文章编号:1000-0887(2017)09-1053-08

完整 Coriolis 力作用下带有外源强迫的非线性 KdV 方程*

尹晓军[1,2], 杨联贵[1], 宋 健[3], 张瑞岗[1], 杨红丽[1], 刘全生[1]

(1. 内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021;
2. 内蒙古农业大学 理学院, 呼和浩特 010018;
3. 内蒙古工业大学 理学院, 呼和浩特 010051)

摘要: 利用摄动方法,从描写既有 Coriolis 力垂直分量又含有水平分量的位涡方程出发,给出了近赤道非线性 Rossby 波所满足的具有外源强迫的非线性 KdV 方程,并利用 Jacobi 椭圆函数展开法,求解了改进后的非线性 KdV 方程的行波解及孤立波解.通过分析 KdV 方程的行波解,指出 Coriolis 力的水平分量和外源对 Rossby 波动的影响.

关 键 词: 完整 Coriolis 力; Jacobi 椭圆函数; 非线性 Rossby 波
中图分类号: P401 **文献标志码:** A doi: 10.21656/1000-0887.370297

引 言

在地球流体力学中,Rossby 波是地球流体中一种重要的波动,属于大尺度波动,因此 Rossby 波研究对大气和海洋运动有着重要的意义,而且许多自然现象都与 Rossby 波有着密不可分的联系,如木星红斑、大气阻塞及海洋环流的异常等现象.自从 Long[1] 和 Benney[2] 在 β 平面近似下(即球面效应)采用摄动方法对 Rossby 波做了开创性的研究,得到 Rossby 波的波速与振幅有关以来,国内外学者采用不同手段做了大量的理论研究工作,Boyd[3] 从赤道 β 平面浅水模式原始方程出发,研究了剪切纬向流对赤道 Rossby 孤立波的影响.之后,Boyd[4] 又采用多重尺度,在小振幅波理论下得到赤道 Rossby 孤立波振幅演变满足非线性 KdV 方程和 mKdV 方程.Redekopp[5] 考虑了切变基本流对孤立 Rossby 波的影响,得到 Rossby 波振幅演变满足改进的 KdV 方程,这项工作极大地推广了 Long 的结果.Charney 和 Straus[6] 在地形、非绝热加热和摩擦的正压大气模式下研究了 Rossby 波,这项工作开创了大气多平衡态非线性动力学的研究.赵强等[7] 从准地转位涡方程出发,采用摄动方法推导出含有切变基本流的赤道大气波动振幅满足的非线性 KdV 方程,解释了赤道大气中 Rossby 波与切变基本气流的弱非线性相互作用,但他们没有给出 Coriolis 力的水平分量和外源对 Rossby 波的影响.宋健等[8] 采用摄动方法研究了正压大气模式下具有 β 效应与地形效应的 Rossby 孤立波.巢纪平和徐昭[9] 讨论了热带扰动对于赤道 Rossby 波动的稳定性影响,指出在大洋西部,由于向极地方向经圈流的引入,赤道对

* **收稿日期:** 2016-09-28; **修订日期:** 2016-11-08
基金项目: 国家自然科学基金(11362012);国家自然科学基金青年科学基金(11202092;11301592)
作者简介: 尹晓军(1982—),男,讲师,博士生(E-mail: yinxiaojun_2002@163.com);
杨联贵(1961—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: lgyang@imu.edu.cn).

称的扰动模态对所有的波数都是不稳定的;对于大洋东部的向赤道流,对赤道对称的扰动却是稳定的.刘萍等[10]应用了一类 Schrödinger 方程的严格解解释了大气重力波的产生和传输机制.张永垂等[11]使用了一阶斜压 Rossby 波模型对北太平洋海表面高度的年际变化进行了预测.张永利和杨联贵[12]基于正压大气基本方程组,研究了地形 Rossby 波对大气能量的影响,从能量的角度分析了地形对西风的影响.汪萍等[13]采用数值模拟讨论了外源强迫作用下正压大气非线性特征.众多研究表明基本流的切变效应、β 效应、地形强迫效应、耗散和热外源都是诱导或者加强大气运动中 Rossby 孤立波产生的影响因子,这些研究工作都是采用“传统近似”[14],而没有考虑地球旋转的水平分量,就动力学而言,“传统近似”一直是个有争议的问题[15].White 等[16]和 Burger[17]通过尺度分析表明,对于大尺度运动,保留地球旋转水平分量 $2\Omega\cos\varphi$ 是可取的.Dellar 和 Salmon[18]在浅水方程模式下,推导出带有底地形的既含有 Coriolis 力垂直分量又含有水平分量的方程.Stewart 和 Dellar[19]通过分析在跨越赤道附近时深海洋流的数值解,证实了完整 Coriolis 力的重要性.Tort 和 Dubos[20]利用 Hamilton 原理,推导出了含有完整 Coriolis 力的浅水大气方程.赵强等[21]在半地转近似模式下,得到了完整 Coriolis 力作用下的非线性 Rossby 波解析解.杨洁等[22]利用修正的 Burger 模式获得了在完整 Coriolis 力和热源影响下的超长波解析解.

本文在近赤道 Rossby 波背景下,考虑了完整 Coriolis 力和热源的影响.利用摄动方法,从既有 Coriolis 力垂直分量又含有水平分量的位涡方程出发,导出了带有外源强迫的变系数 KdV 方程,最后通过 Jacobi 椭圆函数展开法,求出了带有外源强迫的变系数 KdV 方程的行波解及孤立波解.

1 方程的推导

1.1 控制方程

考虑既含有 Coriolis 力垂直分量又含有水平分量的位涡方程[18]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+f-f_H\frac{\partial B}{\partial y}\right]=Q, \tag{1}$$

其中,$f=\beta(y)y$ 和 f_H 分别为 Coriolis 力的垂直分量和水平分量,$B(x,y)$ 表示底地形函数,$\psi(x,y)$ 为流函数,Q 表示热源.其他符号和常规的表示相同.

侧边界条件为刚壁条件

$$\psi(y_1)=\psi(y_2)=0, \tag{2}$$

其中 $y=y_1, y=y_2$ 为南北方向的边界.

引入无量纲参数

$$\begin{cases}(x,y)=L_0(x^*,y^*),\ t=\dfrac{L_0}{U_0}t^*,\ \psi=L_0U_0\psi^*,\\ B=\dfrac{U_0H}{f_HL_0}B^*,\ \beta=\dfrac{U_0}{L_0^2}\beta^*,\ Q=\dfrac{U_0^3}{L_0^3}Q^*,\end{cases} \tag{3}$$

其中无量纲的物理量带有 $*$ 号,L_0 和 H 分别表示水平和垂直尺度,U_0 表示速度尺度.方程(1)和(2)分别变为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\beta(y)y-\delta\frac{\partial B}{\partial y}\right]=\mu_0Q(x,y,t), \tag{4}$$

$$\psi(0)=\psi(1)=0. \tag{5}$$

这里为书写方便,去掉了无量纲量的 * 号,其中无量纲参数

$$\delta = \frac{H}{L_0},\ \mu_0 = \frac{U_0}{L_0}.$$

1.2 带有强迫项的非线性 KdV 方程

假设总的流函数 $\psi(x,y,t)$ 由基本流函数和扰动流函数两部分构成,即

$$\psi(x,y,t) = -\int_0^y [U(s) - c_0]\mathrm{d}s + \varepsilon\psi'(x,y,t), \tag{6}$$

这里 ε 表示赤道 Rossby 数,μ_0 表征幅度参数,它们都是小量而且在赤道附近 $\varepsilon \sim o(10^{-2})$.显然 ε 表示非线性的大小,μ_0 表示外源的强弱.

把方程(6)代入到方程(4)中,变为

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t} + (U - c_0)\frac{\partial}{\partial x}\right]\nabla^2\psi' + \varepsilon p(y)\frac{\partial\psi'}{\partial x} + \varepsilon^2 J(\psi',\nabla^2\psi') - \\ &\quad \varepsilon\delta J\left(\psi',\frac{\partial B}{\partial y}\right) - \delta(U - c_0)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) = \mu_0 Q,\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$p(y) = \frac{\mathrm{d}(\beta(y)y)}{\mathrm{d}y} - U'',\ J(A,B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}.$$

由于大气运动的时空多尺度性,采用长波近似中的坐标延伸法,即 Gardner-Morikawa 变换

$$X = \varepsilon^{1/2}x,\ T = \varepsilon^{3/2}t,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial T},\ \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial X}, \tag{8}$$

其中 X,T 为缓变量.将方程(8)代入到方程(7)中变为

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{5/2}\frac{\partial}{\partial T}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right) + \varepsilon^{3/2}(U - c_0)\frac{\partial}{\partial X}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right) + \\ &\quad \varepsilon^{5/2}\frac{\partial\psi'}{\partial X}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right) - \\ &\quad \varepsilon^{5/2}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial X}\left(\varepsilon\frac{\partial^2\psi'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2}\right) + \varepsilon^{3/2}p(y)\frac{\partial\psi'}{\partial X} - \varepsilon^{5/2}\delta\frac{\partial\psi'}{\partial X}\frac{\partial}{\partial y}D(y) = \mu_0 Q,\end{aligned} \tag{9}$$

这里 $\partial B/\partial y = \varepsilon D(y)$.设扰动流函数有如下的小参数展开式:

$$\psi' = \psi_0(X,y,T) + \varepsilon\psi_1(X,y,T) + \varepsilon^2\psi_2(X,y,T) + \cdots, \tag{10}$$

考虑外源是弱外源,这里设 $o(\mu_0) = o(\varepsilon^{5/2})$.

然后把方程(10)代入方程(9)中,得到各阶摄动问题,考虑到最低阶问题

$$o(\varepsilon^0):\quad (U - c_0)\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\right) + p(y)\frac{\partial\psi_0}{\partial X} = 0. \tag{11}$$

假设 ψ_0 有下列形式的分离变量解:

$$\psi_0 = A(X,T)\Phi_0(y). \tag{12}$$

把方程(12)代入方程(11),得

$$\begin{cases}\Phi_0'' + \dfrac{p(y)}{U - c_0}\Phi_0 = 0,\\ \Phi_0(0) = \Phi_0(1) = 0,\end{cases} \tag{13}$$

其中 $U-c_0\neq 0$，方程组(13)构成一个本征值问题，从该本征值问题可以确定本征函数.但是这个本征值问题只能确定 Rossby 波随纬度的变化规律，不能确定 Rossby 波振幅，需要继续求解高阶问题.

$$o(\varepsilon):\quad (U-c_0)\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)+p(y)\frac{\partial\psi_1}{\partial X}=$$
$$-\left\{\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}+(U-c_0)\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial X^2}+\frac{\partial\psi_0}{\partial X}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}-\delta\frac{\partial\psi_0}{\partial X}\frac{\partial}{\partial y}D(y)-Q\right\}=F. \tag{14}$$

假设 $\psi_1=B(X,T)\Phi_1(y)$，代入上式，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial B}{\partial X}\left(\Phi_1''+\dfrac{p(y)}{U-c_0}\Phi_1\right)=\dfrac{1}{U-c_0}F,\\ \Phi_1(0)=\Phi_1(1)=0,\end{cases} \tag{15}$$

其中

$$F=\frac{\partial A}{\partial T}\Phi_0''+(U-c_0)\frac{\partial^3 A}{\partial X^3}\Phi_0+A\frac{\partial A}{\partial X}(\Phi_0\Phi_0'''-\Phi_0'\Phi_0'')-\delta\frac{\partial A}{\partial X}\Phi_0 D'(y)-Q. \tag{16}$$

进一步化简得

$$F=-\frac{p(y)}{U-c}\Phi_0\frac{\partial A}{\partial T}+(U-c_0)\Phi_0\frac{\partial^3 A}{\partial X^3}-$$
$$A\frac{\partial A}{\partial X}\left(\frac{p(y)}{U-c_0}\right)'\Phi_0^2-\delta D'(y)\Phi_0\frac{\partial A}{\partial X}-Q. \tag{17}$$

利用本征函数的正交性，可得消奇异条件

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\Phi_0\frac{F}{U-c_0}\mathrm{d}y=0,\\ \displaystyle-\int_0^1\frac{p(y)}{(U-c_0)^2}\Phi_0^2\mathrm{d}y\frac{\partial A}{\partial T}+\int_0^1\Phi_0^2\mathrm{d}y\frac{\partial^3 A}{\partial X^3}-\int_0^1\frac{\Phi_0^2}{U-c_0}\left(\frac{p(y)}{U-c_0}\right)'\Phi_0\mathrm{d}yA\frac{\partial A}{\partial X}-\\ \qquad\displaystyle\int_0^1\delta\frac{\Phi_0^2D'(y)}{U-c_0}\mathrm{d}y\frac{\partial A}{\partial X}-\int_0^1\frac{\Phi_0}{U-c_0}Q\mathrm{d}y=0.\end{cases} \tag{18}$$

进一步整理，得

$$\frac{\partial A}{\partial T}+\alpha A\frac{\partial A}{\partial X}+\beta\frac{\partial^3 A}{\partial X^3}+\gamma\frac{\partial A}{\partial X}=\eta Q_1(X,T), \tag{19}$$

其中系数满足

$$I=\int_0^1\frac{p(y)}{(U-c_0)^2}\Phi_0^2(y)\mathrm{d}y,\ \beta=-\frac{1}{I}\int_0^1\Phi_0^2(y)\mathrm{d}y,$$
$$\alpha=\frac{1}{I}\int_0^1\frac{\Phi_0^2}{U-c_0}\left(\frac{p(y)}{U-c_0}\right)'\Phi_0\mathrm{d}y,\ \gamma=\frac{\delta}{I}\int_0^1\frac{\Phi_0^2}{U-c_0}D'(y)\mathrm{d}y,$$
$$\eta=-\frac{1}{I}\int_0^1\frac{1}{U-c_0}\Phi_0\mathrm{d}y.$$

方程(19)就是描述近赤道 Rossby 长波振幅演变满足带有外源强迫的变系数非线性 KdV

方程,它反映了非线性近赤道 Rossby 长波的特征.从方程可以看出,Coriolis 力的水平分量出现在系数 γ 中,如果只考虑传统近似,即 $f_H = 0$,方程就变为带有外源强迫的 KdV 方程.方程(13)、(19)就可以完全确定非线性近赤道带有外源强迫的 Rossby 长波的结构.

2 带有外源强迫的非线性 KdV 方程的行波解及孤立波解

利用 Jacobi 椭圆函数展开法,求方程(19)的行波解,设 $\eta Q(X,T)=s(T)$,则方程(19)简化为

$$\frac{\partial A}{\partial T}+\alpha A\frac{\partial A}{\partial X}+\beta\frac{\partial^3 A}{\partial X^3}+\gamma\frac{\partial A}{\partial X}=s(T). \tag{20}$$

为了求方程(20)的行波解,令

$$A=B+\tau(T),\ \tau(T)=\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t, \tag{21}$$

把上式代入到方程(20)中,得

$$\frac{\partial B}{\partial T}+\alpha[B+\tau(T)]\frac{\partial B}{\partial X}+\beta\frac{\partial^3 B}{\partial X^3}+\gamma\frac{\partial B}{\partial X}=0. \tag{22}$$

方程(22)做广义的行波变换

$$B=B(\xi),\qquad \xi=f(T)X+g(T). \tag{23}$$

将式(23)代入到方程(22),得

$$(f'X+g')\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\xi}+\alpha f[B+\tau(T)]\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\xi}+\beta f^3\frac{\mathrm{d}^3 B}{\mathrm{d}\xi^3}+\gamma f\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\xi}=0. \tag{24}$$

设 $B(\xi)$ 有下列形式的解:

$$B(\xi)=\sum_{j=0}^{n}a_j\mathrm{sn}^j\xi, \tag{25}$$

这里,$\mathrm{sn}(\xi,m)$ 是 Jacobi 椭圆正弦函数,$0\leqslant m\leqslant 1$ 称为 Jacobi 椭圆函数的模数.为了使方程(24)的最高阶非线性项和最高阶导数项相平衡,取 $n=2$,所以

$$B(\xi)=a_0(T)+a_1(T)\,\mathrm{sn}\,\xi+a_2(T)\,\mathrm{sn}^2\xi. \tag{26}$$

把方程(26)代入到方程(24)中,得

$$\begin{aligned}&a_0'+a_1'\mathrm{sn}\,\xi+a_2'\mathrm{sn}^2\xi+a_1[f'X+g'+\alpha fa_0+\gamma f-\\&\quad(1+m^2)\beta f^3+(\alpha\tau+\gamma)f]\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi+\\&\quad[2a_2(f'X+g')+f\alpha(a_1^2+2a_0a_2)-8(1+m^2)\beta f^3a_2+\\&\quad2(\alpha\tau+\gamma)fa_2]\,\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi+\\&\quad3a_1f(\alpha a_2+2m^2\beta f^2)\,\mathrm{sn}^2\xi\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi+2a_2f(\alpha a_2+12m^2\beta f^2)\,\mathrm{sn}^3\xi\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi=0.\end{aligned} \tag{27}$$

由上式得

$$\begin{cases}f=k,\ g=-kc\int_0^T\alpha\,\mathrm{d}t-k\int_0^T\alpha\tau\,\mathrm{d}t-k\int_0^T\gamma\,\mathrm{d}t,\\[2mm] a_0=\dfrac{4\beta k^2(1+m^2)}{\alpha}+c,\ a_1=0,\ a_2=-\dfrac{12\beta}{\alpha}k^2m^2,\end{cases} \tag{28}$$

这里 k 是常数,方程(20)的行波解为

$$A=\frac{4\beta k^2(1+m^2)}{\alpha}+c-\frac{12\beta}{\alpha}k^2m^2\mathrm{sn}^2\xi+\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t, \tag{29}$$

其中 $\xi = kX - k\int_0^T \gamma \mathrm{d}t - kc\int_0^T \alpha \mathrm{d}t - k\int_0^T \left[\int_0^T \alpha s \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}t$.

当 $m = 1$ 时,对应的孤立波解为

$$A(X,T) = -\frac{4\beta k^2}{\alpha} + c + \frac{12\beta}{\alpha} k^2 \operatorname{sech}^2 \xi + \int_0^T s(t)\mathrm{d}t. \tag{30}$$

式(30)说明 Coriolis 力的水平分量出现在 ξ 中,这表明 Coriolis 力的水平分量对近赤道 Rossby 长波的频率有影响而与孤立波的波振幅没有关系.而当 $\gamma = 0$ 时,非线性近赤道 Rossby 波孤立波仍然存在,这说明 Coriolis 力的水平分量不是产生孤立波的必要条件.同时,外源与非线性有相互作用,可以加强或减弱波的传播频率.当基本流没有切变,β 是常数时,即 $\alpha = 0$,非线性项消失.当基本流不存在切变,β 是纬度 y 的函数时,非线性项仍然存在.从而验证了基本流有切变、非线性 β 效应都是 Rossby 孤立波产生的重要因子.这也说明非线性近赤道 Rossby 波与基流切变、非线性 β 效应、Coriolis 力的水平分量和外源共同相互作用可以使大气形成 Rossby 波孤立子.此外,由方程(19)可以看出,孤立波存在还必须保证

$$I = \int_0^1 \frac{p(y)}{(U - c_0)^2} \Phi_0^2(y)\mathrm{d}y \neq 0.$$

这表示不能产生正压不稳定.

3 结 论

本文从描写既有 Coriolis 力垂直分量又含有水平分量的位涡方程出发,推导了近赤道非线性 Rossby 波振幅演变满足带有外源强迫的非线性 KdV 方程,并利用 Jacobi 椭圆函数展开法,求解了非线性 KdV 方程的行波解及孤立波解.通过分析孤立波解的结构,表明近赤道 Rossby 长波的传播频率依赖于 Coriolis 力的水平分量、非线性及外源与非线性的相互作用.而 Rossby 长波的振幅与 Coriolis 力的水平分量没有关系.同时外源一方面影响了 Rossby 长波的传播频率,另一方面对波振幅产生一个调制.分析结果表明近赤道非线性 Rossby 波与切变基本流、非线性 β 效应、Coriolis 力的水平分量和外源共同相互作用有关.

参考文献(References):

[1] Long R R. Solitary waves in the Westerlies[J]. *Journal of the Atmosphere Science*, 1964, **21**(3): 197-200.

[2] Benney D J. Long nonlinear waves in fluid flows[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1966, **45**(1): 52-63.

[3] Boyd J P. The effects of latitudinal shear on equatorial waves—part 1: theory and methods[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1978, **35**(12): 2236-2258.

[4] Boyd J P. Equatorial solitary waves—part1: Rossby solitons[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1980, **10**(11): 1699-1717.

[5] Redekopp L G. On the theory of solitary Rossby waves[J]. *Jounal of Fluid Mechanics*, 1977, **82**(4): 725-745.

[6] Charney J G, Straus D M. Form-drag instability, multiple equilibria and propagating planetary waves in baroclinic, orographically forced, planetary wave systems[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1980, **37**(6): 1157-1176.

[7] 赵强, 刘式达, 刘式适. 切变基本纬向流中非线性赤道 Rossby 长波[J]. 地球物理学报, 2000, **43**(6): 746-753.(ZHAO Qiang, LIU Shi-da, LIU Shi-kuo. Nonlinear equatorial Rossby long

waves in a shear flow[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2000, **43**(6): 746-753.(in Chinese))

[8] 宋健, 杨联贵, 刘全生. 正压大气模式下具有 β 效应与地形效应的 Rossby 孤立波[J]. 地球物理学进展, 2012, **27**(2): 393-397.(SONG Jian, YANG Lian-gui, LIU Quan-sheng. Solitary Rossby waves with beta effect and topography effect in a barotropic atmospheric model[J]. *Progress in Geophysics*, 2012, **27**(2): 393-397.(in Chinese))

[9] 巢纪平, 徐昭. 热带扰动在大尺度经圈中的行为[J]. 地球物理学报, 2008, **51**(6): 1657-1662.(CHAO Ji-ping, XU Zhao. The behavior of tropical disturbance in large-scale meridional flow[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2008, **51**(6): 1657-1662.(in Chinese))

[10] 刘萍, 李子良, 楼森岳. 一类耦合非线性 Schrödinger 方程的 Painlevé 性质、严格解及其在大气重力波中的应用[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(11): 1308-1329.(LIU Ping, LI Zi-liang, LOU Sen-yue. A class of coupled nonliear Schrödinger equation: Painlevé property, exact solutions and application to atmospheric gravity waves[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(11): 1308-1329.(in Chinese))

[11] 张永垂, 张立凤. Rossby 波模型对西北太平洋海表面高度年际变异的可预测性研究[J]. 海洋与湖沼, 2013, **44**(6): 1409-1417.(ZHANG Yong-chui, ZHANG Li-feng. Predictability to sea level interannual variability in the northwestern pacific by first-order baroclinic Rossby waves model[J]. *Oceanologia et Limnologia Sinica*, 2013, **44**(6): 1409-1417.(in Chinese))

[12] 张永利, 杨联贵. 地形效应下正压准地转模式的能量守恒[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(9): 936-944.(ZHANG Yong-li, YANG Lian-gui. Conservation of energy in a barotropic quasi-geostrophic model under orographic effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(9): 936-944.(in Chinese))

[13] 汪萍, 戴新刚. 外强迫作用下正压大气非线性特征数值模拟[J]. 物理学报, 2005, **54**(10): 4961-4970.(WANG Ping, DAI Xin-gang. Numerial modeling of non-linear characteristics for barotropic atmosphere with external forcing[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(10): 4961-4970.(in Chinese))

[14] White A A, Hoskins B J, Roulstone I, et al. Consistent approximate models of the global atmosphere: shallow, deep, hydrostatic, quasi-hydrostatic and non-hydrostatic[J]. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 2005, **131**(609): 2081-2107.

[15] Philips N A. The equations of motion for a shallow rotating atmosphere and the "traditional approximation"[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1966, **23**(5): 626-628.

[16] White A A, Bromley R A. Dynamically consistent, quasi-hydrostatic equations for global models with a complete representation of the Coriolis force[J]. *Quarterly Journal of the Roynal Meteorological Society*, 1995, **121**(522): 399-418.

[17] Burger A P. The potential vorticity equation: from planetary to small scale[J]. *Tellus A*, 1991, **43**(3): 191-197.

[18] Dellar P J, Salmon R. Shallow water equations with a complete Coriolis force and topography[J]. *Physics of Fluids*, 2005, **17**(10): 106601.

[19] Stewart A L, Dellar P J. The rôle of the complete Coriolis force in cross-equatorial flow of abyssal ocean currents[J]. *Ocean Modelling*, 2011, **38**(3/4): 187-202.

[20] Tort M, Dubos T. Dynamically consistent shallow-atmosphere equations with a complete Coriolis force[J]. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 2014, **140**(684): 2388-2392.

[21] 赵强, 于鑫. 完整 Coriolis 力作用下非线性 Rossby 波的精确解[J]. 地球物理学报, 2008, **51**

(5): 1304-1308.(ZHAO Qiang, YU Xin. Exact solutions to the nonlinear Rossby waves with a complete representation of the Coriolis force[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2008, **51**(5): 1304-1308.(in Chinese))

[22] 杨洁, 赵强. 有完整 Coriolis 力和热源影响下超长波的解析解[J]. 物理学报, 2010, **59**(2): 750-753.(YANG Jie, ZHAO Qiang. Analytical solutions to ultra-long waves with the complete Coriolis force and heating[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(2): 750-753.(in Chinese))

The Nonlinear KdV Equation Under External Forcing With the Complete Coriolis Force

YIN Xiao-jun[1,2], YANG Lian-gui[1], SONG Jian[3], ZHANG Rui-gang[1], YANG Hong-li[1], LIU Quan-sheng[1]

(1. *School of Mathematical Sciences*, *Inner Mongolia University*, *Hohhot* 010021, *P.R.China*;
2. *College of Science*, *Inner Mongolia Agricultural University*, *Hohhot* 010018, *P.R.China*;
3. *College of Science*, *Inner Mongolia University of Technology*, *Hohhot* 010051, *P.R.China*)

Abstract: The nonlinear KdV equation under external forcing was deduced from the potential vorticity equation involving both the vertical and the horizontal components of the Coriolis force with the perturbation method near the equatorial Rossby waves. Then the periodic solution of the model was obtained by means of the Jacobi elliptic functions. It is shown that the horizontal components of the Coriolis force play an important role in the structures of the Rossby waves.

Key words: complete Coriolis force; Jacobi elliptic function; nonlinear Rossby wave

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11362012);The National Science Fund for Young Scholars of China(11202092;11301592)

引用本文/Cite this paper:

尹晓军, 杨联贵, 宋健, 张瑞岗, 杨红丽, 刘全生. 完整 Coriolis 力作用下带有外源强迫的非线性 KdV 方程[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(9): 1053-1060.

YIN Xiao-jun, YANG Lian-gui, SONG Jian, ZHANG Rui-gang, YANG Hong-li, LIU Quan-sheng. The nonlinear KdV equation under external forcing with the complete Coriolis force[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(9): 1053-1060.