文章编号:1000-0887(2017)10-1187-08

回收函数与函数的无界性*

李美术, 高 英

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 400047)

摘要: 主要利用回收锥和回收函数来研究函数的下无界性.首先, 针对凸函数在非可微条件下, 利用中值定理和回收锥刻画了凸函数次微分的性质, 并在此基础上给出了基于次可微条件下回收向量的充要条件.其次,将凸性推广到 E- 凸, 在一定条件下,利用回收函数研究了 E- 凸函数的下无界性.最后,通过举例说明这些结果不能推广到拟凸条件.

关 键 词: 回收锥; 回收函数; 广义凸函数; 次微分; 下无界

中图分类号: O174 **文献标志码:** A doi: 10.21656/1000-0887.370307

引 言

在优化问题中,决策者往往希望考虑的优化问题的最优解是有限的.凸性条件保证局部极小也是全局极小,但是很多优化问题并不是凸优化问题,比如在经济学中被广泛运用的 Douglas(道格拉斯)生产函数和固定替代弹性函数都是拟凹函数.这类优化问题虽然不能直接转化成凸优化问题,却可以转化成拟凸优化问题,该问题解的存在性与目标函数的下无界性之间有着密切的关系.因此研究拟凸优化问题的最优解的下无界性有着重要的作用.Rockafellar 在文献[1]中最早提出凸函数的回收锥和回收函数的概念.1990 年黄学祥在文献[2]中对凸性条件进行推广并提出了广义回收锥和广义回收函数.文献[3-5]利用法锥以及次微分等工具通过标量化刻画了多目标优化问题解的特性.文献[6-9]利用回收函数的向量特征刻画了数值函数的下无界性和闭性,并以此研究单目标优化问题解的特征.

近年来,一些学者利用回收锥和回收函数来刻画向量值函数的下无界性和多目标优化问题解集的非空性[10-11].2010 年,Deng 在文献[10]中利用回收函数给出了多目标优化问题的最优性条件.2013 年,Chen(陈哲)在文献[11]中利用回收函数在目标函数下半连续情形下,研究了多目标优化问题的有效解、弱有效解和真有效解.这些文章大多都是研究凸可微优化问题,关于广义凸或者不可微情形的研究很少.因此在广义凸或者不可微情形利用回收函数来刻画函数的无界性就很有必要.

本文主要在文献[7,12]的基础上,针对非可微凸函数,利用文献[13]中的中值定理得到相应结论.随后将凸推广到 E- 凸,并利用回收函数研究了原函数的下无界性.基本结构如下:第

* **收稿日期:** 2016-10-11; **修订日期:** 2017-09-12
基金项目: 国家自然科学基金(11201511;11771064);重庆市科委项目(cstc2015jcyjA00005);重庆市教委项目(KJ1500309)
作者简介: 李美术(1987—),男,硕士生(E-mail: ly15320323775x@163.com);
高英(1982—),女,教授(通讯作者. E-mail: gaoyingimu@163.com).

1 节, 给出基本的定义和引理.第 2 节, 首先,对文献[7]中引理的结论进行推广;其次,将凸函数推广到 E- 凸这类广义凸性,利用回收函数研究了其下无界的特征;然后,在单调性假设的基础上,得到一些相应结论;最后,通过反例说明这些结果不能推广到文献[14-15]的拟凸.

1 预备知识

定义 1[1] 设 C 是 R^n 中一非空凸集,C 的回收锥记为 0^+C, 其定义如下:

$$0^+C=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\in C,\ \boldsymbol{x}\in C,\lambda\geqslant 0\}.$$

定义 2[1] 设 $C\subset R^n$, $f:C\to\mathbf{R}$, 称集合

$$\{(\boldsymbol{x},\mu)\in C\times\mathbf{R}\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant\mu\}$$

为 $f(\boldsymbol{x})$ 的上图,记作 $\mathrm{epi}\,f$.

定义 3[14] 设 C 是 R^n 中凸子集, $f:C\to\mathbf{R}$,若对 $\forall\lambda\in(0,1)$ 和 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C$, 有

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\},$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 是 C 上的拟凸函数.

根据拟凸函数的定义可知,若 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 上单调,则 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 上的拟凸函数.

定义 4[12] 设 $C\subset R^n$,称 C 为 E- 凸集:若存在映射 $E:R^n\to R^n$ 使得对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C$ 和 $\forall\lambda\in(0,1)$ 有

$$\lambda E(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)E(\boldsymbol{y})\in C.$$

定义 5[12] 设 $f:R^n\to\mathbf{R}$,$E:R^n\to R^n$,称 f 为 E- 凸集 C 上的 E- 凸函数是指对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in C$ 和 $\forall\lambda\in(0,1)$, 有

$$f(\lambda E(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)E(\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{y})).$$

定义 6[13] 设 $f:R^n\to\mathbf{R}$ 为凸函数,$\boldsymbol{x}_0\in R^n$, $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的次微分定义为

$$\partial f(\boldsymbol{x}_0)=\{\boldsymbol{\xi}\in R^n\mid f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\ \forall\boldsymbol{x}\in R^n\}.$$

定义 7[1] 设 $f:R^n\to\mathbf{R}$ 和 $g:R^n\to\mathbf{R}$ 为凸函数,若

$$\mathrm{epi}\,g=0^+\mathrm{epi}\,f,$$

则称 $g(\boldsymbol{x})$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的回收函数,记作 0^+f.

文献[1]中介绍了回收函数的相关性质.

性质 1 若 f 是凸函数,则 f 的回收函数 0^+f 是一正齐次凸函数,并且对每一个向量 $\boldsymbol{y}$,有 $(0^+f)(\boldsymbol{y})=\sup f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})$.

性质 2 f 为凸函数,若存在 $\boldsymbol{y}\in R^n$,使得 $(0^+f)(\boldsymbol{y})<0$,则函数 f 下无界.

定义 8[2] 设 C 是 R^n 中任一非空子集,C 的广义回收锥记为$\overline{0^+C}$, 其定义如下:

$$\overline{0^+C}=\{\boldsymbol{y}\mid \exists\lambda_k\to+\infty,\boldsymbol{x}_k\in C,\mathrm{s.t.}\lim_{k\to+\infty}\frac{\boldsymbol{x}_k}{\boldsymbol{\lambda}_k}\to\boldsymbol{y}\}.$$

定义 9[2] 设 $f:R^n\to\mathbf{R}$ 的函数.f 的广义回收函数是由 f 的上图 $\mathrm{epi}\,f$ 的广义回收锥$\overline{0^+\mathrm{epi}\,f}$ 产生的函数.$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{y}$ 处的广义回收函数定义为

$$\overline{0^+f(\boldsymbol{y})}=\inf\{v:(\boldsymbol{y},v)\in\overline{0^+\mathrm{epi}\,f}\}.$$

注 1 对闭凸集而言,回收锥与广义回收锥等价.但在一般情况下, $0^+C\subset\overline{0^+C}$.

注 2 对于闭凸集上的凸函数,广义回收函数与回收函数等价.但在非凸或非闭情况下,广义回收函数比回收函数应用更广.

引理 1[13]（次微分中值定理） 设 $U \subset R^n$ 为开凸子集，$f:U \to \mathbf{R}$ 为凸函数，对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in R^n,\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y},[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] \subset U$.则 $\exists \boldsymbol{u} \in (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 和 $\boldsymbol{\xi} \in \partial f(\boldsymbol{u})$ 使得

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

引理 2[8] 设 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 是可微凸函数，对任意 $t \geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{s} \in 0^+f$，若 f 沿半直线 $\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}$ 方向有界，则 $\limsup_{t\to\infty} \| \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}(t)) \| < \infty$.

引理 3[8] 设 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 是可微凸函数，$\boldsymbol{s} \in 0^+f$ 当且仅当 $\forall \bar{\boldsymbol{x}} \in R^n$，$\forall t \geqslant 0$，沿半直线 $\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}$ 方向上，$\lim_{t\to\infty} \langle \boldsymbol{s}, \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}(t)) \rangle \leqslant 0$.

引理 4[8] 设 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 是可微凸函数，$\boldsymbol{s} \in 0^+f$，如果存在向量 $\boldsymbol{a}$，使 f 沿半直线 $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s}$ 方向下无界，且对于 R^n 中任意向量，总有 f 沿 $\boldsymbol{s}$ 方向是下降的，则 f 沿 $\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}$ 方向下无界.

引理 5[13] 设 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 是凸函数，则 f 在 R^n 中任意开凸子集上连续.

2 主要结果

定理 1 设 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 是凸函数，若对任意的 $t \geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{s} \in 0^+f$，f 沿半直线 $\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}$ 方向有界，则任意 $\boldsymbol{y} \in \partial f(\bar{\boldsymbol{x}}(t))$，总有 $\limsup_{t\to\infty} \|\boldsymbol{y}\| < \infty$.

证明 反证，若存在 $\boldsymbol{y} \in \partial f(\bar{\boldsymbol{x}}(t))$，总有

$$\limsup_{t\to\infty} \|\boldsymbol{y}\| = \infty.$$

则存在单调递增的无界数列 $\{t_j\}$ 使得

$$\lim_{j\to\infty} t_j = \infty.$$

$y_i \to +\infty$ 或 $-\infty$，由凸函数的次微分定义知

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + t_j\boldsymbol{s} + \delta\boldsymbol{e}) - f(\bar{\boldsymbol{x}} + t_j\boldsymbol{s}) \geqslant y_i\delta,$$

其中 y_i 是 $\boldsymbol{y}$ 的第 i 个分量，$\boldsymbol{y} \in \partial f(\bar{\boldsymbol{x}}(t))$.

由引理 5 知 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 是连续函数，上面的式子左边是有界的.而对于式子右边 $y_i\delta$，若 $y_i \to +\infty$，选取 $\delta > 0$；$y_i \to -\infty$，选取 $\delta < 0$.总会有 $y_i\delta \to +\infty$，从而引起矛盾.即假设不成立，从而 $\limsup_{t\to\infty} \|\boldsymbol{y}\| < \infty$.

注 3 定理 1 中 f 为可微函数时，结果退化为引理 2，下面对非可微情况给出例子，说明定理 1 的合理性.

例 1 设 $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$，定义为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 0 处不可微，f 沿 $x > 0$ 的方向趋于 0 时，$f(x)$ 是有界的，此时 $\partial f(0) = [0,1]$，显然它在 0 处的次微分是有界的.

定理 2 设 $f:R^n \to \mathbf{R}$ 是凸函数，$\boldsymbol{s} \in 0^+f$ 当且仅当对任意 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R^n$ 和 $t \geqslant 0$，沿 $\bar{\boldsymbol{x}}(t) = \bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}$ 方向上，存在 $\boldsymbol{y} \in \partial f(\bar{\boldsymbol{x}}(t))$ 使得 $\lim_{t\to\infty} \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant 0$.

证明 先证充分性，因为 $\lim_{t\to\infty} \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant 0$，则存在 $t_0 > 0$ 使得当 $\bar{\boldsymbol{x}} \in (\bar{\boldsymbol{x}} + t_0\boldsymbol{s}, \bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s})$ 时，

$$\langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant 0.$$

因为 $\boldsymbol{y} \in \partial f(\bar{\boldsymbol{x}}(t))$，故由引理 1 有

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

从而

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0.$$

这表明

$$s \in 0^+ f.$$

由引理 5 知 $f: R^n \to \mathbf{R}$ 是连续函数,故 f 在$[\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}} + t_0 \boldsymbol{s}]$ 上连续,从而 f 有界,这表明

$$0^+ f = 0.$$

再证必要性,由凸函数的次微分的性质知

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

因为 $\boldsymbol{s} \in 0^+ f$, 故

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{s}) - f(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0.$$

则对任意 $t \geqslant 0$ 有

$$\langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant 0.$$

所以

$$\lim_{t \to \infty} \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant 0.$$

下面举例说明定理 2 的合理性.

例 2 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 定义为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} x, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

易知 $f(x)$ 在 0 处不可微, $\partial f(0) = [1/2, 1]$, 显然 $0^+ f = \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \leqslant 0 \}$. 则对任意 $\boldsymbol{s} \in 0^+ f$, 总存在 $\boldsymbol{y} \in \partial f(\bar{\boldsymbol{x}}(t))$, 使得 $\lim_{t \to \infty} \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant 0$.

另一方面, 由于 $f(\boldsymbol{x})$ 只在 0 处不可微, $\partial f(0) = [1/2, 1]$, 则对于任意 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}$, 总有 $\boldsymbol{y} \in \partial f(\bar{\boldsymbol{x}}(t)) \subseteq [1/2, 1]$, 要使 $\lim_{t \to \infty} \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant 0$ 成立, 只有 $\boldsymbol{s} \leqslant 0$, 从而 $0^+ f = \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \leqslant 0 \}$.

定理 3 设 $f: R^n \to \mathbf{R}$ 是凸函数, 若对 R^n 中某一向量 $\boldsymbol{a}$ 和非零向量 $\boldsymbol{s}$, 有 $\lim_{t \to \infty} \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle < 0$, $\forall \boldsymbol{y} \in \partial f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s})$, 则 f 沿半直线 $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s}$ 方向下无界.

证明 假设 f 沿半直线 $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s}$ 方向不是下无界的. 由于 $f: R^n \to \mathbf{R}$ 的凸函数, 由定理 1 的证明知 $f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s}) - f(\boldsymbol{a})$ 有界. 另一方面, 由引理 1 知, 存在 $\boldsymbol{u} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s})$ 和 $\boldsymbol{y} \in \partial f(\boldsymbol{u})$ 使得

$$f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s}) - f(\boldsymbol{a}) \leqslant t \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

即对任意 $t \geqslant 0$ 总有

$$f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s}) \leqslant f(\boldsymbol{a}) + t \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

故

$$f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s}) \leqslant f(\boldsymbol{a}) + \lim_{t \to \infty} t \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

又因为 $t \to +\infty$ 时, $\lim_{t \to \infty} t \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} \rangle \to -\infty$, 与定理 1 的证明类似推出矛盾. 这表明反证假设不成立, 因此 f 沿半直线 $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{s}$ 方向下无界.

上述定理都是在凸性假设条件下, 利用凸函数次微分的相关性质得到的结果. 下面基于回收函数的性质, 研究了 E- 凸函数的下无界性. 文献[11] 给出了 E- 凸函数不一定是凸函数的实例, 但给出的形式是比较特殊的分段函数, 下面给出一个较为一般的 E- 凸函数的例子.

例 3 设 $C = \mathbf{R}$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $E: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 定义为

$$f(x) = -x^3, \quad E(x) = x^{2/3}.$$

对 $\forall z \in C = \mathbf{R}$, $E(C) = \{ z \in \mathbf{R} \mid z \geqslant 0 \}$, 且对 $\forall x, y \in C$ 和 $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有

$$\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y)\in E(C).$$

这表明 C 必为 E- 凸集.又因为

$$f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))=-(\lambda x^{2/3}+(1-\lambda)y^{2/3})^3,$$
$$\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y))=-(\lambda x^2+(1-\lambda)y^2).$$

根据二项式展开定理把 $f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))$ 展开,再与 $\lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y))$ 进行比较,易知

$$f(\lambda E(x)+(1-\lambda)E(y))\leqslant \lambda f(E(x))+(1-\lambda)f(E(y)).$$

因此 f 是 E- 凸函数.同时注意到上面例子中的 $f(E(x))=-x$ 是一个凸函数.

定理 4 设 $f:R^n\to\mathbf{R}$, $E:R^n\to R^n$ 且满足 $E(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=E(\boldsymbol{x})+E(\boldsymbol{y})$. f 为 E- 凸集 C 上的 E- 凸函数. $E(\boldsymbol{s})\in\overline{0^+f(E)}$,如果存在向量 $\boldsymbol{a}$,使 f 沿 $E(\boldsymbol{a})t=E(\boldsymbol{a})+tE(\boldsymbol{s})$ 方向下无界,且对于 R^n 中任意向量总有 f 沿 $E(\boldsymbol{s})$ 方向是下降的,则 f 沿 $E(\bar{\boldsymbol{x}}(t))+tE(\boldsymbol{s})$ 方向下无界.

证明 将 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 构造成 R^n 中一向量 $\boldsymbol{c}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的凸组合.即存在 $\lambda\in(0,1)$,使得

$$\bar{\boldsymbol{x}}=(1-\lambda)\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{c}.$$

由于 $E(\boldsymbol{s})\in\overline{0^+f(E)}$,则有

$$f(E(\boldsymbol{c})+tE(\boldsymbol{s}))\leqslant f(E(\boldsymbol{c})).$$

又因

$$\begin{aligned}f(E(\bar{\boldsymbol{x}}(t)))&=f(E(\bar{\boldsymbol{x}})+tE(\boldsymbol{s}))=f(E((1-\lambda)\boldsymbol{a})+E(\lambda\boldsymbol{c})+tE(\boldsymbol{s}))=\\&f((1-\lambda)(E(\boldsymbol{a}+tE(\boldsymbol{s})))+\lambda(E(\boldsymbol{c})+tE(\boldsymbol{s})))\leqslant\\&(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{a}+tE(\boldsymbol{s})))+\lambda f(E(\boldsymbol{c})).\end{aligned}$$

由于 $f(E(\boldsymbol{a}+tE(\boldsymbol{s})))$ 沿 $E(\boldsymbol{s})$ 方向下无界,故 $f(E(\bar{\boldsymbol{x}}(t)))$ 沿该方向下无界.

注 4 事实上,在 $E(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=E(\boldsymbol{x})+E(\boldsymbol{y})$ 下,若 S 为凸集, f 是 E- 凸与 $f(E(\boldsymbol{x}))$ 是凸函数是等价的.

证明 因为 S 是凸集,则 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in S$,则 $E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})\in E(S)$.又因为 $E(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=E(\boldsymbol{x})+E(\boldsymbol{y})$,则

$$\lambda E(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)E(\boldsymbol{y})=E(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\in E(S),$$

故 $E(S)$ 是凸集,必然是 E- 凸集.又因为 f 是 E- 凸函数,对 $\forall\lambda\in(0,1)$, $E(\boldsymbol{x}),E(\boldsymbol{y})\in E(S)$,

$$f(\lambda E(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)E(\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{y})),$$

即

$$f(E(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(E(\boldsymbol{x}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{y})).$$

所以 $f(E(\boldsymbol{x}))$ 为凸函数.这也是为什么例 2 中 $f(E)$ 会是一凸函数的原因.若没有了 S 为凸集这一条件, $f(E)$ 的定义域不是凸集,即便 f 是 E- 凸函数, $f(E)$ 将不再是 S 上的凸函数.

下面举例说明定理 4 的合理性与可推广性.

例 4 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的函数, E_1, E : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的映射,且

$$f(x)=-|2x|,$$

$$E_1(x)=\frac{1}{2}x,$$

$E_1(x)$ 满足定理中的条件, $f(E_1(x))$ 的图像可见图 1.

事实上定理 4 中 $E(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=E(\boldsymbol{x})+E(\boldsymbol{y})$ 这一条件是比较强的一类次线性映射,下面的例子说明不满足 $E(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=E(\boldsymbol{x})+E(\boldsymbol{y})$ 时,定理中的结论仍然可能成立,如

$$f(x)=-|2x|,$$

$$E(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0],\\ x, & \frac{1}{2}x\in(0,+\infty),\end{cases}$$

$$f(E(x))=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0],\\ -x, & x\in(0,+\infty).\end{cases}$$

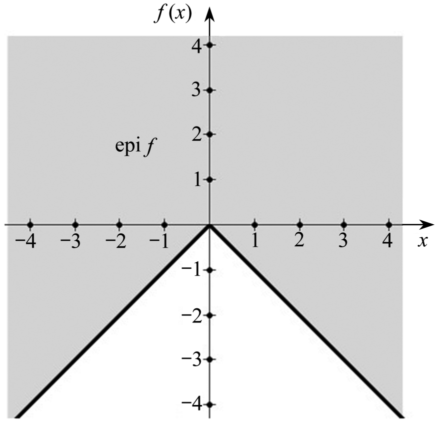

图 1　$f(x)$ 及其上图

Fig. 1　The epi of $f(x)$

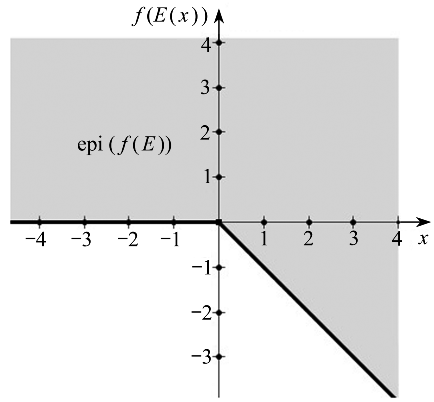

图 2　$f(E(x))$ 及其上图

Fig. 2　The epi of $f(E(x))$

$f(E(x))$ 的图像见图 2,从图中易见 $f(E(x))$ 的上图不是凸集,所以 $f(E(x))$ 不是凸函数,但 $f(E(x))$ 沿 $x>0$ 方向是下无界的.

注 5　若定理 4 中 $f(x)$ 是凸函数,则定理 4 中的结果退化为文献[4]中的结果.

定理 5　$E:R^n\to R^n$ 上的次线性映射,$f:R^n\to\mathbf{R}$ 上的 E-凸函数,$f(E(\boldsymbol{x}))$ 是关于 x 的单调增函数,若 f 沿 $E(\boldsymbol{a})$ 方向下无界,且 $E(\boldsymbol{s})\in\overline{0^+f(E)}$,则 f 沿 R^n 中任意向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 诱导的半直线 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{\boldsymbol{x}}+t\boldsymbol{s}$ 方向下无界.

证明　$f(E(\bar{\boldsymbol{x}})+tE(\boldsymbol{s}))=f(E(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{c})+tE(\boldsymbol{s}))$.

因为 E 为次线性函数,所以

$$E(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{c})\leqslant \lambda E(\boldsymbol{a})+(1-\lambda)E(\boldsymbol{c}).$$

又因 $f(E(\boldsymbol{x}))$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的单调递增函数,所以

$$f(E(\bar{\boldsymbol{x}})+tE(\boldsymbol{s}))\leqslant f(\lambda(E(\boldsymbol{a})+tE(\boldsymbol{s}))+(1-\lambda)(E(\boldsymbol{c})+tE(\boldsymbol{c})))\leqslant \lambda f(E(\boldsymbol{a})+tE(\boldsymbol{s}))+(1-\lambda)f(E(\boldsymbol{c})).$$

由于 $f(E(\boldsymbol{a}+tE(\boldsymbol{s})))$ 沿 $E(\boldsymbol{s})$ 方向下无界,故 $f(E(\bar{\boldsymbol{x}}(t)))$ 沿该方向下无界.

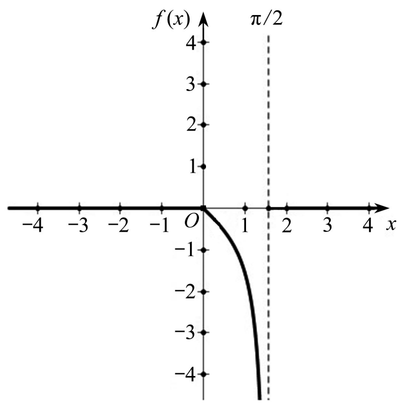

图 3　$f(x)$ 的图像

Fig. 3　The image of $f(x)$

注 6　定理 5 中 $f(E(\boldsymbol{x}))$ 是单调递增函数,根据拟凸函数的性质可知 $f(E(\boldsymbol{x}))$ 一定是关于 $\boldsymbol{x}$ 的拟凸函数,很自然地考虑到定理中的单调增条件是减弱到拟凸情形是否成立,下面的例子说明定理中的这一条件不能减弱为 $f(E(\boldsymbol{x}))$ 一定是关于 $\boldsymbol{x}$ 的拟凸函数.

例 5 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的函数, $E:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的映射,且

$$E(x)=x,$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,0],\\ -\tan x, & x\in(0,\pi/2),\\ 0, & x\in(\pi/2,+\infty).\end{cases}$$

$f(x)$ 的图像如图 3,从图中易见,在 $x=\pi/2$ 处, $f(E(x))$ 是下无界的.但对 $\forall\delta>0$,只要 δ 取定, $f(E(x))$ 沿 $x=\pi/2-\delta$ 和 $x=\pi/2+\delta$ 方向都不可能是下无界的.

3 结　　论

本文在凸性条件下, 研究了函数的回收函数与函数下无界的关系.在 E 为一类特殊次线性映射假设下, 利用广义回收锥和广义回收函数研究了 E- 凸函数的下无界性,并通过例子说明该结论的合理性.进一步考虑 E 为一般次线性映射, 施加单调性条件限制时,上述结论仍然成立.通过举例说明上述条件推广到拟凸时不成立.在接下来的工作中可利用回收锥和回收函数,在广义凸性条件下,进一步研究多目标优化问题解的相关问题.

参考文献(References):

[1] Rockafellar R T. *Convex Analysis*[M]. Princeton N J: Princeton University Press, 1970.

[2] 黄学祥. 广义回收锥与广义回收函数[J]. 湘潭大学自然科学学报, 1990(4): 17-22.(HUANG Xue-xiang. Generalized recovery cone and generalized recovery function[J]. *Natural Science Journal of Xiangtan University*, 1990(4): 17-22.(in Chinese))

[3] 唐莉萍, 李飞, 赵克全, 等. 关于向量优化问题的 Δ 函数标量化刻画的某些注记[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(10): 1095-1106.(TANG Li-ping, LI Fei, ZHAO Ke-quan, et al. About the vector optimization problems Δ function standard quantitative characterization of some note [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(10): 1095-1106.(in Chinese))

[4] 赵勇, 彭再云, 张石生. 向量优化问题有效点集的稳定性[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(6): 643-650.(ZHAO Yong, PENG Zai-yun, ZHANG Shi-sheng. Stability of effective point set for vector optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(6): 643-650.(in Chinese))

[5] 李小燕, 高英. 多目标优化问题 proximal 真有效解的最优性条件[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(6): 668-676.(LI Xiao-yan, GAO Ying. The optimal conditions for the effective solution of the multi-objective optimization problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 668-676.(in Chinese))

[6] Obuchowska W T. On the minimizing trajectory of convex functions with unbounded level sets [J]. *Computational Optimization Applications*, 2003, **27**(1): 37-52.

[7] Obuchowska W T, Murty K G. Cone of recession and unboundedness of convex functions[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, **133**(2): 409-415.

[8] Luc D T. Recession cones and the domination property in vector optimization[J]. *Mathematical Programming*, 1991, **49**(1): 113-122.

[9] Obuchowska W T. Unboundedness in reverse convex and concave integer programming[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2010, **72**(2): 187-204.

[10] Deng S. Boundedness and nonemptiness of the efficient solution sets in multiobjective optimization[J]. *Journal of Optimization Theory Applications*, 2010, **144**(1): 29-42.

[11] CHEN Zhe. Asymptotic analysis in convex composite multiobjective optimization problems[J]. *Journal of Global Optimization*, 2013, **55**(3): 507-520.

[12] 宁刚. *E*- 凸函数的若干特征[J]. 运筹学学报, 2007, **11**(1): 121-126.(NING Gang. A number of characteristics of the *E*- convex function[J]. *Journal of Operational Research*, 2007, **11**(1): 121-126.(in Chinese))

[13] 史树中. 非光滑分析[J]. 数学进展, 1986, **15**(1): 9-21.(SHI Shu-zhong. Nonsmooth analysis [J]. *Mathematical Progress*, 1986, **15**(1): 9-21.(in Chinese))

[14] 杨新民, 戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2016.(YANG Xin-min, RONG Wei-dong. *Generalized Convexity and Its Application*[M]. Beijing: Science Press, 2016.(in Chinese))

[15] 应玫茜, 魏权龄. 非线性规划及其理论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1994.(YING Mei-qian, WEI Quan-ling. *The Theory of Nonlinear Programming and Its Theory*[M]. Beijing: Chinese People's University Press, 1994.(in Chinese))

Recession Functions and Unboundedness of Functions

LI Mei-shu, GAO Ying

(*School of Mathematical Sciences*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 400047, *P.R.China*)

Abstract: The unboundedness of functions was investigated with the recession cones and recession functions. Firstly, the mean value theorem and recession cones were used to characterize the subdifferentials of convex functions on condition of nondifferentiability. Based on the above results, the necessary and sufficient conditions for recession functions under the subdifferentiable assumption were given. Secondly, the convexity was generalized to *E*-convex functions, and the unbounded feature of *E*-convex functions was studied by means of recession functions under the special sub-linear assumption. Finally, an example was given to indicate that these results can not be extended to quasiconvex functions.

Key words: recession cone; recession function; generalized convex function; subdifferential; unboundedness

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11201511;11771064)

引用本文/Cite this paper:

李美术, 高英. 回收函数与函数的无界性[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(10): 1187-1194.

LI Mei-shu, GAO Ying. Recession functions and unboundedness of functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(10): 1187-1194.