文章编号:1000-0887(2018)02-0226-13 ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

一类具时滞的周期 logistic 传染病模型空间动力学研究*

王双明, 张明军, 樊馨蔓

(兰州财经大学 信息工程学院, 兰州 730020)

摘要: 利用动力系统的理论研究一类具有时滞的周期 logistic 反应扩散传染病模型的动力学.首先证明了周期解半流对应 ω 算子的全局吸引子的存在性.然后利用次代算子方法引入了模型的基本再生数.最后,利用持久性理论结合比较原理,得到了疾病持久或灭绝的阈值条件:若基本再生数小于 1,无病周期解是全局渐近稳定的,疾病将逐渐消失;若基本再生数大于 1,系统一致持久,疾病将继续流行并最终形成地方病.

关 键 词: logistic 增长; 周期系统; 全局吸引子; 基本再生数; 一致持久
中图分类号: O175 **文献标志码**: A DOI: 10.21656/1000-0887.370301

引 言

在漫长的历史进程中,传染病一直威胁着人类的生存和健康.传染病的防治也一直是关系到国计民生的重大问题,而对疾病流行规律的定量研究是防治工作的重要依据.传染病动力学正是对传染病流行规律进行理论性定量研究的一种重要方法,在近几十年备受关注[1].它能有效结合种群生长的特性、疾病发生和在种群内传播的规律以及与之有关各种因素,建立反映传染病动力学特性的数学模型.通过对模型动力学性态的定性、定量分析,来揭示疾病的发生过程和流行规律,预测其发展变化趋势,分析疾病流行的原因,寻求预防和控制的最优策略,为疾病的防治决策提供理论基础和数量依据[2].

基本再生数是传染病动力学中很重要的一个概念,表示病发初期,当所有个体为易感者时,引入一个染病者,其在一个平均传染周期内所能传染人数的期望值,是判断疾病将继续流行或逐渐灭绝的一个“阈值”.具体而言,若基本再生数 $\mathscr{R}_0 < 1$,疾病将会灭绝; 若 $\mathscr{R}_0 > 1$,疾病将继续流行而形成地方病.自基本再生数被提出以后,已经被广泛用于各种传染病模型的研究[3-7].在已有工作的基础之上[8-14],Zhang 等[15]综合考虑了空间扩散、季节变化以及疾病的潜伏期等因素对疾病传播的影响,首次在带有时滞的周期非局部反应扩散传染病模型中引入了

* **收稿日期**: 2016-09-30; **修订日期**: 2017-12-21
基金项目: 国家自然科学基金(61662066);甘肃科技计划(17JR5RA175);甘肃省高等学校科研项目(2017A-047)
作者简介: 王双明(1987—),男,硕士(通讯作者. E-mail: wsm@lzufe.edu.cn);
张明军(1973—),男,副教授,硕士(E-mail: zhangmjlz@163.com);
樊馨蔓(1979—),女,副教授,硕士(E-mail: fanxm1120@163.com).

基本再生数,证明了基本再生数与线性周期抛物非局部特征值问题主特征值之间的关系,很大程度上发展了已有成果.文献[15]所考虑的带时滞周期非局部反应扩散模型如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)] + \Lambda(t,x) - d(t,x)u_1(t,x) - \\ \qquad h(t,x)u_1(t,x)u_2(t,x), \qquad t>0,\ x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)] - \beta(t,x)u_2(t,x) + \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Gamma(t,t-\tau,x,y)h(t-\tau,y)u_1(t-\tau,y)u_2(t-\tau,y)\mathrm{d}y, \\ \qquad\qquad t>0,\ x\in\Omega, \\ [D_i(t,x)\nabla u_i(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t>0,\ x\in\partial\Omega,\ i=1,2, \end{cases} \tag{1}$$

其中,$\Omega\subset R^N(N\geqslant 1)$ 且具有光滑边界 $\partial\Omega$,$\boldsymbol{\nu}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.$u_1(t,x)$ 和 $u_2(t,x)$ 分别表示易感者和已经感染者在 t 时刻、x 位置处的密度.$D_1(t,x)$ 和 $D_2(t,x)$ 分别表示易感者和已经感染者在 t 时刻、x 处的扩散率.$\nabla\cdot[D_i(t,x)\nabla u_i(t,x)]$ 表示 $D_i(t,x)\nabla u_i(t,x)$ 的梯度,$i=1,2$.$\Lambda(t,x)$ 和 $d(t,x)$ 分别表示易感群体的总补充率和自然死亡率,$h(t,x)$ 代表感染率,$\beta(t,x)$ 表示感染者的因病死亡率.$\Gamma(t,s,x,y)(t>s\geqslant 0,x,y\in\Omega)$ 是一个偏微分算子的基本解[15].

早期传染病模型中大多假设种群总数量为常数,而在现实中种群数量是随着时间和环境不断变化的,因此在长期流行的传染病模型中必须考虑种群动力学因素,即出生、死亡、内部竞争等.常见的增长模式包括以下几种情形:指数增长、固定输入(在常微分方程模型中便是常数输入)、logistic 增长等.其中,指数增长只适用于种群繁衍初期(或低密度生长阶段);固定输入主要用来模拟一些特殊情形如富营养化湖泊中微生物的生长以及恒化器中细菌的连续培养等.对于人口增长以及有限栖息域上大多生物种群的生长,logistic 模式更为合理.在模型(1)中,基于数学上的方便,对寄主种群采用了固定输入的增长模式(易感群体的总补充率 $\Lambda(t,x)$ 与 u_1 无关).本文对寄主种群引入 logistic 增长模式,推广模型(1),进一步讨论不同增长模式对疾病传播动力学的影响.具体地,考虑如下带时滞的周期非局部反应扩散模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)] + a(t,x)u_1(t,x) - b(t,x)u_1^2(t,x) - \\ \qquad h(t,x)u_1(t,x)u_2(t,x), \qquad t>0,\ x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)] - \beta(t,x)u_2(t,x) + \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Gamma(t,t-\tau,x,y)h(t-\tau,y)u_1(t-\tau,y)u_2(t-\tau,y)\mathrm{d}y, \\ \qquad\qquad t>0,\ x\in\Omega, \\ [D_i(t,x)\nabla u_i(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t>0,\ x\in\partial\Omega,\ i=1,2, \end{cases} \tag{2}$$

其中,$a(t,x)-b(t,x)u_1(t,x)$ 表示易感群体的增长率,反映了群体数量达到一定规模时由环境承载能力有限而造成的再增长阻滞效应.同时,其他函数诸如 $h(t,x)$ 等与它们出现在模型(1)中所表示的意义完全相同.对模型(2)中的系数做出如下基本假设:

(H)　$a(t,x)$,$b(t,x)$,$h(t,x)$ 和 $\beta(t,x)$ 是 $\mathbf{R}\times\bar{\Omega}$ 上的非负非平凡 Hölder 连续函数,是关于变量 t 的 ω-周期函数,$\omega>0$ 为常数.扩散系数 $D_i(t,x)$,$i=1,2$,在 $\mathbf{R}\times\bar{\Omega}$ 上 Hölder 连续,

亦是关于 t 的 ω- 周期函数.存在常数 $\beta, D_i > 0$,使得 $\beta(t,x) > \beta, D_i(t,x) \geq D_i$ 对所有的 $(t,x) \in [0,\omega] \times \bar{\Omega}$ 成立,$i = 1,2$.

本文旨在借助文献[15]中引入基本再生数的方法,运用动力系统理论研究模型(2)在有界域上的全局动力学,是对有界域上 logistic 增长的周期非局部反应扩散模型动力学的首次研究.相对于模型(1) 而言,logistic 增长的引入会使得系统的动力学行为更为复杂.首先,系统会多出一个平凡周期解,这对系统一致持久性的证明带来了相应的困难.本文将采用渐近周期半流的相关理论结合一定技巧来克服这一困难.相较于文献[15]中所用的基于抛物比较原理的比较方法(要求相应的系数函数严格为正),该方法只需系数函数具有非负性.其次,模型(1)中,由于增长方式为固定输入,易感者数量保持正常数下界是显然的.而在 logistic 增长的模型(2)中,需要相应线性特征值问题的主特征值为负来保证之.

剩余部分组织如下:首先证明系统的适定性以及 ω 解算子的全局吸引子的存在性,然后利用次代算子方法引入基本再生数,最后基于基本再生数探究疾病持久与灭绝的充分条件.

1　全局吸引子的存在性

1.1　适定性

令 $X := C(\bar{\Omega}, R^2)$,范数为 $\|\cdot\|_X$,则 X 为一个 Banach 空间.对于任意 $\tau \geq 0$,定义 $\mathcal{C}_\tau := C([-\tau, 0], X)$,范数为 $\|\cdot\| := \max_{\theta \in [-\tau,0]} \|\boldsymbol{\phi}(\theta)\|_X, \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}_\tau$.显然,$\mathcal{C}_\tau$ 亦是一个 Banach 空间,则 (X, X^+) 和 $(\mathcal{C}_\tau, \mathcal{C}_\tau^+)$ 都是强序空间,其中,$X^+ := C(\bar{\Omega}, R_+^2)$,$\mathcal{C}_\tau^+ := C([-\tau,0], X^+)$.对于任一函数 $\boldsymbol{u}: [-\tau, \sigma) \mapsto X, \sigma > 0$,定义 $\boldsymbol{u}_t \in \mathcal{C}_\tau: \boldsymbol{u}_t(\theta) = \boldsymbol{u}(t+\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0]$.定义 $Y := C(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ 表示以最大模 $\|\cdot\|_Y$ 为其范数的 Banach 空间,$Y^+ := C(\bar{\Omega}, \mathbf{R}_+)$,则 (Y, Y^+) 亦是一个强序空间.

令 $V_i(t,s), i = 1,2$ 分别表示由反应扩散方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = \nabla \cdot [D_1(t,x) \nabla u_1(t,x)], & t > 0,\ x \in \Omega, \\ [D_1(t,x) \nabla u_1(t,x)] \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} = \nabla \cdot [D_2(t,x) \nabla u_2(t,x)] - \beta(t,x) u_2(t,x), & t > 0,\ x \in \Omega, \\ [D_2(t,x) \nabla u_2(t,x)] \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

所生成的发展算子.由 $D_i(t,\cdot), i = 1,2$ 和 $\beta(t,\cdot)$ 关于时间 t 的周期性可知,对于所有满足 $t \geq s$ 的 $(t,s) \in R^2$,都有 $V_i(t+\omega, s+\omega) = V_i(t,s)$,并且 $V_i(t,s): Y \to Y$ 是紧的、强正的,$i = 1,2$.对于任意 $(t,s) \in R^2, t \geq s$,令 $\boldsymbol{V}(t,s) := \begin{pmatrix} V_1(t,s) & 0 \\ 0 & V_2(t,s) \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{V}(t,s): X \to X, (t,s) \in R^2, t \geq s$ 是一个发展算子.

对于 $\boldsymbol{\phi} := (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{C}_\tau^+, t \geq 0$,定义

$$F_1(t, \boldsymbol{\phi}) := a(t,\cdot)\phi_1(0,\cdot) - b(t,\cdot)\phi_1^2(0,\cdot) - h(t,\cdot)\phi_1(0,\cdot)\phi_2(0,\cdot),$$

$$F_2(t, \boldsymbol{\phi}) := \int_\Omega \Gamma(t, t-\tau, x, y) h(t-\tau, y) \phi_1(-\tau, y) \phi_2(-\tau, y) \mathrm{d}y.$$

从而系统(2)可表示为

$$\begin{cases}\partial_t \boldsymbol{u}(t,x)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t,x)+\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{u}_t), & t>0,\ x\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}(\theta,x)=\boldsymbol{\phi}(\theta,x), & \theta\in[-\tau,0],\ x\in\Omega,\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{u}(t,x):=(u_1(t,x),u_2(t,x)),\ \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\phi}):=(F_1(t,\boldsymbol{\phi}),F_2(t,\boldsymbol{\phi})),$$

$$\boldsymbol{A}(t):=\begin{pmatrix}A_1(t) & 0\\ 0 & A_2(t)\end{pmatrix},$$

$A_i(t),i=1,2$ 的定义分别如下：

$$A_1(t)\varphi=\nabla\cdot[D_1(t,\cdot)\nabla\varphi],\qquad \forall\varphi\in D(A_1(t)),$$

$$A_2(t)\varphi=\nabla\cdot[D_2(t,\cdot)\nabla\varphi]-\beta(t,x)\varphi,\qquad \forall\varphi\in D(A_2(t)),$$

式中

$$D(A_i(t))=\{\varphi\in C^2(\bar{\Omega})\mid [D_i(t,x)\nabla\varphi]\cdot\boldsymbol{\nu}=0,x\in\partial\Omega\},\qquad i=1,2.$$

将系统(4)表示为积分形式：

$$\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{\phi})=\boldsymbol{V}(t,0)\boldsymbol{\phi}+\int_0^t \boldsymbol{V}(t,s)\boldsymbol{F}(s,\boldsymbol{u}_s)\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant 0,\ \boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+,\tag{5}$$

则式(5)的解是式(4)的适度解.显然, $\boldsymbol{F}$ 在$(0,\infty)\times\Omega$上是局部 Lipschitz 连续的.紧接着验证

$$\lim_{\theta\to 0^+}\operatorname{dist}(\boldsymbol{\phi}(0,\cdot)+\theta\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\phi}),X^+)=0,\qquad \forall(t,\boldsymbol{\phi})\in[0,+\infty)\times\mathcal{C}_\tau^+.\tag{6}$$

由于

$$\boldsymbol{\phi}(0,x)+\theta\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{\phi})(x)=$$

$$\begin{pmatrix}\phi_1(0,x)+\theta[a(t,\cdot)\phi_1(0,\cdot)-b(t,\cdot)\phi_1^2(0,\cdot)-h(t,x)\phi_1(0,x)\phi_2(0,x)]\\ \phi_2(0,x)+\theta\int_\Omega\Gamma(t,t-\tau,\cdot,y)h(t-\tau,y)\phi_1(-\tau,y)\phi_2(-\tau,y)\mathrm{d}y\end{pmatrix}\geqslant$$

$$\begin{pmatrix}\phi_1(0,x)[1-\theta\hat{b}\phi_1(0,x)-\theta\hat{h}\phi_2(0,x)]\\ \phi_2(0,x)\end{pmatrix},$$

所以只要选取充分小的 $\theta>0$ 就能使式(6)成立,这里

$$\hat{b}=\max_{t\in[0,\omega],x\in\bar{\Omega}}b(t,x),\ \hat{h}=\max_{t\in[0,\omega],x\in\bar{\Omega}}h(t,x).$$

根据文献[16]中定理 1.1 和注 1.1,对于任意 $\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+$,系统(2) 有一个满足 $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{\phi}$ 的非负连续适度解 $\boldsymbol{u}(t,\cdot;\boldsymbol{\phi})\in X^+,t\in[0,\sigma_{\boldsymbol{\phi}})$.此外,由 $\boldsymbol{V}(t,s),s,t\in\mathbf{R},s<t$ 的解析性可知,当 $t>\tau$ 时,$\boldsymbol{u}(t,x;\boldsymbol{\phi})$ 是一个古典解.

回顾周期半流的定义[17].称一个算子族 $\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ 是距离空间$(\boldsymbol{G},\rho)$ 上的 T- 周期半流,如果$\{\Phi_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足:(i) $\Phi_0(v)=v,\forall v\in\boldsymbol{G}$; (ii) $\Phi_t(\Phi_T(v))=\Phi_{t+T}(v),\forall t\geqslant 0,v\in\boldsymbol{G}$; (iii) $\Phi_t(v)$ 在$[0,\infty)\times\boldsymbol{G}$ 上关于(t,v) 连续.

在 $\mathcal{C}_\tau^+$ 上定义算子$\{\Psi_t\}_{t\geqslant 0}$: $\Psi_t(\boldsymbol{\phi})(x)=\boldsymbol{u}_t(s,x;\boldsymbol{\phi})=\boldsymbol{u}(t+s,x;\boldsymbol{\phi})$, $\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+$, $t\geqslant 0$, $s\in[-\tau,0]$, $x\in\bar{\Omega}$.容易验证,$\{\Psi_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 $\mathcal{C}_\tau^+$ 上的一个 ω- 周期半流.

1.2　全局吸引子的存在性

定理 1　Ψ_ω: $\mathcal{C}_\tau^+\to\mathcal{C}_\tau^+$ 有一个全局吸引子.

证明　由系统(2)知

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} \leqslant \nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)] + a(t,x)u_1(t,x) - \\ \qquad b(t,x)u_1^2(t,x), \qquad t>0,\ x\in\Omega, \\ [D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu}=0, \qquad t>0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

根据引理 1(见 2.1 小节)和标准抛物方程的比较原理,存在常数 $M_1>0$ 使得对任一 $\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+$,当 $t\geqslant l_1\omega$ 时,有 $u_1(t,x;\boldsymbol{\phi})\leqslant M_1$,$l_1=l_1(\boldsymbol{\phi})$ 是一个正常数.

令 $\hat{a}:=\max_{t\in[0,\omega],x\in\bar{\Omega}}a(t,x)$,$\check{\beta}:=\min_{t\in[0,\omega],x\in\bar{\Omega}}\beta(t,x)$.对任一 $\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+$,令 $u_i(t,x):=u_i(t,x;\boldsymbol{\phi})$,$t\geqslant 0$,$x\in\Omega$,$\bar{u}_i(t):=\int_\Omega u_i(t,x)\mathrm{d}x$,$i=1,2$.对系统(2)的第一个方程关于 x 在 Ω 上积分,依 Green 公式和边界条件知 $\int_\Omega[D_i(t,x)\nabla u_i(t,x)]\mathrm{d}x=0$,$i=1,2$,从而

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_1(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\hat{a}\bar{u}_1(t)-\int_\Omega h(t,x)u_1(t,x)u_2(t,x)\mathrm{d}x, \qquad \forall t>0,$$

即

$$\int_\Omega h(t,x)u_1(t,x)u_2(t,x)\mathrm{d}x\leqslant\hat{a}\bar{u}_1(t)-\frac{\mathrm{d}\bar{u}_1(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \forall t>0. \tag{7}$$

再次利用 Green 公式,结合 $\Gamma(t,s,x,y)$ 的性质,对系统(2)的第二个方程关于 x 在 Ω 上积分得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_2(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\check{\beta}\bar{u}_2(t)+k_1\int_\Omega h(t-\tau,x)u_1(t-\tau,x)u_2(t-\tau,x)\mathrm{d}x, \qquad \forall t>0,$$

其中 $k_1>0$ 是一个常数.借助不等式(7),令 $k_2=\hat{a}k_1$,得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_1(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\check{\beta}\bar{u}_2(t)+k_2\bar{u}_1-k_1\frac{\mathrm{d}\bar{u}_1(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \forall t>0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k_1\bar{u}_1(t)+\bar{u}_2(t)]\leqslant-\check{\beta}\bar{u}_2(t)+k_2\bar{u}_1, \qquad \forall t>0.$$

因此,令 $k_3=\check{\beta}k_1+k_2$,得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k_1\bar{u}_1(t)+\bar{u}_2(t)]&\leqslant-\check{\beta}[k_1\bar{u}_1+\bar{u}_2(t)]+k_3\bar{u}_1\leqslant\\ &-\check{\beta}[k_1\bar{u}_1+\bar{u}_2(t)]+k_3M_1|\Omega|, \qquad \forall t\geqslant l_1\omega+\tau,\end{aligned}$$

则当 $t\geqslant l_1'\omega+\tau$ 时,有

$$k_1\bar{u}_1(t)+\bar{u}_2(t)\leqslant\frac{\tilde{M}_1}{\check{\beta}}+1,\ \tilde{M}_1:=M_1|\Omega|k_3,$$

$l_1'>l_1$ 是一常数.从而有

$$\|\bar{u}_2(t)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\frac{\tilde{M}_1}{\check{\beta}}+1, \qquad \forall t\geqslant l_1'\omega+\tau.$$

根据 $\Gamma(t,s,x,y)$ 和 u_1 的有界性,由式(2)中第二个方程得到

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}\leqslant\nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)]-\check{\beta}(t,x)u_2(t,x)+c\bar{u}_2(t),$$

$$\forall t\geqslant l_1'\omega+\tau,$$

其中 c 是一个常数.由标准抛物方程的最大值原理,存在一个常数 $l_2 = l_2(\boldsymbol{\phi}) > l_1(\boldsymbol{\phi})$ 和一个与初值 $\boldsymbol{\phi}$ 无关的正常数 M_2,使得 $u_2(t,x;\boldsymbol{\phi}) \leqslant M_2$ 对所有的 $t \geqslant l_2\omega + \tau$ 和 $x \in \bar{\Omega}$ 成立.所以,对于任一 $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}_\tau^+$,都有 $\sigma_{\boldsymbol{\phi}} = \infty$.

由以上分析知 $\boldsymbol{\Psi}_t: \mathcal{C}_\tau^+ \to \mathcal{C}_\tau^+$ 是点耗散的.令 $n_0 = \min\{n \in \mathbf{N}: n\omega \geqslant 2\tau\}$,则 $\boldsymbol{\Psi}_\omega^{n_0}: \mathcal{C}_\tau^+ \to \mathcal{C}_\tau^+$ 是紧的.从而由文献[17]定理1.1.2知 $\boldsymbol{\Psi}_\omega: \mathcal{C}_\tau^+ \to \mathcal{C}_\tau^+$ 有一个全局吸引子.

2　阈值动力学

2.1　基本再生数

考虑如下周期抛物方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla\phi(t,x)] + a(t,x)\phi(t,x) - \\ \qquad b(t,x)\phi^2(t,x), \qquad t > 0,\ x \in \Omega, \\ [D_1(t,x)\nabla\phi(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

方程(8)在零解处线性化后的特征值问题为

$$\begin{cases} \phi_t - \nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla\phi(t,x)] - a(t,x)\phi = \mu\phi, \qquad t > 0,\ x \in \Omega, \\ [D_1(t,x)\nabla\phi(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ \phi(0,x) = \phi(\omega,x), \qquad x \in \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

令 μ_0 表示式(9)的唯一主特征值[18].根据文献[18]定理28.1,得如下结论:

引理1　当 $\mu_0 < 0$ 时,方程(8)有唯一全局吸引的正 ω-周期解 $\phi^*(t,x)$,该解吸引方程(8)所有具有连续非负非平凡初值的解.当 $\mu_0 \geqslant 0$ 时,平凡周期解0是全局吸引的.

将系统(2)的第一个方程中令 $u_2 = 0$,得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)] + a(t,x)u_1(t,x) - \\ \qquad b(t,x)u_1^2(t,x), \qquad t > 0,\ x \in \Omega, \\ [D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

由引理1知,如果 $\mu_0 < 0$,则方程(10)有一个正 ω-周期解 $u_1^*(t,x)$,该周期解吸引方程(10)的所有具有非负非平凡初值的解.从而,当 $\mu_0 < 0$ 时,系统(2)有唯一的无病平衡稳态解 $(u_1^*, 0)$.在以后的讨论中,始终假设 $\mu_0 < 0$ 是成立的.

现在定义模型(2)的基本再生数.首先,依照文献[15]中第3部分,定义次代算子 $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(\phi)(t) := \int_0^\infty K(t,s)\phi(t-s)\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in \mathbf{R},\ \phi \in C_\omega(\mathbf{R},Y), \tag{11}$$

其中

$$K(t,s) := \begin{cases} C(t)V_2(t-\tau,t-s), \qquad s > \tau, \\ 0, \qquad s \in [0,\tau], \end{cases}$$

$$(C(t)\psi)(x) := \int_\Omega \Gamma(t,t-\tau,x,y)h(t-\tau,y)u_1^*(t-\tau,y)\psi(y)\mathrm{d}y, \qquad \forall\psi \in Y,$$

$V_2(t,s)$, $t > s$, $s,t \in \mathbf{R}$ 是由式(3)所生成的发展算子(在1.1小节中已经定义), $C_\omega(\mathbf{R},Y)$ 表示所有从 $\mathbf{R}$ 到 Y 的 ω-周期函数组成的Banach空间.紧接着,将算子 $\mathcal{L}$ 的谱半径 $\mathcal{R}_0$ 定义为模型(2)的基本再生数

$$\mathscr{R}_0 := r(\mathscr{L}). \tag{12}$$

2.2 阈值动力学

将系统 (2) 在 $(u_1^*, 0)$ 处线性化,得到关于染病群体的方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla v(t,x)] - \beta(t,x)v(t,x) + \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Gamma(t,t-\tau,x,y)h(t-\tau,y)u_1^*(t-\tau,y)v(t-\tau,y)\mathrm{d}y, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t>0,\ x\in\Omega, \\ [D_2(t,x)\nabla v(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t>0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{13}$$

类似于系统(5)解的存在性的证明,易知方程(13)拥有一个适度解 $v(t,x;\varphi)$ 满足 $v_0(\cdot,\cdot;\varphi) = \varphi$ 且 $v_t(\cdot,\cdot;\varphi)\in E^+$,这里 $E := C([-\tau,0],Y)$, $E^+ := C([-\tau,0],Y^+)$, $\forall t\geqslant 0$.此外,当 $t>\tau$ 时,$v(t,x;\varphi)$ 是古典解.定义 $P:E\to E$, $P(\varphi)=v_\omega(\varphi)$, $v_\omega(\varphi)(s,x)=v(\omega+s,x;\varphi)$, $\forall (s,x)\in[-\tau,0]\times\bar{\Omega}$.用 $r_0=r(P)$ 表示 P 的谱半径.利用文献[15]定理 3.4 的证明方法,可得到如下结论:

定理 2 $\mathscr{R}_0 - 1$ 与 $r_0 - 1$ 的符号相同.

引理 2 令 $\mu = (\ln r_0)/\omega$,则存在一个正 ω- 周期函数 $v_*(t,x)$ 使得 $\mathrm{e}^{\mu t}v_*(t,x)$ 是方程(13)的一个解.

证明 令 $\bar{\varphi}$ 为对应于 $r_0=r(P)$ 的特征函数,则 $P(\bar{\varphi})=r_0\bar{\varphi}$.用 $w(t,x;\bar{\varphi})$ 表示方程(13)初值为 $\bar{\varphi}$ 的解,由 $\bar{\varphi}\gg 0$ 知 $w(\cdot,\cdot;\bar{\varphi})\gg 0$.令 $v_*(t,x)=\mathrm{e}^{-\mu t}w(t,x;\bar{\varphi})$, $t\geqslant -\tau$,则有 $v_*(t,x)>0$, $\forall (t,x)\in[-\tau,\infty)\times\Omega$, 并且

$$\frac{\partial v_*}{\partial t}(t,x) = \mathrm{e}^{-\mu t}\partial_t w(t,x;\bar{\varphi}) - \mu\mathrm{e}^{-\mu t}w(t,x;\bar{\varphi}). \tag{14}$$

从而 $v_*(t,x)$ 是 ω- 周期系统(14)的一个解,其中 $v_*(s,x)=\mathrm{e}^{-\mu s}\bar{\varphi}(s,x)$, $(s,x)\in[-\tau,\infty)\times\Omega$.由 $\mu=(\ln r_0)/\omega$ 知 $\mathrm{e}^{-\mu\omega}r_0=1$,则对任意 $\theta\in[-\tau,0]$, 有

$$\begin{aligned} v_*(\omega+\theta,x) &= \mathrm{e}^{-\mu(\omega+\theta)}P(\bar{\varphi})(\theta,x) = \mathrm{e}^{-\mu(\omega+\theta)}r_0\bar{\varphi}(\theta,x) = \\ &\quad \mathrm{e}^{-\mu\theta}w(\theta,x;\bar{\varphi}) = v_*(\theta,x). \end{aligned}$$

因此, $v_*(\omega+\theta,x)=v_*(\theta,x)$, $\forall(\theta,x)\in[-\tau,0]\times\Omega$.从而由式(14)解的唯一性得到, $v_*(t,x)=v_*(t+\omega,x)$, $\forall t\geqslant 0$,即 $v_*(t,x)$ 是式(14)的一个 ω- 周期解.显然, $\mathrm{e}^{\mu t}v_*(t,x)$ 是方程(13)的一个解. □

引理 3 $\boldsymbol{u}(t,x;\boldsymbol{\phi})$ 是系统(2)以 $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2)\in\mathcal{C}_\tau^+$ 为初值的解,如果 $\lim_{t\to\infty}u_2(t,x;\boldsymbol{\phi})=0$,则存在一个常数 $\varrho>0$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty} u_1(t,x;\boldsymbol{\phi}) \geqslant \varrho$$

对 $x\in\bar{\Omega}$ 一致成立.

证明 由于 $\lim_{t\to\infty}u_2(t,\cdot;\boldsymbol{\phi})=0$,则对任意 $\rho>0$,存在常数 $k'>0$ 使得 $u_2(t,\cdot;\boldsymbol{\phi})\leqslant\rho$, $\forall t>k'\omega$.从而有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} \geqslant \nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)] + \\ \qquad [a(t,x)-h(t,x)\rho]u_1(t,x) - b(t,x)u_1^2(t,x), \qquad t>k'\omega,\ x\in\Omega, \\ [D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t>k'\omega,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{15}$$

考虑如下带有参数 ρ 的扰动方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1^\rho(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla u_1^\rho(t,x)] + \\ \qquad [a(t,x) - h(t,x)\rho]u_1^\rho(t,x) - b(t,x)[u_1^\rho(t,x)]^2, \\ \qquad\qquad t > k'\omega,\ x \in \Omega, \\ [D_1(t,x)\nabla u_1^\rho(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \quad t > k'\omega,\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{16}$$

根据引理1,可选取足够小的 ρ 使得方程(16)的主特征值 $\mu_0^\rho < 0$.此时,由引理1可知方程(16)有唯一正 ω- 周期解 $u_1^{*\rho}(t,x)$,该解吸引方程(16)的所有具有非负非平凡初值的解,即 $\lim_{t\to\infty} u_1^\rho(t,x;\boldsymbol{\phi}) = u_1^{*\rho}(t,x)$ 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立.由抛物方程的比较原理得

$$u_1(t,x;\boldsymbol{\phi}) \geqslant u_1^\rho(t,x;\boldsymbol{\phi}) > 0, \qquad \forall t > k'\omega,\ x \in \bar{\Omega},$$

这里 $u_1^\rho(t,x;\boldsymbol{\phi})$ 是方程(16)满足条件 $u_1^\rho(s,x;\boldsymbol{\phi}) = \phi_1(s,x)$ 的解,$s \in [k'\omega - \tau, k'\omega]$.考虑到 $\lim_{\rho\to 0} u_1^{*\rho}(t,\cdot) = u_1^*(t,\cdot)$,则有

$$\limsup_{t\to\infty} u_1(t,x;\boldsymbol{\phi}) \geqslant \limsup_{t\to\infty} u_1^\rho(t,x;\boldsymbol{\phi}) \geqslant \sup_{t\in[0,\omega]} \frac{1}{2} u_1^{*\rho}(t,x) \geqslant \sup_{t\in[0,\omega]} \frac{1}{4} u_1^*(t,x)$$

对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立.显然,存在常数 $\varrho > 0$,使得 $4\varrho < \sup_{t\in[0,\omega]} u_1^*(t,x)$ 对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立.从而对所有 $x \in \bar{\Omega}$,都有 $\limsup_{t\to\infty} u_1(t,x;\boldsymbol{\phi}) \geqslant \varrho$,引理得证.

定理3　$\boldsymbol{u}(t,x;\boldsymbol{\phi})$ 为系统(2)满足初值条件 $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{\phi} = (\phi_1,\phi_2) \in \mathcal{C}_\tau^+$ 的解,有如下结论:

(i) 如果 $\mathcal{R}_0 < 1$,则 ω- 周期解 $(u_1^*(t,x),0)$(无病周期解)在 $\mathcal{C}_\tau^+$ 上是全局渐近吸引的;

(ii) 如果 $\mathcal{R}_0 > 1$,则系统(2)至少有一个正 ω- 周期解 $(\tilde{u}_1(t,x),\tilde{u}_2(t,x))$,同时存在一个 $\delta > 0$ 使得对任意满足 $\phi_i(0,\cdot) \not\equiv 0, i = 1,2$ 的 $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}_\tau^+$,有

$$\liminf_{t\to\infty} u_i(t,x;\boldsymbol{\phi}) \geqslant \delta, \qquad i = 1,2$$

对 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立.

证明　(i) 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时,由定理2知 $r_0 < 1$,从而 $\mu = (\ln r_0)/\omega < 0$.考虑如下带有参数 $\epsilon > 0$ 的扰动方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2^\epsilon(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla u_2^\epsilon(t,x)] - \beta(t,x)u_2^\epsilon(t,x) + \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Gamma(t,t-\tau,x,y)h(t-\tau,y)(u_1^*(t-\tau,y) + \epsilon)u_2^\epsilon(t-\tau,y)\mathrm{d}y, \\ \qquad\qquad t \geqslant 0,\ x \in \Omega, \\ [D_2(t,x)\nabla u_2^\epsilon(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \quad t \geqslant 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u_2^\epsilon(s,x) = \varphi(s,x), \quad \varphi \in E,\ s \in [-\tau,0],\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{17}$$

定义方程(17)的 Poincaré 映射 $P_\epsilon: E \to E, P_\epsilon(\varphi) = (u_2^\epsilon)_\omega(\varphi)$, $\forall \varphi \in E$,这里 $(u_2^\epsilon)_\omega(\varphi)(s,x) = u_2^\epsilon(\omega + s,x;\varphi)$, $\forall (s,x) \in [-\tau,0] \times \bar{\Omega}$, $u_2^\epsilon(t,x;\varphi)$ 是方程(17)满足初值条件 $u_2^\epsilon(s,x) = \varphi(s,x)$, $\forall (s,x) \in [-\tau,0] \times \Omega$ 的解.令 $r_\epsilon = r(P_\epsilon)$ 表示 P_ϵ 的谱半径.由 $r_0 < 1$ 知存在一个足够小的 $\epsilon_1 > 0$ 使得对所有的 $\epsilon \in [0,\epsilon_1)$,都有 $r_\epsilon < 1$.固定一个 $\epsilon \in (0,\epsilon_1)$,有 $\mu_\epsilon = (\ln r_\epsilon)/\omega < 0$.根据引理2,存在一个 ω- 周期函数 $v_*^\epsilon(t,x)$ 使得 $u_2^\epsilon(t,x) = \mathrm{e}^{\mu_\epsilon t} v_*^\epsilon(t,x)$ 是方程(17)的一个

解.特别地,$v_*^\epsilon(t,x)>0,\forall(t,x)\in(0,\infty)\times\bar{\Omega}$.

另一方面,易见 $u_1(t,x)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}\leqslant\nabla\cdot[D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)]+a(t,x)u_1(t,x)-b(t,x)u_1^2(t,x),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t>0,\ x\in\Omega,\\ [D_1(t,x)\nabla u_1(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu}=0,\qquad t>0,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{18}$$

根据引理 1 和比较原理,存在常数 $k>0$ 使得 $u_1(t,x;\boldsymbol{\phi})\leqslant u_1^*(t,x)+\epsilon,\forall t\geqslant k\omega,x\in\bar{\Omega}$.因此,对于任意给定的 $\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+$, 都有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}\leqslant\nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)]-\beta(t,x)u_2(t,x)+\\ \qquad\displaystyle\int_\Omega\Gamma(t,t-\tau,x,y)h(t-\tau,y)(u_1^*(t-\tau,y)+\epsilon)u_2(t-\tau,y)\mathrm{d}y,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t\geqslant k\omega+\tau,\ x\in\Omega,\\ [D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu}=0,\qquad t\geqslant k\omega+\tau,\ x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{19}$$

由于 $u_2(t,x;\boldsymbol{\phi})$ 有界,则存在 $\alpha>0$ 使得 $u_2(t,x;\boldsymbol{\phi})\leqslant\alpha\mathrm{e}^{\mu_\epsilon t}v_*^\epsilon(t,x),\forall t\in[k\omega,k\omega+\tau],x\in\bar{\Omega}$,则由比较原理得 $u_2(t,x;\boldsymbol{\phi})\leqslant\alpha\mathrm{e}^{\mu_\epsilon t}v_*^\epsilon(t,x),\forall t\geqslant k\omega+\tau$.这意味着$\lim_{t\to\infty}u_2(t,x;\boldsymbol{\phi})=0$ 对于 $x\in\bar{\Omega}$一致成立.从而方程(8)是系统(2)中第一个方程的渐近方程.由引理 1 知 $u_1^*(t,x)$ 是方程(8)的全局吸引的解.

接下来,和文献[15]定理 4.3(i)的证明类似,可利用链传递集理论[17]验证 $\lim_{t\to\infty}u_1(t,x;\boldsymbol{\phi})=u_1^*(t,x)$ 对 $x\in\bar{\Omega}$一致成立.

(ii) 当 $\mathscr{R}_0>1$ 时,由定理 2 知 $r_0>1$,因此 $\mu=(\ln r_0)/\omega>0$.令

$$Z_0:=\{\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+:\phi_i(0,\cdot)\not\equiv0,i=1,2\},$$
$$\partial Z_0:=\mathcal{C}_\tau^+\setminus Z_0=\{\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+:\phi_1(0,\cdot)\equiv0\quad\text{or}\quad\phi_2(0,\cdot)\equiv0\},$$

则显然有 $\Psi^n(\omega)Z_0\subset Z_0,\forall n\in\mathbf{N}$.令 $Z_1:=\{\boldsymbol{\phi}\in\partial Z_0:\Psi^n(\boldsymbol{\phi})\in\partial Z_0,\forall n\in\mathbf{N}\}$.用 $J(\boldsymbol{\phi})$ 表示$\{\Psi^n(\boldsymbol{\phi}):\forall n\in\mathbf{N}\}$ 的 omega 极限集.再令 $E_1:=\{(0,0)\}$,$E_2:=\{(u_1^*(t,x),0)\}$.为了证明主要结论,先验证如下 3 个论断.

论断 1 $\cup_{\boldsymbol{\phi}\in Z_1}J(\boldsymbol{\phi})=E_1\cup E_2$.

对任意给定的 $\boldsymbol{\phi}\in Z_1$,由最大值原理知;要么 $u_1(t,x;\boldsymbol{\phi}):=u_1(t;\boldsymbol{\phi})(x)\equiv0$;要么 $u_2(t,x;\boldsymbol{\phi}):=u_2(t;\boldsymbol{\phi})(x)\equiv0,\forall(t,x)\in\mathbf{R}_+\times\bar{\Omega}$.若 $u_1(t,x;\boldsymbol{\phi})\equiv0,\forall(t,x)\in\mathbf{R}_+\times\bar{\Omega}$, 则系统(2)退化成为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}=\nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)]-\beta(t,x)u_2(t,x),\qquad t\geqslant0,\ x\in\Omega,\\ [D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu}=0,\qquad t>0,\ x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

从而 $\lim_{t\to\infty}u_2(t,\cdot;\boldsymbol{\phi})=0$.而如果 $u_2(t,x;\boldsymbol{\phi})\equiv0,\forall(t,x)\in\mathbf{R}_+\times\bar{\Omega}$,则由引理 1 知$\lim_{t\to\infty}u_1(t,x;\boldsymbol{\phi})=u_1^*(t,x)$.因此,$\cup_{\boldsymbol{\phi}\in Z_1}J(\boldsymbol{\phi})=E_1\cup E_2$, 从而该论断得证.

论断 2 E_1 是 Z_0 的一个弱排斥子.

欲证此结论,只需验证存在一个常数 $\zeta>0$, 使得

$$\limsup_{n\to\infty} \|\Psi_\omega^n(\boldsymbol{\phi}) - E_1\| \geqslant \zeta$$

对于所有 $\boldsymbol{\phi} \in Z_0$ 成立即可.事实上,根据引理3,只需取 $\zeta = \varrho/2$ 便可,常数 ϱ 在引理3的证明过程中已经定义,论断2得证.

考虑如下含有参数 $\varepsilon > 0$ 的扰动时间周期抛物方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon(t,x)}{\partial t} = \nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla u^\varepsilon(t,x)] - \beta(t,x)u^\varepsilon(t,x) + \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Gamma(t,t-\tau,x,y)h(t-\tau,y)(u_1^*(t-\tau,y)-\varepsilon)u^\varepsilon(t-\tau,y)\mathrm{d}y, \\ \qquad\qquad t>0,\ x\in\Omega, \\ [D_2(t,x)\nabla u^\varepsilon(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u^\varepsilon(s,x) = \varphi(s,x), \qquad s\in[-\tau,0],\ x\in\bar{\Omega},\ \varphi\in E. \end{cases} \tag{20}$$

定义方程(20)的 Poincaré 映射 $P_\varepsilon: E\to E, P_\varepsilon(\varphi) = u_\omega^\varepsilon(\varphi)$,此处 $u_\omega^\varepsilon(\varphi)(s,x) = u^\varepsilon(\omega+s,x;\varphi)$, $\forall(s,x)\in[-\tau,0]\times\bar{\Omega}, u^\varepsilon(t,x;\varphi)$ 是方程(20)满足初值条件 $u^\varepsilon(s,x)=\varphi(s,x), \forall(s,x)\in[-\tau,0]\times\Omega$ 的解.由 $r_0>1$ 知存在一个充分小的常数 $\varepsilon_1>0$ 使得 $r_\varepsilon = r(P_\varepsilon)>1, \forall\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$,这里 $r(P_\varepsilon)$ 是 P_ε 的谱半径.固定一个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$.根据解对初值的连续依赖性,存在 $\varepsilon_0 \in(0,\varepsilon_1)$,使得 $\forall s\in[-\tau,0]$,只要 $|\boldsymbol{\phi}(s,x)-(u_1^*(s,x),0)|<\varepsilon_0, \boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}_\tau^+, x\in\bar{\Omega}$,就有

$$|(u_1(t,x;\boldsymbol{\phi}),u_2(t,x;\boldsymbol{\phi})) - (u_1^*(t,x),0)| < \varepsilon, \qquad \forall t\in[0,\omega],\ x\in\bar{\Omega}. \tag{21}$$

论断3 E_2 是 Z_0 的一个弱排斥子.

此结论等价于

$$\limsup_{k\to\infty} \|\Psi_\omega^k(\boldsymbol{\phi}) - E_2\| \geqslant \varepsilon_0, \qquad \forall\boldsymbol{\phi}\in Z_0.$$

依旧采用反证法,假设存在 $\boldsymbol{\phi}_0\in Z_0$ 使得

$$\limsup_{k\to\infty} \|\Psi_\omega^k(\boldsymbol{\phi}_0) - E_2\| < \varepsilon_0.$$

从而存在 $k_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\forall(s,x)\in[-\tau,0]\times\bar{\Omega}$,只要 $k\geqslant k_0$,就有

$$|u_1(k\omega+s,x;\boldsymbol{\phi}_0) - u_1^*(k\omega+s,x)| < \varepsilon_0,\ |u_2(k\omega+s,x;\boldsymbol{\phi}_0)| < \varepsilon_0.$$

由式(21)可知只要 $t>k_0\omega$,就有 $u_1(t,x;\boldsymbol{\phi}_0) > u_1^*(t,x)-\varepsilon$ 以及

$$0 < u_2(t,x;\boldsymbol{\phi}_0) < \varepsilon, \tag{22}$$

特别地,$u_2(t,x;\boldsymbol{\phi}_0)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} \geqslant \nabla\cdot[D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)] - \beta(t,x)u_2(t,x) + \\ \qquad \displaystyle\int_\Omega \Gamma(t,t-\tau,x,y)h(t-\tau,y)(u_1^*(t-\tau,y)-\varepsilon)u_2(t-\tau,y)\mathrm{d}y, \\ \qquad\qquad t\geqslant(k_0+1)\omega,\ x\in\Omega, \\ [D_2(t,x)\nabla u_2(t,x)]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0, \qquad t\geqslant(k_0+1)\omega,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{23}$$

令 $\psi_\varepsilon\in E$ 为 P_ε 的对应于 r_ε 的一个正特征函数.由于 $u_2(t,x;\boldsymbol{\phi}_0)>0, \forall(t,x)>(\tau,\infty)\times\Omega$,则存在一个 $\xi>0$,使得

$$u_2((k_0+1)\omega+s,x;\boldsymbol{\phi}_0) \geqslant \xi\psi_\varepsilon, \qquad \forall s\in[-\tau,0],\ x\in\bar{\Omega}.$$

由式(23)和比较原理得

$$u_2(t,x;\boldsymbol{\phi}_0) \geqslant \xi u^\varepsilon(t-(k_0+1)\omega,x;\psi_\varepsilon), \qquad \forall t \geqslant (k_0+1)\omega,\ x \in \bar{\Omega}.$$

因此, $u_2(k\omega,x;\boldsymbol{\phi}) \geqslant \xi u^\varepsilon((k-k_0-1)\omega,x;\psi_\varepsilon) = \xi(r_\varepsilon)^{(k-k_0-1)}\psi_\varepsilon(0,x) \to +\infty$, $k \to +\infty$, 这与式(22)矛盾,则论断 3 得证.

根据论断 3 知: 在 Z_0 中, E_2 是关于 Ψ_ω 的一个孤立不变集,且 $W^s(E_2) \cap Z_0 = \varnothing$, $W^s(E_2)$ 是 E_2 的稳定集.运用循环理论和映射的一致持久性理论(文献[17] 定理 1.3.1、注 1.3.1),可以得到 $\Psi_\omega: \mathcal{C}_\tau^+ \to \mathcal{C}_\tau^+$ 是关于$(Z_0,\partial Z_0)$ 是一致持久的.换言之,存在一个 $\tilde{\delta} > 0$, 使得

$$\liminf_{k\to\infty} \operatorname{dist}(\Psi_\omega^k(\boldsymbol{\phi}),\partial Z_0) \geqslant \tilde{\delta}, \qquad \forall \phi \in Z_0.$$

接下来由文献[17]定理 3.1.1 知周期半流 $\Psi_t: \mathcal{C}_\tau^+ \to \mathcal{C}_\tau^+$ 关于$(Z_0,\partial Z_0)$ 亦是一致持久的.因此,根据文献[19] 定理4.5(令$\rho(x) = \operatorname{dist}(x,\partial Z_0)$ 即可) 可知 $\Psi_\omega: Z_0 \to Z_0$有一个全局吸引子 $\mathcal{A}_0$, 且系统(2) 有一个 ω- 周期解$(\tilde{u}_1(t,\cdot),\tilde{u}_2(t,\cdot)) \in Z_0$.

为了证明实际持久性,采用类似于文献[20]中定理 4.1 的方法.定义一个连续函数 $p: \mathcal{C}_\tau^+ \to [0,\infty)$,

$$p(\boldsymbol{\phi}) = \min_{x\in\bar{\Omega}}(\min_{x\in\bar{\Omega}} \phi_1(0,x), \min_{x\in\bar{\Omega}} \phi_2(0,x)), \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathcal{C}_\tau^+.$$

由 $\mathcal{A}_0 = \Psi_\omega(\mathcal{A}_0)$ 知对任意 $\boldsymbol{\phi} \in \mathcal{A}_0$,有 $\phi_i(0,\cdot) > 0$ 成立, $i = 1,2$.令 $\mathcal{B} := \cup_{t\in[0,\omega]} \Psi_t(\mathcal{A}_0)$,则对任一 $\boldsymbol{\phi} \in Z_0$,都有 $\mathcal{B} \subset Z_0$ 和$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Psi_t(\boldsymbol{\phi}),\mathcal{B}) = 0$.因为 $\mathcal{B}$ 是 Z_0 的紧子集,从而有 $\min_{\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{B}} p(\boldsymbol{\phi}) > 0$.因此,存在一个 $\delta > 0$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty} u_i(t,\cdot;\boldsymbol{\phi}) \geqslant \delta, \qquad \forall \boldsymbol{\phi} \in Z_0,\ i = 1,2.$$

至此,定理 3(ii)中结论得证.

3 结　　论

本文对寄主种群引入了 logistic 增长模式,研究了一类带时滞的周期非局部反应扩散传染病模型.利用次代算子方法定义了模型的基本再生数,进一步给出了疾病持久与消亡的充分条件.同时注意到,对于非自治的时滞传染病模型(种群模型),基本再生数定义为周期函数空间上次代算子的谱半径.本文只得到了相关的抽象结果,而基本再生数的具体表达式很难解析地给出,因此不易得到基本再生数与系数函数的依赖关系.这会导致本文研究结果在实际应用中(如为政府相关管理部门提供疾病的预防策略和决策依据等)很难直接有效推广.因此,借助有效的数值方法来探究在此类模型中影响基本再生数大小的主要因素,也是值得进一步关注的问题.

致谢　本文作者衷心感谢兰州财经大学校级科研项目(Lzufe2017B-10)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] 马知恩, 周义仓, 王稳地,等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 1-24.(MA Zhien, ZHOU Yicang, WANG Wendi, et al. *Mathematics Modeling and Research of Infectious Disease Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 2004: 1-24.(in Chinese))

[2] 王拉娣. 传染病动力学模型及控制策略研究[D]. 博士学位论文. 上海: 上海大学, 2005: 1-9.(WANG Ladi. Infectious disease dynamics and controlling strategy[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai University, 2005: 1-9.(in Chinese))

[3] 谢英超, 程燕, 贺天宇. 一类具有非线性发生率的时滞传染病模型的全局稳定性[J]. 应用数学

和力学, 2015, **36**(10): 1107-1116.(XIE Yingchao, CHENG Yan, HE Tianyu. Global stability of a class of delayed epidemic models with nonlinear incidence rates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(10): 1107-1116.(in Chinese))

[4] PENG Rui, ZHAO Xiaoqiang. A reaction-diffusion SIS epidemic model in a time-periodic environment[J]. *Nonlinearity*, 2012, **25**(5): 1451-1471.

[5] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, **180**(1): 29-48.

[6] 杨亚莉, 李建全, 刘万萌, 等. 一类具有分布时滞和非线性发生率的媒介传染病模型的全局稳定性[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(12): 1291-1299.(YANG Yali, LI Jianquan, LIU Wanmeng, et al. Global stability of a vector-borne epidemic model with distributed delay and nonlinear incidence[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(12): 1291-1299.(in Chinese))

[7] THIEME H R. Spectral bound and reproduction number for infinite-dimensional population structure and time heterogeneity[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2009, **70**(1): 188-211.

[8] BACAËR N. Genealogy with seasonality, the basic reproduction number, and the influenza pandemic[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2011, **62**(5): 741-762.

[9] WANG Wendi, ZHAO Xiaoqiang. Threshold dynamics for compartmental epidemic models in periodic environments[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2008, **20**(3): 699-717.

[10] 王智诚, 王双明. 一类时间周期的时滞反应扩散模型的空间动力学研究[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2013, **49**(4): 535-540.(WANG Zhicheng, WANG Shuangming. Spatial dynamics of a class of delayed nonlocal reaction-diffusion models with a time period[J]. *Journal of Lanzhou University*(*Natural Sciences*), 2013, **49**(4): 535-540.(in Chinese))

[11] WANG Shuangming, ZHANG Liang. Dynamics of a time-periodic and delayed reaction-diffusion model with a quiescent stage[J]. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2016, **47**: 1-25.

[12] ZHANG Liang, WANG Zhicheng. Spatial dynamics of a diffusive predator-prey model with stage structure[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B*, 2015, **20**(6): 1831-1853.

[13] 王双明. 一类具有时滞的周期流行病模型的动力学分析[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, **52**(1): 81-87.(WANG Shuangming. Dynamical analysis of a class of periodic epidemic model with delay[J]. *Journal of Shandong University* (*Natural Science*), 2017, **52**(1): 81-87.(in Chinese))

[14] ZHAO Xiaoqiang. Basic reproduction ratios for periodic compartmental models with time delay[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2015, **29**(1): 1-16.

[15] ZHANG Liang, WANG Zhicheng, ZHAO Xiaoqiang. Threshold dynamics of a time periodic reaction-diffusion epidemic model with latent period[J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, **258**(9): 3011-3036.

[16] MARTIN R H, SMITH H L. Abstract functional-differential equations and reaction-diffusion systems[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1990, **321**(1): 1-44.

[17] ZAOH Xiaoqiang. *Dynamical Systems in Population Biology*[M]. New York: Springer-Verlag, 2003: 1-65.

[18] Hess P. *Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity*[M]. UK: Longman Scientific and Technical, 1991: 91-93.

[19] MAGAL P, ZHAO Xiaoqiang. Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems[J]. *SIAM J Math Anal*, 2005, **37**: 251-275.

[20] LOU Yijun, ZHAO Xiaoqiang. Threshold dynamics in a time-delayed periodic SIS epidemic model[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems—Series B*, 2009, **12**: 169-186.

Spatial Dynamics of Periodic Reaction-Diffusion Epidemic Models With Delay and Logistic Growth

WANG Shuangming, ZHANG Mingjun, FAN Xinman

(*School of Information Engineering*, *Lanzhou University of Finance and Economics*, *Lanzhou* 730020, *P.R.China*)

Abstract: The dynamics of periodic reaction-diffusion epidemic models with delay and logistic growth was investigated based on the theory of dynamic systems. Firstly, the existence of the global attractor of the ω operator associated with the periodic semiflow was proved. Next, the basic reproduction number of the model was introduced via the next generation operator. Finally, by means of the persistence theory and the comparison principle, the sufficient conditions for the disease persistence and extinction were obtained. If the basic reproduction number is less than 1, the disease-free periodic solution will be globally asymptotically stable and the disease will go extinct. If the basic reproduction number is greater than 1, the system will be uniformly persistent and the disease will become endemic.

Key words: logistic growth; periodic system; global attractor; basic reproduction number; uniform persistence

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61662066)

引用本文/Cite this paper:

王双明, 张明军, 樊馨蔓. 一类具时滞的周期 logistic 传染病模型空间动力学研究[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(2): 226-238.

WANG Shuangming, ZHANG Mingjun, FAN Xinman. Spatial dynamics of periodic reaction-diffusion epidemic models with delay and logistic growth[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(2): 226-238.