文章编号:1000-0887(2017)05-0513-13

带有时滞的 Clifford 值神经网络的全局指数稳定性*

舒含奇[1], 宋乾坤[2]

(1. 重庆交通大学 经济与管理学院, 重庆 400074;
2. 重庆交通大学 数学系, 重庆 400074)

(我刊编委宋乾坤来稿)

摘要: 研究了带有离散时滞和分布时滞的 Clifford 值递归神经网络的全局指数稳定性问题.首先运用 M 矩阵的性质和不等式技巧证明了 Clifford 值递归神经网络平衡点的存在性和唯一性;然后通过数学分析方法, 得到了 Clifford 值递归神经网络全局指数稳定的判定条件;最后数值仿真例子验证了获得结果的有效性.

关 键 词: Clifford 值神经网络; 平衡点; 离散时滞; 分布时滞; 全局指数稳定性; M 矩阵

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A doi:10.21656/1000-0887.370319

引 言

神经网络是人工智能领域的重要分支, 现已广泛应用于信号处理、模式识别、联想记忆、优化控制、保密通讯、工程计算等领域[1-2].自 1982 年美国加州理工学院生物物理学家 Hopfield 建立了神经网络的数学模型后, 实值神经网络得到了广泛研究[3-7].虽然实值神经网络已在诸多领域得到了应用, 但也有其局限性, 如在电磁处理、超声波、量子波、光的物理系统等实际应用中需要处理复数数据.因此, 复值神经网络应运而生.复值神经网络, 即网络神经元的状态、输出、权值和激活函数都为复值, 能够直接处理复值数据.正因如此, 复值神经网络稳定性研究受到了广泛关注[8-16], 现已成为神经网络动力学领域的重要分支之一.文献[8-14]研究了复值神经网络的单稳定性问题, 文献[15-16]研究了分数阶复值神经网络稳定性问题.

作为实值神经网络和复值神经网络的扩展, 基于 Clifford 代数(几何代数)的 Clifford 值神经网络被提出, 现已应用于神经计算、机器人视觉等领域[17].最近, 一些学者对 Clifford 值神经网络的稳定性进行了研究[17-19].在文献[17]中, 利用不动点原理、Clifford 值变分参数方法和不等式技巧, 建立了 Clifford 值神经网络平衡点存在性、唯一性和全局指数稳定性的判定条件.文献[18]考虑了带有常数时滞的 Clifford 值神经网络, 通过分离激活函数方法和建立 Lyapunov-Krasovskii 泛函,获得了网络平衡点存在性、唯一性、全局渐近稳定性和全局指数稳定性

* **收稿日期:** 2016-10-17; **修订日期:** 2017-03-23

基金项目: 国家自然科学基金(61273021;61473332)

作者简介: 舒含奇(1994—), 女, 硕士生(E-mail: shuhanqi@163.com);
宋乾坤(1963—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: qiankunsong@163.com).

的判定条件.文献[19]考虑了具有无界时变时滞的四元数神经网络,将四元数神经网络分解成两个复值神经网络,通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,得到了网络全局 μ- 稳定的充分条件.

众所周知,时滞是造成网络不稳定的根源之一[4].通常,由少量神经元构成的简单电路能够由具有固定时滞的时滞反馈系统来描述,由于神经网络由大量的神经元构成,许多神经元聚成球形或层状结构并相互作用,且通过轴突又连接成各种复杂神经通路,具有大量的并行通道,具有时间和空间特性,因此在神经网络模型中既考虑离散时滞又考虑连续分布时滞更为合理[13].但是具有混合时滞(离散时变时滞和无穷分布时滞)的 Clifford 值神经网络稳定性还没有学者进行过研究.为此,本文研究混合时滞 Clifford 值神经网络的稳定性问题.

1 预备知识

$\mathbb{A}$ 表示 Clifford 代数空间,$\mathbb{A}$ 中元素 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的内积满足下面关系:

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i=0, & i\neq j;\ i,\ j=1,2,\cdots,n,\\ \boldsymbol{e}_i^2=-1, & i=j;\ i=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

为简单起见,当一个元素是由多个 Clifford 元素的乘积得到的,可以直接把下标写在一起,例如

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_{12},\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_6\boldsymbol{e}_7\boldsymbol{e}_8=\boldsymbol{e}_{2678},$$

其中 $\mathbb{A}$ 的基表示如下:

$$\mathbb{A}=\{\boldsymbol{e}_A=\boldsymbol{e}_{h_1h_2\cdots h_r},\ 1\leqslant h_1<h_2<\cdots<h_r\leqslant m\},$$

并且有 $\boldsymbol{x}=\sum_A x^A\boldsymbol{e}_A\in\mathbb{A}$,其中 $x^A\in\mathbf{R}$.特别的,当 $A=\varnothing$ 时,$\boldsymbol{e}_\varnothing$ 可以被写成 $\boldsymbol{e}_0$,则 x_0 就是 $\boldsymbol{e}_0$ 元素的系数.从以上这些性质可以得出结论

$$\dim\ \mathbb{A}=\sum_{i=1}^{n}\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix}=2^m.$$

与复数域相似,一个基本矢量的转置可以被定义为

$$(\boldsymbol{e}_{h_1h_2\cdots h_n})^{\mathrm{T}}=(-1)^r\boldsymbol{e}_{h_1h_2\cdots h_n},$$

或者

$$\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{T}}=(-1)^{n(A)}\boldsymbol{e}_A,$$

其中当 $\boldsymbol{e}_A=\boldsymbol{e}_{h_1h_2\cdots h_n}$ 时,$n(A)=r$.

Clifford 代数中,元素的共轭记作

$$\bar{\boldsymbol{e}}_A=(-1)^{(n(A)-1)n(A)/2}\boldsymbol{e}_A.$$

在此基础上提出了一个新的运算称之为共轭转置,定义为

$$\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{H}}=\overline{\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{T}}}=(-1)^{n(A)(n(A)+1)/2}\boldsymbol{e}_A.$$

从这个定义可以直接得到 $\boldsymbol{e}_A\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{H}}\boldsymbol{e}_A=1$.因此,对于任意一个 Clifford 数 $\boldsymbol{x}=\sum_A x^A\boldsymbol{e}_A$,它的共轭转置可以被写成 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}=\sum_A x^A\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{H}}$.另外,共轭转置也满足 $(\boldsymbol{xy})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$,$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{A}$.

Clifford 代数中的内积被定义为

$$(\gamma,\beta)_0:=[\gamma,\beta^{\mathrm{H}}]_0=\sum_A\gamma^A\beta^A,\qquad\forall\,\gamma,\ \beta\in\mathbb{A},$$

其中 $[\gamma,\ \beta^{\mathrm{H}}]_0$ 表示 $\boldsymbol{e}_0$ 这个元素的系数,$\mathbb{A}$ 上任意数的模也相应的定义为 $|\gamma|_0=\sqrt{(\gamma,\gamma)_0}$,以及 $\mathbb{A}$ 上矩阵的 Euclid(欧几里得) 范数为 $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0}$.

定义 1[7] 若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 的方阵，且 $a_{ii}>0$，而 $a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$，以及 $\boldsymbol{A}$ 自身的逆矩阵为一个非负矩阵，那么称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 M 矩阵.

为获得主要结果，现提出以下引理.

引理 1[18] 对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},a\in\mathbb{A}$，有以下性质成立：

① $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{xy}+\boldsymbol{xz},(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{xz}+\boldsymbol{yz}$;

② $\boldsymbol{xy}\neq\boldsymbol{yx}$, $p\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}p$, $p\in\mathbf{R}$;

③ $[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}]_0=[\boldsymbol{x}]_0+[\boldsymbol{y}]_0$;

④ $|\boldsymbol{xy}|_0\leqslant|\boldsymbol{x}|_0|\boldsymbol{y}|_0$;

⑤ $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|_0\leqslant|\boldsymbol{x}|_0+|\boldsymbol{y}|_0$;

⑥ $|\boldsymbol{x}|_0^2\neq\boldsymbol{xx}^{\mathrm{H}}$, $|\boldsymbol{x}|_0^2=[\boldsymbol{xx}^{\mathrm{H}}]_0$;

⑦ $\int_0^t a\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s=a\int_0^t\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$.

Clifford 代数 $\mathbb{A}$ 中的元素 $\boldsymbol{x}=\sum_A x^A\boldsymbol{e}_A$，$x^A\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{x}(t)$ 的导数与积分具有如下性质：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_A\dot{x}^A\boldsymbol{e}_A,$$

$$\int_0^t\sum_A[x^A(s)\boldsymbol{e}_A]\mathrm{d}s=\left[\sum_A\int_0^t x^A(s)\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{e}_A.$$

引理 2[7] 对于任意的 Clifford 值函数 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{f}(t)\in\mathbb{A}$，$u\in\mathbf{R}$，$t>0$ 以及 $\boldsymbol{f}(t)$ 是一个非线性函数，如果 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=-u\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t)$，那么

$$\boldsymbol{x}(t)=c\mathrm{e}^{-ut}+\mathrm{e}^{-ut}\int\boldsymbol{f}(t)\mathrm{e}^{ut}\mathrm{d}t,$$

其中 $c,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{f}(t)\in\mathbb{A}$.

本文考虑如下带有时变时滞和分布时滞的 Clifford 值神经网络模型：

$$\begin{aligned}\dot{z}_i(t)=&-d_iz_i(t)+\sum_{j=1}^n a_{ij}f_j(z_j(t))+\sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))+\\&\sum_{j=1}^n c_{ij}\int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s)h_j(z_j(s))\mathrm{d}s+J_i,\qquad i=1,2,\cdots,n,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $z_i(t)\in\mathbb{A}$ 表示第 i 个神经元在 t 时刻的状态；$f_j(z_j(t))$，$h_j(z_j(t))$ 和 $g_j(z_j(t))$ 是激励函数；$\boldsymbol{\tau}_{ij}(t)$ 表示离散时变时滞且满足 $0\leqslant\boldsymbol{\tau}_{ij}(t)\leqslant\boldsymbol{\tau}$，其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为常量；$K_{ij}(t)$ 是分布时滞核函数；$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in R^{n\times n}$ 是自反馈矩阵，其中 $d_j>0$ $(j=1,2,\cdots,n)$；$\boldsymbol{A}=(a_{pq})_{n\times n}\in\mathbb{A}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{pq})_{n\times n}\in\mathbb{A}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{C}=(c_{pq})_{n\times n}\in\mathbb{A}^{n\times n}$ 分别表示连接权矩阵、离散时滞连接权矩阵和分布时滞连接权矩阵；$\boldsymbol{J}=(J_1,J_2,\cdots,J_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{A}^n$ 表示外部输入常向量.

模型(1)的初始条件为

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_n(t))^{\mathrm{T}},\qquad t\in(-\infty,0],$$

其中 $\phi_i(t)$ 在 $(-\infty,0]$ 中有界且连续.

定义 2[7] 如果存在常数 $\varepsilon>0$，$\boldsymbol{K}>\boldsymbol{0}$，使得对 $\forall t>0$，有

$$\left[\sum_{i=1}^n|z_i(t)-z_i^*|_0^2\right]^{1/2}\leqslant\boldsymbol{K}\|\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{z}^*\|_2\mathrm{e}^{-\varepsilon t},$$

则模型(1)的平衡点 $\boldsymbol{z}^*=(z_1^*,z_2^*,\cdots,z_n^*)^{\mathrm{T}}$ 是全局指数稳定的，其中 $\boldsymbol{z}(t)=(z_1(t),z_2(t),\cdots,z_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是模型(1)的一个解，$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t),\cdots,\phi_n(t))^{\mathrm{T}}$ 是模型(1)的初始条件并且满足

$$\|\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{z}^*\|_2=\sup_{-\infty<s\leqslant 0}\left[\sum_{i=1}^{n}|\phi_i(s)-z_i^*|_0^2\right]^{1/2}.$$

为了分析网络的稳定性，本文给出如下假设：

(H1) 激励函数 $f_j(\cdot)$，$g_j(\cdot)$，$h_j(\cdot)$ 是连续的，并且存在矩阵 $\boldsymbol{\xi}=\mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\boldsymbol{\eta}=\mathrm{diag}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，$\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(l_1,l_2,\cdots,l_n)$，对任意 z_1，$z_2\in\mathbb{A}$，$j=1,2,\cdots,n$，有

$$|f_j(z_1)-f_j(z_2)|_0\leqslant\xi_j|z_1-z_2|_0,$$
$$|g_j(z_1)-g_j(z_2)|_0\leqslant\eta_j|z_1-z_2|_0,$$
$$|h_j(z_1)-h_j(z_2)|_0\leqslant l_j|z_1-z_2|_0,$$

其中 ξ_j,η_j,l_j 为正常数.

(H2) 分布时滞核函数 $K_{ij}(s)$：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 满足

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\beta s}K_{ij}(s)\,\mathrm{d}s=p_{ij}(\beta),$$

其中 $p_{ij}(\beta)$ 是一个定义在 $[0,\delta)$，$\delta>0$ 的连续函数，并且 $p_{ij}(0)=1$，$i,j=1,2,\cdots,n$.

注 1 本文中上角 T 和上角 H 分别表示矩阵的转置和矩阵的共轭转置，对于矩阵 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$) 表示 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是半正定的(正定的).

2 主要结果

定理 1 假设(H1)和(H2)成立，若 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}-|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}-|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}$ 是一个 M 矩阵，则模型(1)存在唯一的平衡点并且平衡点是全局指数稳定的，其中

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n),\ |\boldsymbol{A}|_0=(|a_{pq}|_0)_{n\times n},$$
$$|\boldsymbol{B}|_0=(|b_{pq}|_0)_{n\times n},\ |\boldsymbol{C}|_0=(|c_{pq}|_0)_{n\times n}.$$

证明 本文将分两步证明这个定理.

步骤一 证明平衡点的存在唯一性.

由于模型(1)的平衡点 $\boldsymbol{z}^*=(z_1^*,z_2^*,\cdots,z_n^*)^{\mathrm{T}}$ 满足下列方程：

$$0=-d_iz_i^*+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)h_j(z_j^*)\,\mathrm{d}s+J_i,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

由假设(H2)可以得到式(2)等价于下列方程：

$$\begin{aligned}0=&-d_iz_i^*+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)h_j(z_j^*)\,\mathrm{d}s+J_i=\\&-d_iz_i^*+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}h_j(z_j^*)\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)\,\mathrm{d}s+J_i=\\&-d_iz_i^*+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}h_j(z_j^*)\int_{0}^{+\infty}K_{ij}(y)\,\mathrm{d}y+J_i=\\&-d_iz_i^*+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(z_j^*)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}h_j(z_j^*)+J_i,\end{aligned}$$

其中 $y=t-s$，$i=1,2,\cdots,n$.

令 $\boldsymbol{\Psi}(z)=(\psi_1(z),\psi_2(z),\cdots,\psi_n(z))^{\mathrm{T}}$，其中

$$\psi_i(z)=-d_iz_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(z_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(z_j(t))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}h_j(z_j(t))+J_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

首先，证明 $\boldsymbol{\Psi}(z)$ 是$\mathbb{A}$ 域上的一个单射映射.事实上，如果存在 $z=(z_1, z_2,\cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$，$z'=(z'_1,z'_2,\cdots,z'_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{A}$，并且 $z\neq z'$，使得 $\boldsymbol{\Psi}(z)=\boldsymbol{\psi}(z')$，那么就有

$$0=-d_i(z_i-z'_i)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[f_j(z_j)-f_j(z'_j)]+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[g_j(z_j)-g_j(z'_j)]+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}[h_j(z_j)-h_j(z'_j)],\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

即

$$d_i(z_i-z'_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[f_j(z_j)-f_j(z'_j)]+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[g_j(z_j)-g_j(z'_j)]+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}[h_j(z_j)-h_j(z'_j)],\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

利用假设(H1)，能够得到

$$d_i|z_i-z'_i|_0\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_j|z_j-z'_j|_0+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_j|z_j-z'_j|_0+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0 l_j|z_j-z'_j|_0.$$

也就是说

$$(\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}-|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}-|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L})(|z_1-z'_1|_0,|z_2-z'_2|_0,\cdots,|z_n-z'_n|_0)^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}-|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}-|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}$ 是一个 M 矩阵，因此

$$z_i=z'_i,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

与 $z\neq z'$ 相矛盾，从而 $\boldsymbol{\psi}(z)$ 在$\mathbb{A}$ 上是单射.

接下来，证明当 $\|z\|\to+\infty$ 时，$\|\boldsymbol{\Psi}(z)\|\to+\infty$.

由于 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}-|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}-|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}$ 是一个 M 矩阵，则存在一个正定矩阵 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(p_1, p_2,\cdots,p_n)$ 使得 $\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 也是一个正定矩阵.

令 $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(z)=(\tilde{\psi}_1(z),\tilde{\psi}_2(z),\cdots,\tilde{\psi}_n(z))^{\mathrm{T}}$，其中

$$\tilde{\psi}_i(z)=-d_iz_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}[f_j(z_j)-f_j(0)]+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[g_j(z_j)-g_j(0)]+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}[h_j(z_j)-h_j(0)].$$

计算下式：

$$\begin{aligned}
&z^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(z)+(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(z))^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}z=\\
&\sum_{i=1}^{n}[\bar{z}_ip_i\tilde{\psi}_i(z)+\overline{\tilde{\psi}_i(z)}p_iz_i]=\\
&2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Re}(\bar{z}_ip_i\tilde{\psi}_i(z))=\\
&\sum_{j=1}^{n}\Big[-2d_ip_i|z_i|_0^2+2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(a_{ij}p_i\bar{z}_i(f_j(z_j)-f_j(0)))+\\
&2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(b_{ij}p_i\bar{z}_i(g_j(z_j)-g_j(0)))+2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}(c_{ij}p_i\bar{z}_i(h_j(z_j)-h_j(0)))\Big]\leqslant\\
&\sum_{j=1}^{n}\Big[-2d_ip_i|z_i|_0^2+2\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}p_i\bar{z}_i(f_j(z_j)-f_j(0))|_0+
\end{aligned}$$

$$2\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}p_i\bar{z}_i(g_j(z_j)-g_j(0))|_0+2\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}p_i\bar{z}_i(h_j(z_j)-h_j(0))|_0\Bigg]\leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n}\Bigg[-2d_ip_i|z_i|_0^2+2\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0p_i\xi_j|z_i|_0|z_j|_0+$$
$$2\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0p_i\eta_j|z_i|_0|z_j|_0+2\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0p_il_j|z_i|_0|z_j|_0\Bigg]=$$
$$-2(|z_1|_0,|z_2|_0,\cdots,|z_n|_0)\boldsymbol{PW}(|z_1|_0,|z_2|_0,\cdots,|z_n|_0)^{\mathrm{T}}=$$
$$-(|z_1|_0,|z_2|_0,\cdots,|z_n|_0)(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})(|z_1|_0,|z_2|_0,\cdots,|z_n|_0)^{\mathrm{T}}\leqslant$$
$$-\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\sum_{i=1}^{n}|z_i|_0^2=$$
$$-\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{z}\|^2,$$

其中 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 的最小特征值.利用 Schwarz 不等式, 得到

$$\|\boldsymbol{z}\|\ \|\boldsymbol{P}\|\ \|\tilde{\boldsymbol{\psi}}(z)\|\geqslant\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\|\boldsymbol{z}\|^2.$$

当 $\|\boldsymbol{z}\|\neq 0$ 时, 就有 $\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}(z)\|\geqslant\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\boldsymbol{PW}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})(\|\boldsymbol{z}\|/\|\boldsymbol{P}\|)$.因此, 当 $\|\boldsymbol{z}\|\to\infty$ 时, $\|\tilde{\boldsymbol{\psi}}(z)\|\to\infty$.

综上所述, 模型(1)有唯一的平衡点.

步骤二 证明模型(1)的平衡点是全局指数稳定的.

由于 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}-|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}-|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}$ 是一个 M 矩阵, 因此有

$$d_i-\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_j-\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_j-\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0l_j\sigma_j>0,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

构造函数

$$\Gamma_i(\theta)=d_i-\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_j-\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_j-\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0l_j\sigma_jp_{ij}(\theta),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由假设(H2)可知 $\Gamma_i(0)>0$,且 $\Gamma_i(\theta)$ 在$[0,+\infty)$ 连续, 则存在一个充分小的 $\lambda>0$, 使得

$$\Gamma_i(\lambda)=d_i-\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_j-\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_j-\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0l_j\sigma_jp_{ij}(\lambda)\geqslant\lambda,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

写成矢量形式为

$$\lambda\boldsymbol{E}\leqslant\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}-|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}-|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{LP}(\lambda),$$

其中 $\boldsymbol{P}(\lambda)=(p_{ij}(\lambda))_{n\times n}$, 也就是

$$\boldsymbol{E}\geqslant(\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{E})^{-1}(|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}+|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{LP}(\lambda)),$$

因此

$$\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{E})^{-1}(|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}+|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{LP}(\lambda))\geqslant\boldsymbol{0}.$$

从而

$$[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{E})^{-1}(|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}+|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{LP}(\lambda))]^{-1}\geqslant\boldsymbol{0}.\tag{3}$$

令

$$\tilde{z}_i(t)=z_i(t)-z_i^*,\ \tilde{f}_j(\tilde{z}_j(t))=f_j(\tilde{z}_j(t)+z_j^*)-f_j(z_j^*),$$

$$\tilde{g}_j(\tilde{z}_j(t)) = g_j(\tilde{z}_j(t)+z_j^*) - g_j(z_j^*),\ \tilde{h}_j(\tilde{z}_j(t)) = h_j(\tilde{z}_j(t)+z_j^*) - h_j(z_j^*).$$

则模型(2)可写为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{z}_i(t)}{\mathrm{d}t} = -d_i\tilde{z}_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{f}_j(\tilde{z}_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}\tilde{g}_j(\tilde{z}_j(t-\tau_{ij}(t))) + \sum_{j=1}^n c_{ij}\int_{-\infty}^t K_{ij}(t-s)\tilde{h}_j(\tilde{z}_j(s))\mathrm{d}s,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

由引理 2, 式(4)可以写为

$$\begin{aligned}\tilde{z}_i(t) = {} & \mathrm{e}^{-d_it}\tilde{z}_i(0) + \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n a_{ij}\int_0^t \mathrm{e}^{d_is}\tilde{f}_j(\tilde{z}_j(s))\mathrm{d}s + \\ & \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n b_{ij}\int_0^t \mathrm{e}^{d_is}\tilde{g}_j(\tilde{z}_j(s-\tau_{ij}(s)))\mathrm{d}s + \\ & \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n c_{ij}\int_0^t \mathrm{e}^{d_is}\int_0^{+\infty}K_{ij}(m)\tilde{h}_j(\tilde{z}_j(s-m))\mathrm{d}m\mathrm{d}s,\qquad i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|\tilde{z}_i(t)|_0 \leqslant {} & \mathrm{e}^{-d_it}|\tilde{z}_i(0)|_0 + \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|_0\int_0^t \mathrm{e}^{d_is}|\tilde{f}_j(\tilde{z}_j(s))|_0\mathrm{d}s + \\ & \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n |b_{ij}|_0\int_0^t \mathrm{e}^{d_is}|\tilde{g}_j(\tilde{z}_j(s-\tau_{ij}(s)))|_0\mathrm{d}s + \\ & \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n |c_{ij}|_0\int_0^t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{d_is}K_{ij}(m)|\tilde{h}_j(\tilde{z}_j(s-m))|_0\mathrm{d}m\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}w_i(t) = {} & \mathrm{e}^{-d_it}|\tilde{z}_i(0)|_0 + \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|_0\int_0^t \mathrm{e}^{d_is}|\tilde{f}_j(\tilde{z}_j(s))|_0\mathrm{d}s + \\ & \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n |b_{ij}|_0\int_0^t \mathrm{e}^{d_is}|\tilde{g}_j(\tilde{z}_j(s-\tau_{ij}(s)))|_0\mathrm{d}s + \\ & \mathrm{e}^{-d_it}\sum_{j=1}^n |c_{ij}|_0\int_0^t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{d_is}K_{ij}(m)|\tilde{h}_j(\tilde{z}_j(s-m))|_0\mathrm{d}m\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

显然 $|\tilde{z}_i(t)|_0 \leqslant w_i(t)$.

计算 $w_i(t)$ 的导数, 得到

$$\begin{aligned}\dot{w}_i(t) = {} & -d_iw_i(t) + \sum_{j=1}^n |a_{ij}|_0|\tilde{f}_j(\tilde{z}_j(t))|_0 + \sum_{j=1}^n |b_{ij}|_0|\tilde{g}_j(\tilde{z}_j(t-\tau_{ij}(t)))|_0 + \\ & \sum_{j=1}^n |c_{ij}|_0\int_0^{+\infty}K_{ij}(m)|\tilde{h}_j(\tilde{z}_j(t-m))|_0\mathrm{d}m \leqslant \\ & -d_iw_i(t) + \sum_{j=1}^n |a_{ij}|_0\xi_j|\tilde{z}_j(t)|_0 + \sum_{j=1}^n |b_{ij}|_0\eta_j|\tilde{z}_j(t-\tau_{ij}(t))|_0 + \\ & \sum_{j=1}^n |c_{ij}|_0\int_0^{+\infty}K_{ij}(m)l_j|\tilde{z}_j(t-m)|_0\mathrm{d}m \leqslant \\ & -d_iw_i(t) + \sum_{j=1}^n |a_{ij}|_0\xi_jw_j(t) + \sum_{j=1}^n |b_{ij}|_0\eta_jw_j(t-\tau_{ij}(t)) + \\ & \sum_{j=1}^n |c_{ij}|_0\int_0^{+\infty}K_{ij}(m)l_jw_j(t-m)\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

当 $t>0$ 时, 令

$$q_i(t)=e^{\lambda t}w_i(t),\qquad 0<\lambda<\min\{d_1,d_2,\cdots,d_n\},$$

因此，有

$$\dot{q}_i(t)\leqslant(\lambda-d_i)q_i(t)+e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_jw_j(t)+e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_jw_j(t-\tau_{ij}(t))+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0\int_0^{+\infty}e^{\lambda t}K_{ij}(m)l_jw_j(t-m)dm.$$

令 $q_j^{\dagger}=\sup_{-\infty\leqslant u\leqslant t}q_j(u)$，得到

$$\begin{aligned}\dot{q}_i(t)\leqslant{}&(\lambda-d_i)q_i(t)+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_jq_j^{\dagger}+\\&\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0\int_0^{+\infty}e^{\lambda m}K_{ij}(m)l_jq_j(t-m)dm\leqslant\\&(\lambda-d_i)q_i(t)+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_jq_j^{\dagger}+\\&\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0l_jq_j^{\dagger}\int_0^{+\infty}e^{\lambda m}K_{ij}(m)dm=\\&(\lambda-d_i)q_i(t)+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_jq_j^{\dagger}+\\&\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0l_jq_j^{\dagger}p_{ij}(\lambda).\end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned}&\dot{q}_i(u)-(\lambda-d_i)q_i(u)\leqslant\\&\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0l_jq_j^{\dagger}p_{ij}(\lambda).\end{aligned}$$

两边从 0 到 t 积分，得到

$$\begin{aligned}&q_i(t)=q_i(0)e^{(\lambda-d_i)t}+\\&\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0l_jq_j^{\dagger}p_{ij}(\lambda)\right]\int_0^te^{(\lambda-d_i)(t-u)}du.\end{aligned}$$

容易计算

$$\int_0^te^{(\lambda-d_i)(t-u)}du\leqslant\frac{1}{d_i-\lambda}.$$

因此

$$\begin{aligned}&q_i(t)\leqslant q_i(0)+\\&\left[\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|_0\xi_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|_0\eta_jq_j^{\dagger}+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|_0l_jq_j^{\dagger}p_{ij}(\lambda)\right]\frac{1}{d_i-\lambda}.\end{aligned}\tag{5}$$

令

$$\boldsymbol{Q}(t)=(q_1(t),q_2(t),\cdots,q_n(t))^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{Q}^{\dagger}=(q_1^{\dagger},q_2^{\dagger},\cdots,q_n^{\dagger})^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{q}(0)=(q_1(0),q_2(0),\cdots,q_n(0))^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{P}(\lambda)=(p_{ij}(\lambda))_{n\times n}.$$

则式(5)的向量形式为

$$\boldsymbol{Q}(t)\leqslant\boldsymbol{q}(0)+(\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{E})^{-1}(|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}+|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}(\lambda))\boldsymbol{Q}^{\dagger},$$

也就是

$$\boldsymbol{Q}^{\dagger}\leqslant\boldsymbol{q}(0)+(\boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{E})^{-1}(|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}+|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}(\lambda))\boldsymbol{Q}^{\dagger},$$

因此

$$[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{D}-\lambda \boldsymbol{E})^{-1}(|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}+|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}(\lambda))]\boldsymbol{Q}^{\dagger}\leqslant \boldsymbol{q}(0). \tag{6}$$

由于

$$e^{\lambda t}|\tilde{\boldsymbol{z}}(t)|_0\leqslant e^{\lambda t}\boldsymbol{W}(t)=\boldsymbol{Q}(t)\leqslant \boldsymbol{Q}^{\dagger}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{W}(t)=(w_1(t),w_2(t),\cdots,w_n(t))^{\mathrm{T}}$.由式(3)、(6)和(7), 可得

$$|\tilde{\boldsymbol{z}}(t)|_0\leqslant [\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{D}-\lambda \boldsymbol{E})^{-1}(|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}+|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}(\lambda))]^{-1}|\tilde{\boldsymbol{z}}(0)|_0 e^{-\lambda t}, \tag{8}$$

其中 $|\tilde{\boldsymbol{z}}(0)|_0=(|\tilde{z}_1(0)|_0,|\tilde{z}_2(0)|_0,\cdots,|\tilde{z}_n(0)|_0)^{\mathrm{T}}$.

令 $[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{D}-\lambda \boldsymbol{E})^{-1}(|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}+|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}+|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}(\lambda))]^{-1}=\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{n\times n}$, 则

$$|\tilde{\boldsymbol{z}}(t)|_0\leqslant \boldsymbol{R}|\tilde{\boldsymbol{z}}(0)|_0 e^{-\lambda t},$$

从而

$$|\tilde{z}_i(t)|_0\leqslant \sum_{j=1}^{n} r_{ij}|\tilde{z}_j(0)|_0 e^{-\lambda t},$$

两边平方, 得

$$|\tilde{z}_i(t)|_0^2\leqslant e^{-2\lambda t}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij}|\tilde{z}_j(0)|_0\right)^2\leqslant e^{-2\lambda t}n\sum_{j=1}^{n} r_{ij}^2|\tilde{z}_j(0)|_0^2.$$

令 $\alpha=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n} r_{ij}^2$, 则

$$|\tilde{z}_i(t)|_0^2\leqslant e^{-2\lambda t}n\alpha\sum_{j=1}^{n} r_{ij}|\tilde{z}_j(0)|_0^2,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}|\tilde{z}_i(t)|_0^2\leqslant e^{-2\lambda t}n^2\alpha\sum_{j=1}^{n} r_{ij}|\tilde{z}_j(0)|_0^2,$$

从而

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\tilde{z}_i(t)|_0^2\right)^{1/2}\leqslant n\sqrt{\alpha}\,e^{-2\lambda t}\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij}|\tilde{z}_j(0)|_0^2\right)^{1/2}.$$

令 $K=n\sqrt{\alpha}$, 则根据定义 2 可知模型(1)的平衡点是全局指数稳定的.证毕.

注 2 本文研究的神经网络模型是一类广义的神经网络模型,例如:

(i) 当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$, $\tau_{ij}(t)=\tau(t)$ 时, 模型(1)退化为文献[19]研究的神经网络模型

$$\dot{z}_i(t)=-d_i z_i(t)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(z_j(t))+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_j(x_j(t-\tau(t)))+J_i,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{9}$$

(ii) 当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$, $\tau_{ij}(t)=\tau$ 时, 模型(1)退化为文献[18]研究的神经网络模型

$$\dot{z}_i(t)=-d_i z_i(t)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(z_j(t))+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}g_j(x_j(t-\tau))+J_i,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{10}$$

(iii) 当 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 时, 模型(1)退化为文献[17]研究的神经网络模型

$$\dot{z}_i(t)=-d_i z_i(t)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(z_j(t))+J_i,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{11}$$

对于模型(9)、(10)和(11), 有如下结论.

推论 1 在假设(H1)的条件下, 如果

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}-|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}$$

是一个 M 矩阵, 其中

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n),\ |\boldsymbol{A}|_0=(|a_{pq}|_0)_{n\times n},\ |\boldsymbol{B}|_0=(|b_{pq}|_0)_{n\times n},$$

那么模型(9)和模型(10)存在唯一的平衡点并且该平衡点是全局指数稳定的.

推论 2 在假设(H1)的条件下, 如果

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}$$

是一个 M 矩阵, 其中

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n),\ |\boldsymbol{A}|_0=(|a_{pq}|_0)_{n\times n},$$

那么模型(11)存在唯一的平衡点并且该平衡点是全局指数稳定的.

注 3 在文献[17]中给出了模型(11)的平衡点存在唯一性和全局指数稳定的充分条件是$\rho(\boldsymbol{D}^{-1}|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi})<1$.由 M 矩阵性质和谱半径定义,可知

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}$$

是 M 矩阵等价于

$$\rho(\boldsymbol{D}^{-1}|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi})<1.$$

3 数值仿真算例

例 考虑以下带有混合时滞的二维 Clifford 值递归神经网络模型:

$$\dot{z}_i(t)=-d_iz_i(t)+\sum_{j=1}^{2}a_{ij}f_j(z_j(t))+\sum_{j=1}^{2}b_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))+\sum_{j=1}^{2}c_{ij}\int_{-\infty}^{t}K_{ij}(t-s)h_j(z_j(s))\mathrm{d}s+J_i,\qquad i=1,2,$$

其中

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}10&0\\0&20\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1+e_1-e_2+e_1e_2\\1-e_1+e_2-e_1e_2&3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2+2e_1-2e_2+2e_1e_2\\2-2e_1+2e_2-2e_1e_2&3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&2-e_2+2e_1e_2\\-2+e_2-2e_1e_2&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e_1\\-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e_2+e_1e_2\end{pmatrix},$$

并且其激活函数与核函数为

$$f_j(z_j)=\frac{1-\mathrm{e}^{-x_j^0}}{1+\mathrm{e}^{-x_j^0}}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x_j^1}}e_1+\frac{1-\mathrm{e}^{-x_j^2}}{1+\mathrm{e}^{-x_j^2}}e_2+\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x_j^{12}}}e_{12},$$

$$g_j(z_j)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x_j^0}}+\frac{1}{2(1+\mathrm{e}^{-x_j^1})}e_1+\frac{2}{3(1+\mathrm{e}^{-x_j^2})}e_2+\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x_j^{12}}}e_{12},$$

$$h_j(z_j)=\frac{1}{2(1+\mathrm{e}^{-x_j^0})}+\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x_j^1}}e_1+\frac{3}{4(1+\mathrm{e}^{-x_j^2})}e_2+\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{e}^{-x_j^{12}}}e_{12},$$

$$K_{ij}(\theta)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\theta/3},\qquad i,j=1,2,$$

其中 $z_j=x_j^0+x_j^1e_1+x_j^2e_2+x_j^{12}e_{12}\in\mathbb{A}$, $j=1,2$.并且取$\tau(t)=0.11|\sin t|$, 很容易验证$0\leqslant\tau(t)\leqslant0.11$.

对于任意的$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{A}^2$以及$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{A}^2$.可以得到

$$|f_j(z_j)-f_j(w_j)|_0^2=\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x_j^0}}-\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-\tilde{x}_j^0}}\right)^2+\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x_j^1}}e_1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\tilde{x}_j^1}}e_1\right)^2+$$

$$\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x_j^2}}-\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-\tilde{x}_j^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x_j^{12}}}e_1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\tilde{x}_j^{12}}}e_1\right)^2\leqslant$$

$$\frac{1}{4}(x_j^0-\tilde{x}_j^0)^2+\frac{1}{16}(x_j^1-\tilde{x}_j^1)^2+\frac{1}{4}(x_j^2-\tilde{x}_j^2)^2+\frac{1}{16}(x_j^{12}-\tilde{x}_j^{12})^2\leqslant$$

$$\frac{1}{4}|z_j-w_j|_0^2,$$

因此 $|f_j(z_j)-f_j(w_j)|_0\leqslant\frac{1}{2}|z_j-w_j|_0$,其中 $z_j=x_j^0+x_j^1e_1+x_j^2e_2+x_j^{12}e_{12}\in\mathbb{A}$ ，$z_j=\tilde{x}_j^0+\tilde{x}_j^1e_1+\tilde{x}_j^2e_2+\tilde{x}_j^{12}e_{12}\in\mathbb{A}$ ，以及 $j=1,2$.同理可以计算出

$$|g_j(z_j)-g_j(w_j)|_0\leqslant\frac{1}{2}|z_j-w_j|_0,\ |h_j(z_j)-h_j(w_j)|_0\leqslant\frac{1}{2}|z_j-w_j|_0.$$

很容易计算出

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{D}-|\boldsymbol{A}|_0\boldsymbol{\xi}-|\boldsymbol{B}|_0\boldsymbol{\eta}-|\boldsymbol{C}|_0\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}7&-9/2\\-9/2&16\end{pmatrix}$$

是一个 M 矩阵.因此根据定理 1 可知模型存在唯一的平衡点并且是全局指数稳定的.图 1 证实了对于任意初始点，各状态变量随时间的变化趋于稳定，其中初始点产生自 MATLAB 中 rand 命令.

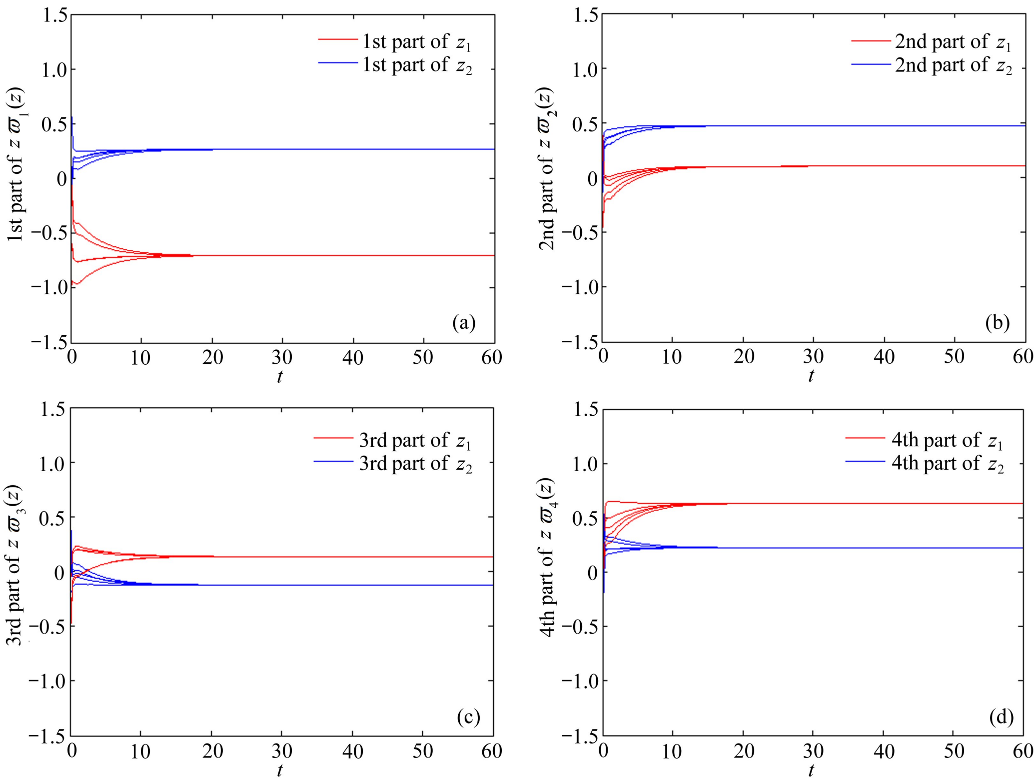

图 1 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 状态变量的时间响应轨线

Fig. 1 The response time histories of state variables $z_1(t)$ and $z_2(t)$

4 结 论

本文研究了带有时变时滞和分布时滞的 Clifford 值神经网络的全局指数稳定性.通过运用 M 矩阵性质和不等式技巧，获得了网络平衡点存在性、唯一性和全局指数稳定性的充分条件，推广了已有文献的结果.数值仿真例子验证了获得结果的有效性.

参考文献(References)：

[1] 廖晓昕. Hopfield 型神经网络的稳定性[J]. 中国科学(A 辑)，1993，**23**(10)：1025-1035.(LIAO Xiao-xin. Stability of Hopfield neural networks[J]. *Science in China* (*Series A*)，1993，**23**(10)：1025-1035.(in Chinese))

[2] 王林山，徐道义. 变时滞反应扩散 Hopfield 神经网络的全局指数稳定性[J]. 中国科学(E 辑)，2003，**33**(6)：488-495.(WANG Lin-shan，XU Dao-yi. Global exponential stability of Hopfield reaction-diffusion neural networks with time-varying delays[J]. *Science in China* (*Series E*)，2003，**33**(6)：488-495.(in Chinese))

[3] CAO Jin-de，XIAO Min. Stability and Hopf bifurcation in a simplified bam neural network with two time delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*，2007，**18**(2)：416-430.

[4] Arik S. Stability analysis of delayed neural networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I：Fundamental Theory and Applications*，2000，**47**(7)：1089-1092.

[5] WANG Dan，HUANG Jie. Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*，2005，**16**(1)：195-202.

[6] ZHANG Ji-ye，JIN Xue-song. Global stability analysis in delayed Hopfield neural network models[J]. *Neural Networks*，2000，**13**(7)：745-753.

[7] SONG Qian-kun，CAO Jin-de. Stability analysis of Cohen-Grossberg neural network with both time-varying and continuously distributed delays[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*，2006，**197**(1)：188-203.

[8] Hirose A. *Complex-Valued Neural Networks：Theories and Applications*[M]. Singapore：World Scientific，2003.

[9] Lee D L. Relaxation of the stability condition of the complex-valued neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*，2001，**12**(5)：1260-1262.

[10] HU Jin，WANG Jun. Global stability of complex-valued recurrent neural networks with time-delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*，2012，**23**(6)：853-865.

[11] ZHOU Bo，SONG Qian-kun. Boundedness and complete stability of complex-valued neural networks with time delay[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*，2013，**24**(8)：1227-1238.

[12] Rakkiyappan R，Velmurugan G，LI Xiao-di. Complete stability analysis of complex-valued neural networks with time delays and impulses[J]. *Neural Processing Letters*，2015，**41**(3)：435-468.

[13] SONG Qian-kun，YAN Huan，ZHAO Zhen-jiang，et al. Global exponential stability of impulsive complex-valued neural networks with both asynchronous time-varying and continuously distributed delays[J]. *Neural Networks*，2016，**81**：1-10.

[14] SONG Qian-kun，ZHAO Zhen-jiang. Stability criterion of complex-valued neural networks with

both leakage delay and time-varying delays on time scales[J]. *Neurocomputing*, 2016, **171**: 179-184.

[15] BAO Hai-bo, Park Ju H, CAO Jin-de. Synchronization of fractional-order complex-valued neural networks with time delay[J]. *Neural Networks*, 2016, **81**: 16-28.

[16] Rakkiyappan R, CAO Jin-de, Velmurugan G. Existence and uniform stability analysis of fractional-order complex-valued neural networks with time delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, **26**(1): 84-97.

[17] ZHU Jing-wen, SUN Ji-tao. Global exponential stability of Clifford-valued recurrent neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2016, **173**: 685-689.

[18] LIU Yang, XU Pei, LU Jian-quan, et al. Global stability of Clifford-valued recurrent neural networks with time delays[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **84**(2): 767-777.

[19] LIU Yang, ZHANG Dan-dan, LU Jian-quan, et al. Global μ-stability criteria for quaternion-valued neural networks with unbounded time-varying delays[J]. *Information Sciences*, 2016, **360**: 273-288.

Global Stability of Clifford-Valued Recurrent Neural Networks With Mixed Time-Varying Delays

SHU Han-qi[1], SONG Qian-kun[2]

(1. *School of Economics and Management*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*;

2. *Department of Mathematics*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*)

(Contributed by SONG Qian-kun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The global exponential stability of Clifford-valued recurrent neural networks (RNNs) with both asynchronous time-varying and continuously distributed delays was studied. First, the existence and uniqueness of the equilibrium points of delayed Clifford-valued RNNs were proved with the inequality technique and the M-matrix properties. Then, based on the mathematical analysis method, some determinant conditions ensuring the global exponential stability of such systems were obtained. The simulation results of a numerical example substantiate the effectiveness of the theoretical analysis.

Key words: Clifford-valued recurrent neural network; equilibrium point; asynchronous time-varying delay; distributed delay; global exponential stability; M-matrix

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61273021; 61473332)

引用本文/Cite this paper:

舒含奇, 宋乾坤. 带有时滞的 Clifford 值神经网络的全局指数稳定性[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 513-525.

SHU Han-qi, SONG Qian-kun. Global stability of Clifford-valued recurrent neural networks with mixed time-varying delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 513-525.