

考虑损伤的修正梯度弹性理论*

赵冰, 刘韬, 贺剑辉, 朱浩睿, 李威

(长沙理工大学 土木与建筑学院, 长沙 410004)

摘要: 梯度弹性理论在描述材料微结构起主导作用的力学行为时具有显著优势,将其与损伤理论相结合,可在材料破坏研究中考虑微结构的影响.基于修正梯度弹性理论,将应变张量、应变梯度张量和损伤变量作为 Helmholtz 自由能函数的状态变量,并在自然状态附近对自由能函数作 Taylor 展开,进而由热力学基本定律,推导出修正梯度弹性损伤理论本构方程的一般形式.编制有限元程序,模拟土样损伤局部化带的发展演化过程.结果表明,修正梯度弹性损伤理论消除了网格依赖性;损伤局部化带不是与损伤同时发生,而是在损伤发展到一定程度后再逐渐显现出来.

关键词: 损伤局部化; 应变梯度; 内部特征长度; 网格依赖性

中图分类号: O346.5

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.370285

引言

近 30 年来,梯度弹性理论已经取得了长足发展,它在描述材料微结构起主导作用的力学行为(例如尺寸效应、剪切边界层等问题)时具有显著优势^[1-2].材料破坏也属于材料微结构起主导作用的力学行为,显然,梯度弹性理论无法描述此类力学行为.将损伤理论与梯度弹性理论相结合,就可在材料破坏研究中考虑材料微结构的影响.

早期的梯度弹性理论可以追溯到 20 世纪初 Cosserat 兄弟^[3]为了考虑微结构的影响而建立的 Cosserat 理论.该理论在本构方程中引入了偶应力及与之共轭的微旋转变量,以此表述材料的微结构特征.但是,该理论的应变梯度项仅包含旋转梯度、不包含拉伸梯度,是不完备的.20 世纪 60 年代, Toupin^[4-5]、Mindlin 等^[6]最初将研究的重点放在扩展 Cosserat 理论和偶应力(couple stress)理论上.1964 年, Mindlin^[7-9]在宏观和微观两种尺度下给出了动能密度和变形能密度的表达式,从而发展了一种较为完备的梯度理论,但即使是各向同性材料,该理论的本构系数也有 18 个,在实际运用中具有很大的局限性.另外还有两种影响较大的梯度弹性理论.其一是 Eringen 在 1983 年采用应力梯度项替代积分型非局部理论中的积分项,得到了应力梯度弹性理论的偏微分方程^[10-11],本构方程中也因此包含了一个与权函数有关的长度参数;其二是 Aifantis 和其团队在经典理论本构关系中引入了应变的 Laplace(拉普拉斯)算子,推导了有限变形^[12]和无限小变形^[13-15]条件下的梯度弹性理论,其本构关系中除了 Lamé(拉梅)常数还包含了内部长度参数. Aifantis 理论被认为是 Mindlin 理论的特殊形式,促进了梯度弹性理论的解析解和数值求解策略的发展^[15].也有学者将应变梯度理论应用于 Timoshenko 梁的分析中^[16].

2014 年, Song 等^[2]通过应变和应变梯度之比定义了一个内部特征长度向量,然后基于应

* 收稿日期: 2016-09-20; 修订日期: 2016-11-13

作者简介: 赵冰(1972—),男,副教授,博士(通讯作者). E-mail: zhaob_m-y@163.com).

变能密度展开法,认为梯度弹性体的应变能密度函数同时取决于应变和应变梯度,得到了一种完备的梯度弹性理论——修正梯度弹性理论(MGE).该理论不仅包含旋转梯度还包含拉伸梯度,并得到了剪切边界层的合理解答^[2].

上述各种梯度弹性理论包含了应变或应力的梯度项.如此处理的基本思想是:经典理论应变代表的是代表性体积(representative element volume, REV)上的应变统计平均值.当应变梯度很小时,REV上的统计平均值可以较为恰当地描述介质的力学行为;当材料出现局部化变形(应变梯度较大)时,应变在REV上呈高次非线性变化,其统计平均值就难以如实地反映出材料的强度和变形行为.另外,由于材料不均匀性总是存在,应变一旦产生,应变梯度也将随之产生.REV上的自由能状态也必然会随应变梯度的改变而改变.在描述材料微结构起主导作用的力学行为时,各种梯度弹性理论保持了控制方程的椭圆性,可以克服病态的网格依赖性.但是上述理论依旧是在弹性范畴内提出的,无法描述材料破坏的发生、发展过程.

研究材料破坏时,人们常常采用损伤理论.但经典损伤理论难以考虑材料微结构的影响.为此,人们尝试从损伤角度来建立各种梯度理论,目前主要有两类.其一是以Pijaudier-Cabot和Bažant等提出的多种非局部损伤理论^[17-19].他们将本构关系中的某个场变量在一定空间中利用权函数进行平均化处理,而对其余变量仍然用原来的模型表达,从而建立了一系列损伤模型.另一类以Frémond和Nedjar^[20]的工作为代表,他们在自由能函数中考虑了损伤梯度(标量损伤的空间梯度)的影响,从能量耗散梯度依赖的角度得到损伤本构律和损伤演化律.但是,由于Frémond和Nedjar不加说明地假定了自由能函数和耗散势函数的具体形式,影响了理论的完备性;更为重要的是,他们在模型中没有引入内部长度参数,也没有从理论上描述损伤局部化的启动机制.国内,赵吉东、周维垣等^[21]针对岩石类材料,借助应变梯度理论引入内部长度参数,认为自由能函数同时依赖于应变和应变梯度,引入高阶应力,建立了损伤力学框架下的应变梯度-损伤本构模型.

本文基于修正梯度弹性理论^[2],以应变张量 ε_{ij} 、应变梯度张量 η_{ijk} 和损伤变量 D 作为Helmholtz自由能 Ψ 的状态变量,根据不可逆热力学,推导出修正梯度弹性损伤理论本构方程.编制相应程序数值模拟土样破坏过程,分析材料破坏时的网格敏感性.

1 修正梯度弹性损伤理论

1.1 修正梯度弹性损伤理论

经典损伤理论Helmholtz自由能函数的状态变量通常为应变张量 ε_{ij} 和损伤变量 D ^[22].为了考虑应变梯度对损伤局部化的影响,本文将应变张量 ε_{ij} 、应变梯度张量 η_{ijk} 和损伤变量 D 同时作为Helmholtz自由能函数 Ψ 的状态变量:

$$\Psi = \Psi(\varepsilon_{ij}, \eta_{ijk}, D), \quad (1)$$

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_{ijk}} \dot{\eta}_{ijk} + \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D}, \quad (2)$$

其中

$$\eta_{ijk} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \quad (k = x, y, z). \quad (3)$$

对于一个等温的无穷小变形过程,Clausius-Duhem耗散不等式为

$$\sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij} + \tau_{ijk} \cdot \dot{\eta}_{ijk} - \dot{\Psi} \geq 0, \quad (4)$$

式中, σ_{ij} 为Cauchy应力张量, τ_{ijk} 为高阶应力张量.

将式(2)代入式(4)有

$$\left(\sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \left[\left(\tau_{ijk} - \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_{ijk}} \right) \dot{\eta}_{ijk} + \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} \right] \geq 0 \quad (5)$$

对于任意 $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\eta}_{ijk}$ 均成立,这就要求

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \tau_{ijk} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_{ijk}}, \quad (6)$$

$$- \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} \geq 0. \quad (7)$$

引入修正梯度弹性理论中的内部特征长度^[2]:

$$l_k^e = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta_{ijk}}, \quad (8)$$

其中, l_k^e 是一个细观材料参数,具有长度的量纲,与材料的微结构有关,用以表征材料的微结构特征.

将 Helmholtz 自由能函数 Ψ 在无初应力的自然状态 ($\varepsilon_{ij} = 0, \sigma_{ij} = 0, \eta_{ijk} = 0, D = 0$) 下作 Taylor 展开.在展开式中,保留到应变张量 ε_{ij} 和应变梯度张量 η_{ijk} 的共同二次项,保留到损伤变量 D 的第 N 次项, Ψ 可进一步表达为

$$\begin{aligned} \Psi = & \Psi_0 + \sum_{r=1}^N A^{(r)} D^r + \sum_{r=0}^N B_{ij}^{(r)} D^r \varepsilon_{ij} + \sum_{r=0}^N E_{ijmnq}^{(r)} D^r \varepsilon_{ij} \eta_{mnq} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N C_{ijmn}^{(r)} D^r \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} + \sum_{r=0}^N H_{ijk}^{(r)} D^r \eta_{ijk} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N K_{ijkmnq}^{(r)} D^r \eta_{ijk} \eta_{mnq}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中, Ψ_0 表示初始损伤状态的 Helmholtz 自由能, $A^{(r)}$ 为标量系数, $B_{ij}^{(r)}, E_{ijmnq}^{(r)}, C_{ijmn}^{(r)}, H_{ijk}^{(r)}, K_{ijkmnq}^{(r)}$ 为张量系数:

$$B_{ij}^{(r)} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0^{(r)}, \quad (10)$$

$$E_{ijmnq}^{(r)} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \eta_{mnq}} \right)_0^{(r)} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \eta_{mnq}} \right)_0^{(r)} = l_q^e \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} \right)_0^{(r)} = l_q^e C_{ijmn}^{(r)}, \quad (11)$$

$$C_{ijmn}^{(r)} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} \right)_0^{(r)}, \quad (12)$$

$$H_{ijk}^{(r)} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta_{ijk}} \right)_0^{(r)} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta_{ijk}} \right)_0^{(r)} = l_k^e \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0^{(r)} = l_k^e B_{ij}^{(r)}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} K_{ijkmnq}^{(r)} = & \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta_{ijk} \partial \eta_{mnq}} \right)_0^{(r)} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta_{ijk}} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial \eta_{mnq}} \right)_0^{(r)} = \\ & l_k^e l_q^e \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{mn}} \right)_0^{(r)} = l_k^e l_q^e C_{ijmn}^{(r)}. \end{aligned} \quad (14)$$

将式(10)~(14)代入式(9),有

$$\begin{aligned} \Psi = & \Psi_0 + \sum_{r=1}^N A^{(r)} D^r + \sum_{r=0}^N B_{ij}^{(r)} D^r \varepsilon_{ij} + \sum_{r=0}^N l_q^e C_{ijmn}^{(r)} D^r \varepsilon_{ij} \eta_{mnq} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N C_{ijmn}^{(r)} D^r \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} + \sum_{r=0}^N l_k^e B_{ij}^{(r)} D^r \eta_{ijk} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^N l_k^e l_q^e C_{ijmn}^{(r)} D^r \eta_{ijk} \eta_{mnq}. \end{aligned} \quad (15)$$

将式(6)代入式(15), σ_{ij}, τ_{ijk} 可表示为

$$\sigma_{ij} = \sum_{r=0}^N B_{ij}^{(r)} D^r + \sum_{r=0}^N l_q^e C_{ijmn}^{(r)} D^r \eta_{mnq} + \sum_{r=0}^N C_{ijmn}^{(r)} D^r \varepsilon_{mn}, \quad (16)$$

$$\tau_{ijk} = \sum_{r=0}^N l_k^e C_{ijmn}^{(r)} D^r \varepsilon_{mn} + \sum_{r=0}^N l_k^e B_{ij}^{(r)} D^r + \sum_{r=0}^N l_k^e l_q^e C_{ijmn}^{(r)} D^r \eta_{mnq}. \quad (17)$$

在任意损伤状态下,材料卸载至初始状态时 $\sigma_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0, \eta_{ijk} = 0$, 则由式(16)、(17)可知

$$\sum_{r=0}^N B_{ij}^{(r)} D^r = 0. \quad (18)$$

因此,式(16)、(17)可改写为

$$\sigma_{ij} = \sum_{r=0}^N l_q^e C_{ijmn}^{(r)} D^r \eta_{mnq} + \sum_{r=0}^N C_{ijmn}^{(r)} D^r \varepsilon_{mn} = \sum_{r=0}^N C_{ijmn}^{(r)} D^r (l_q^e \eta_{mnq} + \varepsilon_{mn}), \quad (19)$$

$$\tau_{ijk} = \sum_{r=0}^N l_k^e C_{ijmn}^{(r)} D^r \varepsilon_{mn} + \sum_{r=0}^N l_k^e l_q^e C_{ijmn}^{(r)} D^r \eta_{mnq} = \sum_{r=0}^N C_{ijmn}^{(r)} D^r (\varepsilon_{mn} + l_q^e \eta_{mnq}) l_k^e. \quad (20)$$

记

$$\sum_{r=0}^N C_{ijmn}^{(r)} D^r = D_{ijmn}^d \quad (21)$$

为四阶弹性损伤张量,式(19)、(20)分别可以写为

$$\sigma_{ij} = D_{ijmn}^d (\varepsilon_{mn} + l_q^e \eta_{mnq}), \quad (22)$$

$$\tau_{ijk} = D_{ijmn}^d (\varepsilon_{ij} + l_q^e \eta_{mnq}) l_k^e. \quad (23)$$

式(22)、(23)即为修正梯度弹性损伤理论本构方程。

1) 当损伤变量 $D = 0$ 、内部特征长度 $l_q^e = 0$ 时,式(22)退化为线弹性应力-应变本构方程:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}^{(0)} \varepsilon_{mn}, \quad (24)$$

其中, $C_{ijmn}^{(0)}$ 为弹性张量。

2) 当取 $N = 1, D \neq 0, C_{ijmn}^{(1)} = -C_{ijmn}^{(0)}$, 且忽略内部特征长度的影响,即 $l_q^e = 0$, 式(22)退化为基于应变等效假设给出的线弹性损伤理论本构方程:

$$\sigma_{ij} = (1 - D) C_{ijmn} \varepsilon_{mn}. \quad (25)$$

3) 当损伤变量 $D = 0$ 时,式(22)、(23)退化为修正梯度弹性本构方程^[2]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}^{(0)} (\varepsilon_{mn} + l_q^e \eta_{mnq}), \quad (26)$$

$$\tau_{ijk} = C_{ijmn}^{(0)} (\varepsilon_{mn} + l_q^e \eta_{mnq}) l_k^e. \quad (27)$$

1.2 岩土介质的损伤演化律

对于岩土介质的损伤演化律,本文选用沈珠江院士提出的非线性损伤演化律^[23],其损伤演化方程为

$$D = 1 - \exp(-a\varepsilon_v - b\varepsilon_s^m). \quad (28)$$

该损伤演化律认为,损伤变量与有效应变有关:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad (29)$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \quad (30)$$

a, b, m 均为损伤参数,可以通过侧限压缩试验和无侧限压缩试验测定^[23].依照文献[23]的取值,本文取 $a = 19.7, b = 763, m = 2$.

1.3 修正梯度弹性损伤理论的有限元实现

构造四节点矩形单元,每个节点有 8 个自由度: $u_i, u_{i,x}, u_{i,y}, u_{i,xy}, v_i, v_{i,x}, v_{i,y}, v_{i,xy}$, 单元总自

由度数为 32, 单元节点未知向量用 \mathbf{a}_e 表示:

$$\mathbf{a}_e = \left\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \right\}^T, \quad (31)$$

$$\mathbf{u}_i = \{u_i, u_{i,x}, u_{i,y}, u_{i,xy}, v_i, v_{i,x}, v_{i,y}, v_{i,xy}\}, \quad i = 1, 4. \quad (32)$$

单元内任意一点的位移为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}_e, \quad (33)$$

其中, \mathbf{N} 为双一维 Hermite 形函数, 使得位移场 \mathbf{u} 满足 C^1 连续性.

由式(22)和(23)可知, 修正梯度弹性理论本构方程中, 不仅包含经典弹性理论中的应变和应力, 还包含了应变和应力的梯度项; 定义广义应变向量 \mathbf{E} 和广义应力向量 \mathbf{R} 如下:

$$\mathbf{E} = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy} \quad \eta_{xxx} \quad \eta_{yyx} \quad \eta_{xyx} \quad \eta_{xxy} \quad \eta_{yyy} \quad \eta_{xyy} \}^T, \quad (34)$$

$$\mathbf{R} = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \quad \tau_{xxx} \quad \tau_{yyx} \quad \tau_{xyx} \quad \tau_{xxy} \quad \tau_{yyy} \quad \tau_{xyy} \}^T, \quad (35)$$

式中, 前三项分别为经典弹性理论的应变项和应力项; 后六项分别为应变梯度项和高阶应力项.

广义应变向量 \mathbf{E} 与单元节点未知向量 \mathbf{a}_e 的关系可表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}_e = \mathbf{B}\mathbf{a}_e, \quad (36)$$

其中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \quad (37)$$

为微分算子.

将广义应变向量代入式(22)、(23)的物理方程, 可得广义应力向量:

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}_{\text{grad}}^d \mathbf{E}, \quad (38)$$

其中 $\mathbf{D}_{\text{grad}}^d$ 为梯度弹性损伤矩阵, 同时为了保持量纲的一致性, $\mathbf{D}_{\text{grad}}^d$ 表示为

$$\mathbf{D}_{\text{grad}}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^d & l_x \mathbf{D}^d & l_y \mathbf{D}^d \\ l_x \mathbf{D}^d & l_x \mathbf{D}^d & l_x l_y \mathbf{D}^d \\ l_y \mathbf{D}^d & l_x l_y \mathbf{D}^d & l_y l_y \mathbf{D}^d \end{bmatrix}. \quad (39)$$

单元刚度矩阵可表示为

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{\text{grad}}^d \mathbf{B} dV = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{\text{grad}}^d \mathbf{B} dx dy, \quad (40)$$

其中, t 为单元厚度.

单元荷载向量为

$$\mathbf{P}_e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{S_e} \nabla \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{r}}^T dS, \quad (41)$$

其中, \mathbf{f} 为体积力向量, $\bar{\mathbf{t}}$ 为边界上的面积力向量, $\bar{\mathbf{r}}$ 为边界上的应力梯度向量.

$\mathbf{K}_e, \mathbf{P}_e$ 的具体推导参见文献[2]. 于是修正梯度弹性损伤理论的有限单元格式可写为

$$\mathbf{K}^d \mathbf{a} = \mathbf{P}, \quad (42)$$

其中

$$\mathbf{K}^d = \sum_{n_e} \mathbf{G}^T \mathbf{K}_e \mathbf{G}, \quad \mathbf{P} = \sum_{n_e} \mathbf{G}^T \mathbf{P}_e \quad (43)$$

分别是损伤总体刚度矩阵和总体荷载向量, \mathbf{G} 为组装矩阵。

离散化后的非线性有限元格式可以写为

$$\mathbf{K}^d(\mathbf{a}) = \mathbf{P}. \quad (44)$$

采用分级加载后的直接迭代法求解上述非线性方程组。依据本节的内容, 编制了 Fortran 语言有限元程序。

2 损伤局部化模拟结果

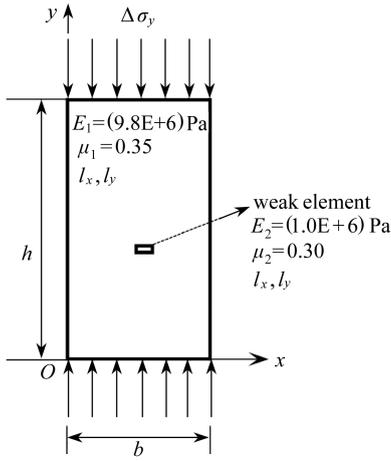


图1 单轴压缩试验数值模型几何示意图

Fig. 1 The numerical geometric model for the uniaxial compression test

假设一均质各向同性的平面应变土样模型, 高度 $h = 0.128 \text{ m}$, 宽度 $b = 0.064 \text{ m}$. 弹性模量 $E_1 = 9.8 \times 10^6 \text{ Pa}$, Poisson (泊松) 比 $\mu_1 = 0.35$. 在试件正中间设置一个弱单元, 其弹性模量 $E_2 = 1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$, Poisson 比 $\mu_2 = 0.30$, 如图 1 所示. 采用自编有限元程序模拟试样在单向压缩试验中损伤局部化带的发展演化过程。

2.1 消除网格依赖性

在 $16 \times 32, 32 \times 64, 64 \times 128$ 这 3 种有限元网格划分下, 取土样内部特征长度 $l_x = 0 \text{ m}$, $l_y = 0 \text{ m}$ (即线弹性损伤理论), 当轴向压应力 $\sigma_y = 130 \text{ kPa}$ 时, 得到的损伤云图如图 2 所示. 取土样内部特征长度 $l_x = 0 \text{ m}$, $l_y = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ (即考虑损伤的修正梯度弹性理论), 当轴向压应力 $\sigma_y = 130 \text{ kPa}$ 时, 得到的损伤云图如图 3 所示。

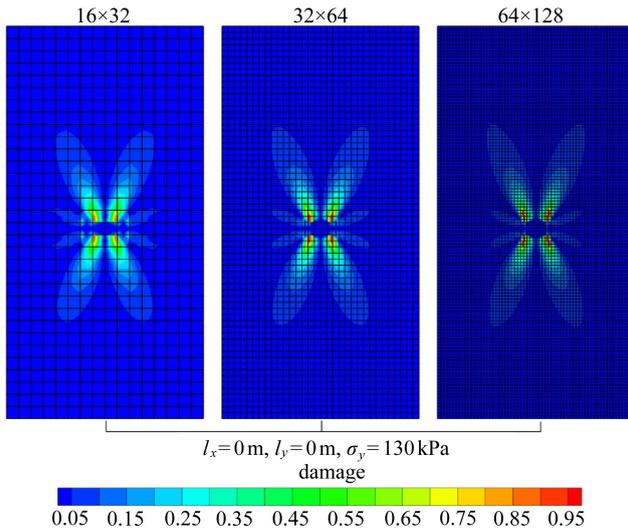


图2 不同有限元网格下的“X”型损伤局部化带图(经典损伤理论)

Fig. 2 X-shape bands of damage localization with different finite element mesh densities (under the classical damage theory)

从图 2 可以看出, 经典损伤理论在 3 种网格密度下的轮廓随着网格的加密而变窄, 有着明

显的网格依赖性.如同文献[24-25]所提到的,这种网格病态的依赖性将导致零耗能现象,使结果收敛到没有物理意义的解.从图3可以看出,考虑损伤的修正梯度弹性理论在3种网格密度下的轮廓线基本重合,即3个损伤局部化带的宽度一样,可以认为该计算结果与有限元网格的疏密无关;有限元网格越密,损伤局部化带轮廓线越平滑,得到的云图精确度越高.本文提出的修正梯度弹性损伤理论克服了经典损伤理论在损伤局部化分析时的网格依赖性.

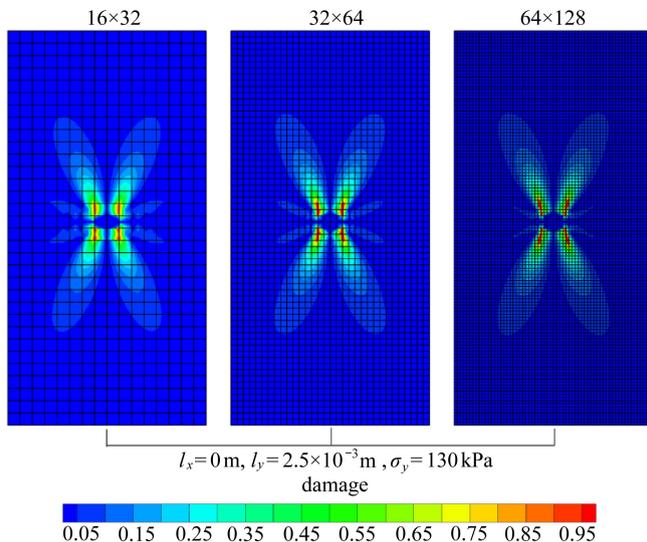


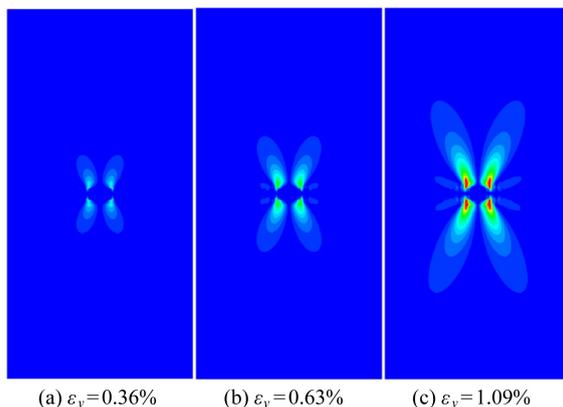
图3 不同有限元网格下的“X”型损伤局部化带图(考虑损伤的修正梯度弹性理论)

Fig. 3 X-shape bands of damage localization with different finite element mesh densities (under the modified gradient elasticity theory considering damage)

2.2 损伤局部化过程

取 32×64 的有限元网格,采用逐级加载对试样破坏过程进行分析.当材料内部特征长度 $l_x = 0$ m, $l_y = 2.5 \times 10^{-3}$ m 时试件破坏过程的损伤云图如图4,其中 ε_y 为试样的轴向应变.

从图4可以看出,本文方法清晰地展现了损伤局部化的发生、发展过程.损伤局部化带并不是与损伤同时发生,而是在损伤发展到一定程度后再逐渐显现出来.损伤局部化带的发展程度控制着试件最后的破坏状态.



(a) $\varepsilon_y = 0.36\%$

(b) $\varepsilon_y = 0.63\%$

(c) $\varepsilon_y = 1.09\%$

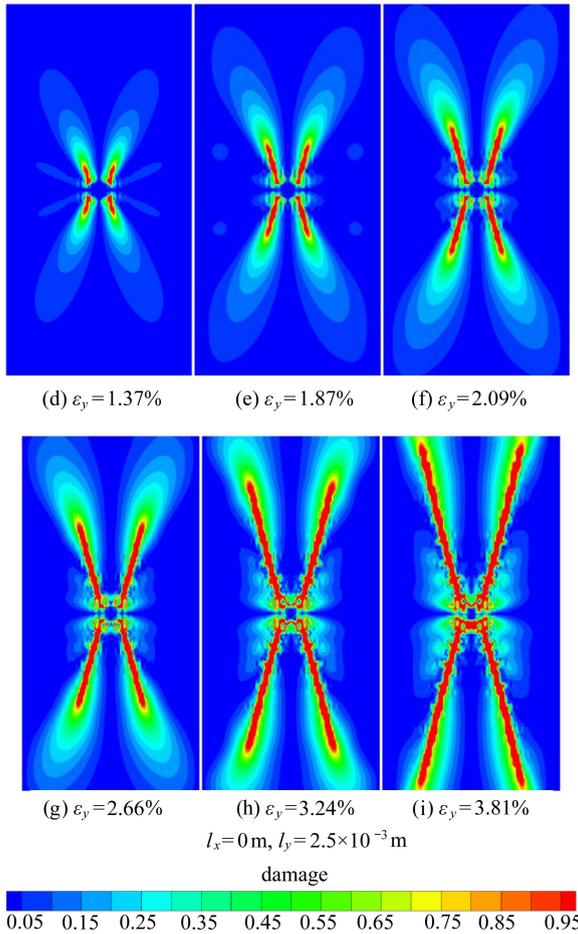


图4 损伤局部化带的发展过程

Fig. 4 The development process of the damage localization band

3 结 论

在修正梯度弹性理论的基础上,在本构模型中引入损伤,建立修正梯度弹性损伤理论并编制有限元程序开展损伤局部化数值试验,得到以下结论:

- 1) 修正梯度弹性损伤理论消除了数值模拟材料破坏过程的网格敏感性。
- 2) 修正梯度弹性损伤理论能模拟岩土材料损伤局部化的发生、发展直到破坏的整个过程;损伤局部化带并不是与损伤同时发生,而是在损伤发展到一定程度之后再逐渐显现出来。

致谢 本文作者衷心感谢岩土力学与地质环境保护重庆市重点实验室基金(CKLG-GP2013-01)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] Askes H, Aifantis E C. Numerical modeling of size effects with gradient elasticity—formulation, meshless discretization and examples[J]. *International Journal of Fracture*, 2002, **117** (4): 347-358.

- [2] SONG Zhan-ping, ZHAO Bing, HE Jian-hui, et al. Modified gradient elasticity and its finite element method for shear boundary layer analysis[J]. *Mechanics Research Communications*, 2014, **62**: 146-154.
- [3] Cosserat E, Cosserat F. Théorie des corps déformables[J]. *Hermann Archives*, 1909.
- [4] Toupin R A. Elastic materials with couple-stresses[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 385-414.
- [5] Toupin R A. Theories of elasticity with couple-stress[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **17**(2): 85-112.
- [6] Mindlin R D, Tiersten H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.
- [7] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **16**(1): 51-78.
- [8] Mindlin R D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1965, **1**(4): 417-438.
- [9] Mindlin R D. *Theories of Elastic Continua and Crystal Lattice Theories*[M]//Kröner E, ed. *Mechanics of Generalized Continua*. Berlin: Springer, 1968: 312-320.
- [10] Eringen A C. Theories of nonlocal plasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1983, **21**(7): 741-751.
- [11] Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, **54**(9): 4703-4710.
- [12] Triantafyllidis N, Aifantis E C. A gradient approach to localization of deformation: I. hyperelastic materials[J]. *Journal of Elasticity*, 1986, **16**(3): 225-237.
- [13] Aifantis E C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1992, **30**(10): 1279-1299.
- [14] Altan S B, Aifantis E C. On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity[J]. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1992, **26**(2): 319-324.
- [15] Ru C Q, Aifantis E C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity[J]. *Acta Mechanica*, 1993, **101**(1): 59-68.
- [16] 徐晓建, 邓子辰. 多层简化应变梯度 Timoshenko 梁的变分原理分析[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(3): 235-244. (XU Xiao-jian, DENG Zi-chen. The variational principle for multi-layer Timoshenko beam systems based on the simplified strain gradient theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(3): 235-244. (in Chinese))
- [17] Pijaudier-Cabot G, Bažant Z P. Nonlocal damage theory[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, **113**(10): 1512-1533.
- [18] Bažant Z P, Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, **128**(11): 1119-1149.
- [19] Bažant Z P, Pijaudier-Cabot G. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1988, **55**(2): 287-293.
- [20] Frémond M, Nedjar B. Damage, gradient of damage and principle of virtual power[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, **33**(8): 1083-1103.
- [21] 赵吉东, 周维垣, 刘元高, 等. 岩石类材料应变梯度损伤模型研究及应用[J]. 水利学报, 2002(7): 70-74. (ZHAO Ji-dong, ZHOU Wei-yuan, LIU Yuan-gao, et al. Strain gradient enhanced damage model for rock material and its application[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2002(7): 70-74. (in Chinese))

- [22] 唐雪松, 蒋持平, 郑健龙. 各向同性弹性损伤本构方程的一般形式[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(12): 1317-1323. (TANG Xue-song, JIANG Chi-ping, ZHENG Jian-long. General expressions of constitutive equations for isotropic elastic damaged materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(12): 1317-1323. (in Chinese))
- [23] 沈珠江. 结构性粘土的非线性损伤力学模型[J]. 水利水运科学研究, 1993(3): 247-255. (SHEN Zhu-jiang. A nonlinear damage model for structured clay[J]. *Hydro-Science and Engineering*, 1993(3): 247-255. (in Chinese))
- [24] Belytschko T, Bažant Z P, Yul-Woong H, et al. Strain-softening materials and finite-element solutions[J]. *Computers & Structures*, 1986, **23**(2): 163-180.
- [25] Bažant Z P, CHANG Ta-peng. Nonlocal finite element analysis of strain-softening solids[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, **113**(1): 89-105.

A Modified Gradient Elastic Theory Considering Damage

ZHAO Bing, LIU Tao, HE Jian-hui, ZHU Hao-ruì, LI Wei

(School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410004, P.R.China)

Abstract: To describe the material mechanics behaviors depending on microstructure, the gradient elastic theory with significant advantages was investigated. The gradient elastic theory was combined with the damage theory to consider the influence of microstructure on material failure. Then a modified gradient elasticity damage theory was proposed, based on which the basic law of thermodynamics, the strain tensor, the damage variable and the scalar strain gradient tensor were taken as the state variables of the Helmholtz free energy. The Taylor expansion of the Helmholtz free energy function was conducted near the natural state, and the general expressions of the modified gradient elasticity damage constitutive functions were derived. The finite element code was programmed to simulate the development process of damage localization in soil specimens. The results show that, the traditional mesh dependence in numerical simulation can be removed under the modified gradient elasticity damage theory. The band of the damage localization does not concur with the damage, but occurs after the damage development to some extent.

Key words: damage localization; strain gradient; internal length scale; mesh dependence

引用本文/Cite this paper:

赵冰, 刘韬, 贺剑辉, 朱浩睿, 李威. 考虑损伤的修正梯度弹性理论[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(9): 999-1008.

ZHAO Bing, LIU Tao, HE Jian-hui, ZHU Hao-ruì, LI Wei. A modified gradient elastic theory considering damage[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(9): 999-1008.