2} \leq L \right\}, \quad (24a)$$

$$u_y(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{CD} = \left\{ (x, y) : \frac{d}{2} \leq L, y = 0 \right\}, \quad (24b)$$

其中,  $u_x$  和  $u_y$  分别是沿  $x$  轴和  $y$  轴的位移分量. 在基于 BBM 的 DDA 中, 以上边界条件采用罚函数法施加, 罚函数取为 1 000 倍薄板剪切模量.

图 7 绘制了计算得到的 3 个应力分量  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  沿 1/4 圆孔圆周  $\widehat{AC} = \{(r, \theta) : r = 1, 0 \leq \theta \leq 90^\circ\}$  的变化曲线, 并与式(23)给出的解析解进行比较, theoretical 表示解析解, average 表示基于平均值后处理的结果, MLS-based 表示基于 MLS 插值方法后处理的结果. 从图中可以看到, 基于 MLS 后处理的 DDA 所得到的应力曲线比采用平均值后处理方法的结果更符合解析解曲线, 因此更加精确.

在表 1 中, 对比了采用不同后处理方法的子块体 DDA 得到的沿圆孔 1/4 圆周  $\widehat{AC}$  每个应力分量与解析解的相对误差,  $\delta(\sigma_x)$ ,  $\delta(\sigma_y)$ ,  $\delta(\tau_{xy})$  分别由将  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  代入式(25)得到. 误差按照下式计算:

$$\delta(\sigma) = \left( \sum_{i=1}^N |\sigma_i^* - \bar{\sigma}_i|^2 \right)^{1/2} / \left( \sum_{i=1}^N \bar{\sigma}_i^2 \right)^{1/2}. \quad (25)$$

从表 1 可以看出, MLS 后处理后的每个应力分量的精确度都比采用平均值后处理的结果要好.

表 1 不同后处理方法解得的沿弧线  $\widehat{AC}$  分布的应力分量的相对误差

Table 1 The relative errors of stress components along arc  $\widehat{AC}$  obtained from different post-processing procedures

post-processing procedure	$\delta(\sigma_x) / \%$	$\delta(\sigma_y) / \%$	$\delta(\tau_{xy}) / \%$
average-based post-processing	2.84	6.90	3.79
MLS-based post-processing	2.40	5.66	2.25

## 4 结 论

本文将 MLS 插值近似引入子块体 DDA 后处理, 推导了 MLS 形函数及其导数, 并给出了利用子块体 DDA 得到的节点位移计算块体应力分布的公式. 与已有 DDA 应力恢复算法相比, 基于 MLS 插值的后处理方法能够给出块体内任意点的应力, 通过提高插值多项式基函数的最高次数可以得到高阶变化的块体应力分布. 数值算例验证了本文方法的精确性和有效性. 与平均值方法相比, 基于 MLS 插值的后处理方法能够更加真实地反映子块体 DDA 得到的应力分布结果. 本文所提出的方法适用于二维和三维 DDA.

### 参考文献 (References):

- [1] SHI Gen-hua. Discontinuous deformation analysis; a new numerical model for the statics and dynamics of block systems[D]. Berkeley, SF, USA: University of California, Berkeley, 1988.
- [2] JIAO Yu-yong, ZHANG Huan-qiang, ZHANG Xiu-li, et al. A two-dimensional coupled hydro-mechanical discontinuum model for simulating rock hydraulic fracturing[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2015, **39**(5): 457-481.
- [3] Morgan W E, Aral M M. An implicitly coupled hydro-geomechanical model for hydraulic fracture simulation with the discontinuous deformation analysis[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2015, **73**: 82-94.

- [4] ZHENG Hong, LI Xiao-kai. Mixed linear complementarity formulation of discontinuous deformation analysis[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2015, **75**: 23-32.
- [5] 邬爱清, 刘晓莹, 张杨, 等. 基于 DDA 的弹性力学全高阶多项式位移逼近方法及其实例验证[J]. *固体力学学报*, 2014, **35**(2): 142-149.(WU Ai-qing, LIU Xiao-ying, ZHANG Yang, et al. A DDA based complete and high order polynomial displacement approximation method in elastic mechanics and its cases verification[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2014, **35**(2): 142-149.(in Chinese))
- [6] Beyabanaki S A R, Jafari A, Biabanaki S O R. Nodal-based three-dimensional discontinuous deformation analysis (3-D DDA) [J]. *Computers and Geotechnics*, 2009, **36**(3): 359-372.
- [7] CHOO Ling-qian, ZHAO Zhi-ye, CHEN Hui-mei, et al. Hydraulic fracturing modeling using the discontinuous deformation analysis (DDA) method[J]. *Computers and Geotechnics*, 2016, **76**: 12-22.
- [8] 马永政, 郑宏, 李春光. 耦合无网格法的非连续变形分析法研究[J]. *岩石力学与工程学报*, 2007, **26**(S2): 4195-4201.(MA Yong-zheng, ZHENG Hong, LI Chun-guang. Research on discontinuous deformation analysis coupled with meshfree methods[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, **26**(S2): 4195-4201.(in Chinese))
- [9] 马永政, 郑宏, 李春光. 应用自然邻接点插值法的块体非连续变形分析[J]. *岩土力学*, 2008, **29**(1): 119-124.(MA Yong-zheng, ZHENG Hong, LI Chun-guang. Applying natural neighbor interpolation to discontinuous deformation analysis of block system[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, **29**(1): 119-124.(in Chinese))
- [10] 马永政, 蔡可键, 郑宏. 混合多位移模式的非连续变形分析法研究[J]. *岩土力学*, 2016, **37**(3): 867-874.(MA Yong-zheng, CAI Ke-jian, ZHENG Hong. An analysis of discontinuous deformation with mixed multiple deformation modes[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, **37**(3): 867-874.(in Chinese))
- [11] NING You-jun, YANG Jun, AN Xin-mei, et al. Modelling rock fracturing and blast-induced rock mass failure via advanced discretisation within the discontinuous deformation analysis framework[J]. *Computers and Geotechnics*, 2011, **38**(1): 40-49.
- [12] JIAO Yu-yong, ZHANG Xiu-li, ZHAO Jian. Two-dimensional DDA contact constitutive model for simulating rock fragmentation[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, **138**(2): 199-209.
- [13] ZHAO Zhi-ye, GU Jiong. Stress recovery procedure for discontinuous deformation analysis [J]. *Advances in Engineering Software*, 2009, **40**(1): 52-57.
- [14] 孙新志, 李小林. 复变量移动最小二乘近似在 Sobolev 空间中的误差估计[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(4): 416-425.(SUN Xin-zhi, LI Xiao-lin. Error estimates for the complex variable moving least square approximation in Sobolev spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 416-425.(in Chinese))
- [15] Tabbara M, Blacker T, Belytschko T. Finite element derivative recovery by moving least square interpolants[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, **117**(1/2): 211-223.
- [16] Bordas S, Duflo M. Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **96**(35/36): 3381-3399.
- [17] Ródenas J J, González-Estrada O A, Fuenmayor F J, et al. Enhanced error estimator based

- on a nearly equilibrated moving least squares recovery technique for FEM and XFEM [J]. *Computational Mechanics*, 2013, **52**(2): 321-344.
- [18] SUN Yue, CHEN Qian, FENG Xiang-chu, et al. Discontinuous deformation analysis enriched by the bonding block model[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, **2015**: 723263. doi: 10.1155/2015/723263.
- [19] 邬爱清, 冯细霞, 卢波. 非连续变形分析中时间步及弹簧刚度取值研究[J]. 岩土力学, 2015, **36**(3): 891-897. (WU Ai-qing, FENG Xi-xia, LU Bo. Parametric research on time step and spring stiffness in DDA[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, **36**(3): 891-897. (in Chinese))
- [20] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Companies Inc, 1970.

## MLS-Based Postprocessing Procedure for Discontinuous Deformation Analysis

SUN Yue<sup>1</sup>, FENG Xiang-chu<sup>1</sup>, XIAO Jun<sup>2</sup>, WANG Ying<sup>2</sup>

(1. *School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, P.R.China;*

*2.School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P.R.China)*

**Abstract:** The discontinuous deformation analysis (DDA) simulates fracture propagations by introducing fictitious joint meshes in blocks to generate sub-blocks. In order to obtain accurate stress distributions with this method, a stress recovery procedure was proposed based on the moving least squares (MLS) interpolation technique. With the MLS shape functions and their derivatives, the stress at any point within a block can be expressed by means of nodal displacements. Numerical examples were given to verify the accuracy and effectiveness of the proposed method. Comparison of the stress results between the analytical method, the averaging postprocessing method and the proposed MLS-based postprocessing procedure indicates that, the MLS-based stress recovery procedure is of high accuracy in providing more reliable block stress distributions.

**Key words:** meshless method; moving least squares interpolation; stress recovery; discontinuous deformation analysis; bonding block model

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(61271294;61471338)

引用本文/Cite this paper:

孙越, 冯象初, 肖俊, 王颖. 非连续变形分析的 MLS 后处理方法[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(7): 743-754.

SUN Yue, FENG Xiang-chu, XIAO Jun, WANG Ying. MLS-based postprocessing procedure for discontinuous deformation analysis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(7): 743-754.