

线性 Hamilton 系统边值问题的保辛数值方法*

蒋宪宏, 邓子辰, 张 凯, 王嘉琪

(西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(本刊编委邓子辰来稿)

摘要: 以 Hamilton 系统的正则变换和生成函数为基础研究线性时变 Hamilton 系统边值问题的保辛数值求解算法.根据第二类生成函数系数矩阵与状态传递矩阵的关系,构造了生成函数系数矩阵的区段合并递推算法,并进一步将递推算法推广到线性非齐次边值问题中;然后利用生成函数的性质将边值问题转化为初值问题,最后采用初值问题的保辛算法求解以达到整个 Hamilton 系统保辛的目的.数值算例表明该方法能够有效地求解线性齐次与非齐次问题,并能很好地保持 Hamilton 系统的固有特性.

关键词: Hamilton 系统; 边值问题; 生成函数; 传递矩阵; 辛算法

中图分类号: O302; O241 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.370365

引 言

Hamilton 系统边值问题广泛存在于最优控制^[1]、天体力学、气体动力学和量子物理学的研究中.相比于初值问题,边值问题解的存在性和唯一性要复杂得多,因此对于边值问题求解理论和数值方法的研究就非常重要.常用的边值问题求解算法包括打靶法、差分法和有限元法等^[2].

Hamilton 系统有很多优越的内在特性,如状态变换为辛变换、相流形保持相空间的面积和体积不变、保持能量和动量不变等^[3].数值仿真过程自然希望数值算法能够保持 Hamilton 系统这些特性.然而,传统的边值问题求解算法并没有考虑 Hamilton 系统的特性,其数值结果往往会歪曲相流的整体特征.

近年来,利用正则变换和生成函数理论来构造 Hamilton 系统边值问题的求解算法,以达到整个系统保辛目的的研究受到了学者的广泛关注.钟万勰等^[4-5]从计算结构力学与最优控制模拟理论出发,在统一的 Hamilton 体系下采用区段混合能理论提出了一系列高性能的数值解法.Kobilarov 和 Marsden^[6]采用离散形式的变分原理,构造了一类离散力学最优控制(DMOC)方法,用于求解最优控制问题.Guibout 和 Park 等^[7-9]在 Hamilton 体系下发展了一套基于生成函数的两点边值问题求解算法,并应用于连续推力下航天器的交会对接和卫星编队重构等问题的求解.Wu(吴志刚)等^[10]利用生成函数得到硬终端约束控制问题最优控制律,避免了在末

* 收稿日期: 2016-11-24; 修订日期: 2017-06-20

基金项目: 国家自然科学基金(11432010)

作者简介: 蒋宪宏(1991—),男,硕士生(E-mail: Jhonstarx@mail.nwpu.edu.cn);

邓子辰(1964—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

端时刻出现无穷大的反馈增益.彭海军等以时间区段两端状态为独立变量并在区段内采用插值近似,构造了基于四类生成函数的非线性系统最优控制辛算法^[11-12],并将生成函数的方法推广到了滚动时域控制中^[13].

本文以 Hamilton 系统的正则变换和生成函数理论为基础来构造 Hamilton 系统边值问题的保辛求解算法.与文献[4-5,10]不同的是,上述文献针对的是线性二次型最优控制问题控制律的求解研究,而本文研究并给出了一般线性时变 Hamilton 系统边值问题的一类保辛数值方法.通过构造生成函数系数矩阵的区段递推算法,并利用生成函数性质将边值问题转化为初值问题,进而采用初值问题的保辛算法求解,使得数值结果能够保持原系统的几何结构特征.本文还将上述求解算法推广到了线性非齐次 Hamilton 系统边值问题中.

1 Hamilton 系统正则变换与边值问题描述

对于一个 Hamilton 系统,可以描述成^[3]

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial H(t, z)}{\partial z}, \quad (1)$$

其中, $z = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n \ p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]^T \in R^{2n}$, \mathbf{J} 为单位辛矩阵, $H(t, z)$ 称为 Hamilton 函数.变量 $q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$, $p = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]^T$ 为 Hamilton 系统的对偶变量,方程(1)可表示为如下对偶正则方程的形式:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (2)$$

对于线性系统,Hamilton 方程(2)可表述成如下线性形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}. \quad (3)$$

线性 Hamilton 方程(3)状态变量之间的正则变换关系可用状态传递矩阵表述为

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \Phi(t_0, t) \begin{bmatrix} q_0 \\ p_0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$\Phi(t_0, t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ \Phi_{21}(t, t_0) & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中状态传递矩阵 $\Phi(t_0, t)$ 是辛矩阵,即 $\Phi(t_0, t)^T \mathbf{J} \Phi(t_0, t) = \mathbf{J}$.

Hamilton 方程是 $2n$ 维的一阶常微分方程组,需要 $2n$ 个边界条件才能进行求解.对于两点边值问题,边界条件通常在 t_0, t_f 两端给定,如

$$q(t_0) = q_0, \quad q(t_f) = q_f. \quad (6)$$

边界条件的提法是多样的,本文仅以上述标准形式为例给出 Hamilton 系统边值问题的保结构求解算法,结论可推广适用于其他形式的边界条件.

2 线性时变 Hamilton 系统边值问题

2.1 Hamilton 系统的生成函数及性质

根据 Hamilton 体系理论^[14],正则变换可以通过相空间坐标混合函数 F 来描述, F 的变量一半来自旧变量组,另一半来自新变量组.混合函数 F 就像是两组正则变量之间的桥梁,因此

被称为变换的生成函数.

Guibout 等^[7-9]采用初始时刻状态变量和当前时刻状态变量来构造生成函数,发展了一套基于生成函数的 Hamilton 系统边值问题求解方法.以第二类生成函数 F_2 为例, F_2 是以初始时刻状态变量 \mathbf{p}_0 和当前时刻状态变量 \mathbf{q} 为变量的混合函数,可表述为 $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0)$.对于线性 Hamilton 系统,可将其 Hamilton 函数表示成二次型形式:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) & \mathbf{C}(t) \\ \mathbf{D}(t) & \mathbf{E}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

其第二类生成函数可以定义成如下二次型形式:

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}(t, t_0) & \mathbf{F}_{12}(t, t_0) \\ \mathbf{F}_{21}(t, t_0) & \mathbf{F}_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{F}_{11}(t, t_0)$, $\mathbf{F}_{12}(t, t_0)$ ($= \mathbf{F}_{21}^T(t, t_0)$), $\mathbf{F}_{22}(t, t_0)$ 是二次型形式的生成函数 $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0)$ 的待求系数矩阵.根据第二类生成函数的性质可得

$$\begin{cases} \mathbf{q}_0 = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{p}_0} = \mathbf{F}_{21}(t, t_0) \mathbf{q} + \mathbf{F}_{22}(t, t_0) \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{p} = \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F}_{11}(t, t_0) \mathbf{q} + \mathbf{F}_{12}(t, t_0) \mathbf{p}_0. \end{cases} \quad (9)$$

当 $t = t_f$ 时,根据式(9)的第一个方程可得到

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{F}_{22}^{-1}(t_f, t_0) (\mathbf{q}_0 - \mathbf{F}_{21}(t_f, t_0) \mathbf{q}_f). \quad (10)$$

上式表明可以通过已知的两端边值条件来确定未知的初值条件,得到完备的初值条件 $[\mathbf{q}_0; \mathbf{p}_0]$,从而可将边值问题转化为初值问题来求解,上述解法的关键在于确定生成函数系数矩阵的值.

根据第二类生成函数的性质式(9),可以将 Hamilton 函数用生成函数表示成

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F}_{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

此外,生成函数 $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0)$ 满足 Hamilton-Jacobi 方程:

$$\frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0. \quad (12)$$

将式(8)和(11)代入上述 Hamilton-Jacobi 方程中,根据向量的任意性可得到一组生成函数系数矩阵的微分方程:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{F}}_{11} + \mathbf{B} + \mathbf{F}_{11} \mathbf{D} + \mathbf{C} \mathbf{F}_{11} + \mathbf{F}_{11} \mathbf{E} \mathbf{F}_{11} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{F}}_{12} + \frac{1}{2} (\mathbf{D}^T \mathbf{F}_{12} + \mathbf{C} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{11} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) \mathbf{F}_{11}) = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{F}}_{22} + \mathbf{F}_{21} \mathbf{E} \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (13)$$

当 $t = t_0$ 时,第二类生成函数描述的是单位变换,即 $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t = t_0, t_0) = \mathbf{q}^T \mathbf{p}_0$,从而有

$$\mathbf{F}_{11}(t_0, t_0) = \mathbf{0}, \mathbf{F}_{12}(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \mathbf{F}_{22}(t_0, t_0) = \mathbf{0}. \quad (14)$$

式(14)给出了微分方程组(13)的初始条件,据此可以通过数值积分方法求解微分方程组(13),从而确定生成函数 $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0)$ 的系数矩阵.

2.2 区段合并递推计算公式

关于生成函数 $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0)$ 系数矩阵的确定,求解微分方程组(13)是一种方法,而本小

节将从另一个角度,根据 Hamilton 系统状态变量的正则变换性质,导出系数矩阵的区段合并递推计算公式,从而求解生成函数的系数矩阵.

根据式(9),状态变量之间的正则变换关系式(4)可用生成函数的系数矩阵表示成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0) & -\mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0)\mathbf{F}_{22}(t, t_0) \\ \mathbf{F}_{11}(t, t_0)\mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0) & \mathbf{F}_{12}(t, t_0) - \mathbf{F}_{11}(t, t_0)\mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0)\mathbf{F}_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

将时间区域 $[t_0, t_f]$ 离散,考虑任意 3 个时刻 $t_i < t_j < t_k$,为了表述方便,将区段 $[t_i, t_j]$ 记作区段 a ,区段 $[t_j, t_k]$ 记作区段 b ,区段 $[t_i, t_k]$ 记作区段 c ,3 个时间区段对应的状态传递矩阵分别为 $\Phi(a)$, $\Phi(b)$, $\Phi(c)$.根据方程(15)可得

$$\Phi(a) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{21}^{-1}(a) & -\mathbf{F}_{21}^{-1}(a)\mathbf{F}_{22}(a) \\ \mathbf{F}_{11}(a)\mathbf{F}_{21}^{-1}(a) & \mathbf{F}_{12}(a) - \mathbf{F}_{11}(a)\mathbf{F}_{21}^{-1}(a)\mathbf{F}_{22}(a) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\Phi(b) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{21}^{-1}(b) & -\mathbf{F}_{21}^{-1}(b)\mathbf{F}_{22}(b) \\ \mathbf{F}_{11}(b)\mathbf{F}_{21}^{-1}(b) & \mathbf{F}_{12}(b) - \mathbf{F}_{11}(b)\mathbf{F}_{21}^{-1}(b)\mathbf{F}_{22}(b) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\Phi(c) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{21}^{-1}(c) & -\mathbf{F}_{21}^{-1}(c)\mathbf{F}_{22}(c) \\ \mathbf{F}_{11}(c)\mathbf{F}_{21}^{-1}(c) & \mathbf{F}_{12}(c) - \mathbf{F}_{11}(c)\mathbf{F}_{21}^{-1}(c)\mathbf{F}_{22}(c) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

状态传递矩阵之间具有如下传递关系:

$$\Phi(c) = \Phi(b)\Phi(a). \quad (19)$$

将式(16)~(18)代入传递关系式(19),整理后可得生成函数系数矩阵的区段合并关系:

$$\mathbf{F}_{11}(c) = \mathbf{F}_{11}(b) + \mathbf{F}_{12}(b)\mathbf{F}_{11}(a)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}_{21}(b), \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_{21}(c) = \mathbf{F}_{21}(a)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}_{21}(b), \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_{22}(c) = \mathbf{F}_{22}(a) + \mathbf{F}_{21}(a)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}_{22}(b)\mathbf{F}_{12}(a), \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{F}_{22}(b)\mathbf{F}_{11}(a). \quad (23)$$

在本文的递推算法中,将时间区域 $[t_0, t_f]$ 离散成 N 个子时间区段,每个子时间区段步长为 τ ,即 $t_0 = t_0, t_1 = t_0 + \tau, \dots, t_k = t_0 + k\tau, \dots, t_N = t_0 + N\tau$.若每个子时间区段的生成函数系数矩阵都已知(方法见下小节),那么按照式(20)~(23)进行递推运算,就可求得第二类生成函数 $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0)$ 系数矩阵随时间变化的值,并用来确定初值条件以及求解相应的初值问题.

2.3 生成函数与状态传递矩阵之间的关系

对比式(4)和(15),可得到生成函数系数矩阵与传递函数系数矩阵之间的关系:

$$\begin{cases} \Phi_{11}(t, t_0) = \mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0), \\ \Phi_{12}(t, t_0) = -\mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0)\mathbf{F}_{22}(t, t_0), \\ \Phi_{21}(t, t_0) = \mathbf{F}_{11}(t, t_0)\mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0), \\ \Phi_{22}(t, t_0) = \mathbf{F}_{12}(t, t_0) - \mathbf{F}_{11}(t, t_0)\mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0)\mathbf{F}_{22}(t, t_0), \end{cases} \quad (24)$$

以及与上式互逆的函数关系

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{11}(t, t_0) = \Phi_{21}(t, t_0)\Phi_{11}^{-1}(t, t_0), \\ \mathbf{F}_{12}(t, t_0) = \Phi_{11}^{-\text{T}}(t, t_0), \\ \mathbf{F}_{21}(t, t_0) = \Phi_{11}^{-1}(t, t_0), \\ \mathbf{F}_{22}(t, t_0) = -\Phi_{11}^{-1}(t, t_0)\Phi_{12}(t, t_0). \end{cases} \quad (25)$$

理论推导表明,生成函数与状态变换在理论上是等价的,然而这并不意味着两种方法可以得到相同的数值结果.当积分区间远大于线性时变系统的特征时间时,状态传递矩阵的数值计算结果存在数值溢出的风险,导致问题的病态;而通过生成函数构造的算法,可避免病态问题的发生.

根据上述理论,生成函数解法的最后一个要点在于如何高精度、高效率地获得系数矩阵在每个子时间区段的值.采用 Magnus 级数方法^[15]计算出每个子时间区段的传递辛矩阵,再根据转换关系(25)即可得到生成函数系数矩阵在每个子时间区段的值.Magnus 级数本质上是一种保辛矩阵指数乘法摄动,属于保结构的几何积分方法,因此用上述方法求得的生成函数系数矩阵递推公式不仅具有很高的数值精度,还能保持 Hamilton 系统的几何结构^[10].

3 线性非齐次 Hamilton 系统边值问题

考虑线性 Hamilton 系统含有非齐次项的情况,即 Hamilton 方程为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(t) \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

对于非齐次方程,需要求解由于非齐次项产生的 Duhamel 积分.文献[16]给出了非齐次项为多项式、弦函数、指数函数以及它们的组合近似表达时,Duhamel 项的精细积分递推计算格式.线性非齐次 Hamilton 方程(26)的解可表述成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \Phi(t_0, t) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中 $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2]$ 为 Duhamel 积分项的计算值.

类比于线性齐次 Hamilton 系统,线性非齐次系统第二类生成函数可以定义成如下形式:

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}_0, t, t_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}(t, t_0) & \mathbf{F}_{12}(t, t_0) \\ \mathbf{F}_{21}(t, t_0) & \mathbf{F}_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} + O_{\text{HOT}}, \quad (28)$$

其中 O_{HOT} 表示生成函数表达式中的高阶项.

根据第二类生成函数的性质,可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial F_2 / \partial \mathbf{p}_0 \\ \partial F_2 / \partial \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{21}(t, t_0) & \mathbf{F}_{22}(t, t_0) \\ \mathbf{F}_{11}(t, t_0) & \mathbf{F}_{12}(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中 $\mathbf{h} = [\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2]$ 对应于生成函数的高阶偏导项.当 $t = t_f$ 时,根据式(29)第一个方程可得到初值条件:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{F}_{22}^{-1}(t_f, t_0) (\mathbf{q}_0 - \mathbf{F}_{21}(t_f, t_0) \mathbf{q}_f - \mathbf{h}_1(t_f, t_0)). \quad (30)$$

根据式(29),线性非齐次 Hamilton 方程的解(27)可用生成函数表示成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0) & -(\mathbf{F}_{21}^{-1} \mathbf{F}_{22})(t, t_0) \\ (\mathbf{F}_{11} \mathbf{F}_{21}^{-1})(t, t_0) & \mathbf{F}_{12}(t, t_0) - (\mathbf{F}_{11} \mathbf{F}_{21}^{-1} \mathbf{F}_{22})(t, t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0) \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 - (\mathbf{F}_{11} \mathbf{F}_{21}^{-1})(t, t_0) \mathbf{h}_1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

对比式(27)和(31)可以看出,线性非齐次系统中生成函数系数矩阵与传递矩阵之间的关系与线性系统一致,而非齐次项部分之间的关系为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = -\mathbf{F}_{21}^{-1}(t, t_0) \mathbf{h}_1, \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{h}_2 - (\mathbf{F}_{11} \mathbf{F}_{21}^{-1})(t, t_0) \mathbf{h}_1, \end{cases} \quad (32)$$

以及与上式互逆的函数关系

$$\begin{cases} \mathbf{h}_1 = -\mathbf{F}_{21}(t, t_0)\mathbf{r}_1, \\ \mathbf{h}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{F}_{11}(t, t_0)\mathbf{r}_1. \end{cases} \quad (33)$$

同样将时间区域 $[t_0, t_f]$ 离散, 考虑任意 3 个时刻 $t_i < t_j < t_k$, 时间区段 a, b, c 的定义与前文一致. 根据式 (27) 可得到各个区段间的传递关系:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{p}_j \end{bmatrix} = \Phi(a) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(a) \\ \mathbf{r}_2(a) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} = \Phi(b) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \mathbf{p}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(b) \\ \mathbf{r}_2(b) \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} = \Phi(c) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{p}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(c) \\ \mathbf{r}_2(c) \end{bmatrix}. \quad (36)$$

联立对比式 (34) ~ (36), 可得到非齐次项对应的区段合并公式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(c) \\ \mathbf{r}_2(c) \end{bmatrix} = \Phi(b) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(a) \\ \mathbf{r}_2(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(b) \\ \mathbf{r}_2(b) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

根据关系式 (32) 可得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(a) \\ \mathbf{r}_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{21}^{-1}(a)\mathbf{h}_1(a) \\ \mathbf{h}_2(a) - \mathbf{F}_{11}(a)\mathbf{F}_{21}^{-1}(a)\mathbf{h}_1(a) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(b) \\ \mathbf{r}_2(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{21}^{-1}(b)\mathbf{h}_1(b) \\ \mathbf{h}_2(b) - \mathbf{F}_{11}(b)\mathbf{F}_{21}^{-1}(b)\mathbf{h}_1(b) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(c) \\ \mathbf{r}_2(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F}_{21}^{-1}(c)\mathbf{h}_1(c) \\ \mathbf{h}_2(c) - \mathbf{F}_{11}(c)\mathbf{F}_{21}^{-1}(c)\mathbf{h}_1(c) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

将式 (17)、(20) ~ (23) 及 (38) ~ (40) 代入非齐次项对应的区段合并公式 (37), 整理后可得到生成函数高阶偏导项的区段合并关系:

$$\mathbf{h}_1(c) = \mathbf{h}_1(a) + \mathbf{F}_{21}(a)\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{F}_{22}(b)\mathbf{h}_2(a) + \mathbf{h}_1(b)), \quad (41)$$

$$\mathbf{h}_2(c) = \mathbf{F}_{12}(b)\mathbf{F}_{11}(a)\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{F}_{22}(b)\mathbf{h}_2(a) + \mathbf{h}_1(b)) + \mathbf{F}_{12}(b)\mathbf{h}_2(a) + \mathbf{h}_2(b). \quad (42)$$

按照与生成函数系数矩阵相同的计算步骤: 将时间区域 $[t_0, t_f]$ 离散成 N 个子时间区段, 每个子时间区段的高阶偏导项 \mathbf{h} 可通过式 (33) 求得, 再根据式 (41)、(42) 进行递推运算, 即可求得第二类生成函数高阶偏导项随时间变化的值, 从而可确定式 (30) 的初值条件并求解相应的初值问题.

4 初值问题的保辛数值算法

根据第 2、3 节的理论推导, 得到了线性齐次和非齐次系统初始端未知的状态变量 \mathbf{p}_0 , 这样就得到了完备的初始条件, 从而可将 Hamilton 系统边值问题转化为初值问题求解. 辛几何是 Hamilton 体系的数学框架, Hamilton 体系的算法必须是从辛几何框架中提出的能保证该体系基本特征的算法^[3], 称之为辛算法. 针对 Hamilton 系统初值问题的保辛数值求解算法已经有很多研究, 学者们提出了诸如辛 Euler 法、辛 Runge-Kutta 法、辛精细积分法等多种保辛算法. 其中基于 Runge-Kutta 算法构造的辛算法, 因其构造简单、适用范围广, 获得了广泛的应用.

对于 Hamilton 方程 (1), s 级隐式 Runge-Kutta 方法的一般格式为

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i, \\ k_i = f(t_n + c_i \tau, z_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j), \end{cases} \quad (43)$$

其中 $i, j = 1, 2, \dots, s, c_i \geq 0, \sum_{i=1}^s c_i = 1, \sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i, \sum_{i=1}^s b_i = 1$. 上述 Runge-Kutta 方法的系数满足以下条件时为辛 Runge-Kutta 方法:

$$b_i b_j - a_{ij} b_i - a_{ji} b_j = 0. \quad (44)$$

上述系数取不同值时可得到不同的辛 Runge-Kutta 方法. 一种常用的二级四阶辛 Runge-Kutta 格式的系数为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

5 数值仿真算例

5.1 算例 1

考虑在地球中心引力场范围内航天器的交会对接问题, 根据圆形参考轨道作线性化处理, 得到平面内的航天器的相对运动微分方程组(无量纲化), 即 Clohessy-Wiltshire 方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{u},$$

其中 $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ y \ \dot{x} \ \dot{y}]^T$ 为航天器的状态变量, $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T$ 为控制力向量. 航天器在平面内最优轨道交会问题要求在指定的时间 t_f 内, 从初始状态 \mathbf{x}_0 调整到期望状态 \mathbf{x}_f . 交会过程中要求航天器消耗能量最省, 即使得如下性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt.$$

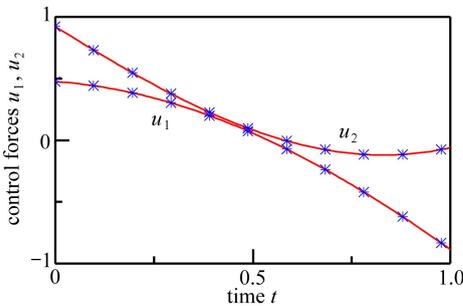


图 1 控制力变化曲线
Fig. 1 Control forces

根据最优控制理论可将该问题转化为一个 Hamilton 系统边值问题求解. 上述最优轨道交会问题对应的 Hamilton 函数为

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}^T \\ \mathbf{P} & -\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}.$$

考虑初始条件 $\mathbf{x}_0 = [-0.1, -0.1, 0, 0]$ 和末端条件 $\mathbf{x}_f = [0, 0, 0, 0]$, 交会时间 $t_f = 1$. 根据第 3 节提出的递推算法求出高精度的初始协态变量 $\boldsymbol{\lambda}_0$, 并分别利用辛算法(辛 Runge-Kutta 法, 简记为 SRK 法)和非辛算法(经典 Runge-Kutta 法, 简记为 RK 法)求解对应的初值问题.

图 1 给出了最优交会问题的控制力的大小, 图 2 为最优交会过程中的位置变化曲线和速

度变化曲线.其中实线为本文算法的计算结果,符号“*”为参考解(采用 GPOPS 工具箱^[17]求解).从图 1、图 2 可看出本文算法结果与参考解吻合,表明本文提出的算法能够有效地求解 Hamilton 系统边值问题.

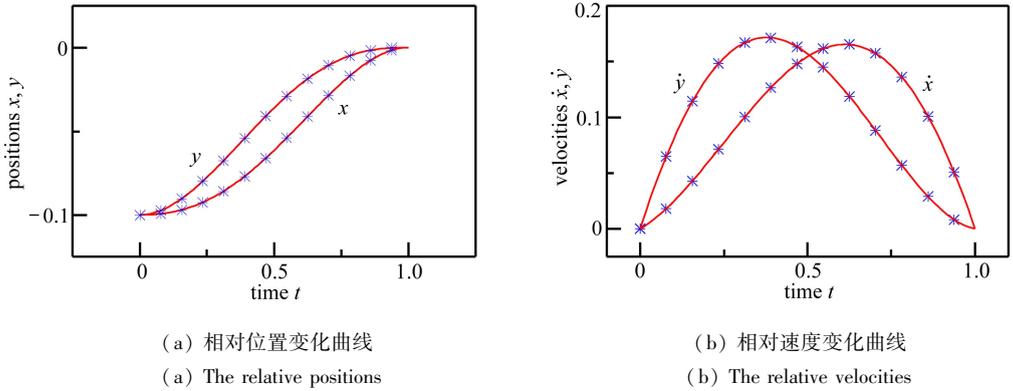


图 2 状态变量

Fig. 2 State variables

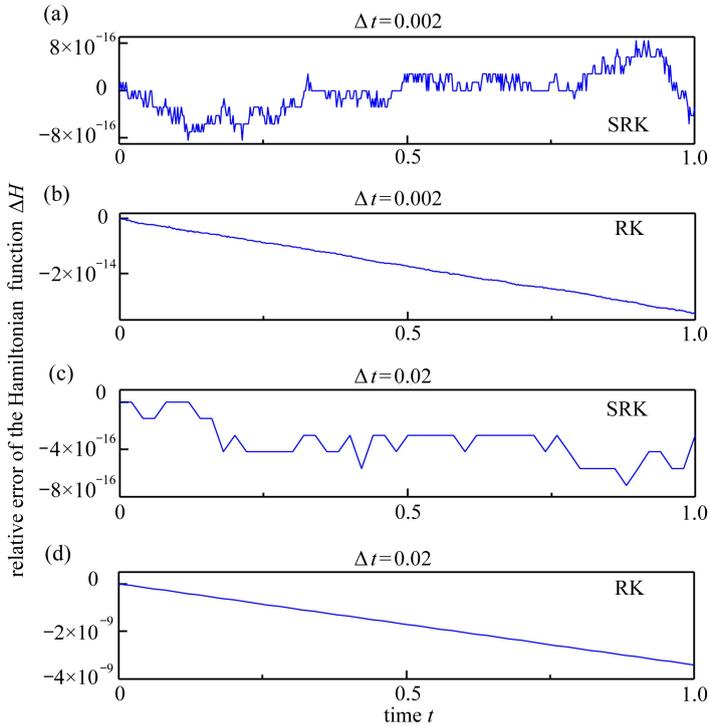


图 3 最优轨道交会问题的 Hamilton 函数相对误差

Fig. 3 Relative errors of the Hamiltonian function for the optimal rendezvous problem

图 3 为最优轨道交会问题的 Hamilton 函数相对误差变化曲线 (ΔH), 其中图 3(a)、(b) 分别为步长取 0.002 时辛算法和非辛算法的计算结果, 图 3(c)、(d) 分别为步长取 0.02 时辛算法和非辛算法的计算结果 $\Delta H(t) = (H(t) - H(0))/H(0)$, $H(0)$ 为 H 在 $t=0$ 时刻的取值. 可以看出, 采用非辛算法求解得到的 Hamilton 函数相对误差随积分时间线性增长, 且误差与积分步长有关, 步长越大误差也越大; 而采用辛算法计算能够高精度地保持 Hamilton 函数的相对误差, 其振荡幅值不随时间而改变, 且积分步长改变并不会影响 Hamilton 函数的计算精度, 说明

辛算法能够很好地保持 Hamilton 系统的定性性质.

5.2 算例 2

考虑一个竖直放置的弹簧振子系统,不受外力作用.其动力学方程可在 Hamilton 体系下表示成

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix},$$

其中 m 为振子质量, k 为弹簧刚度系数.系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 + mgq.$$

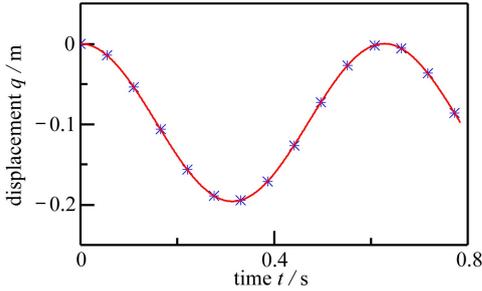


图 4 弹簧振子的位移曲线

Fig. 4 The displacement curve of the spring oscillator

这是一个线性非齐次 Hamilton 系统,选取两端边界条件 $q_0 = 0$ m, $q_f = -0.098$ m, 积分时长 $t_f = (\pi/4)$ s. 系统参数取为 $m = 0.1$ kg, $k = 10$ N/m, $g = 9.8$ m/s².

图 4 给出了弹簧振子的位移变化曲线,图 5 给出了弹簧振子系统的 Hamilton 函数相对误差变化曲线.通过分析图 4、图 5,可以得到结论:对于非齐次问题,本文提出的非齐次递推算法可以有效地求解,且采用辛算法计算时同样能够很好地保持 Hamilton 系统的定性性质.

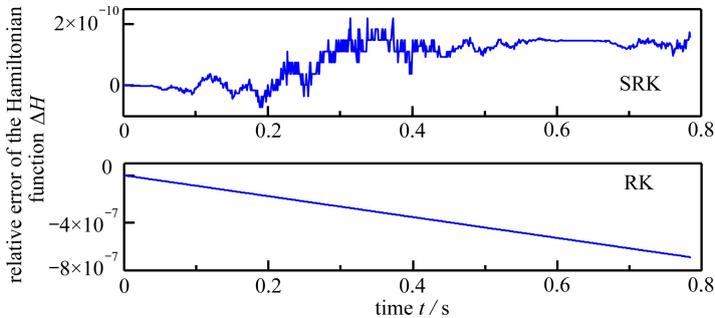


图 5 弹簧振子系统的 Hamilton 函数相对误差

Fig. 5 Relative errors of the Hamiltonian function for the spring oscillator system

6 结 论

Hamilton 系统的一个主要性质就是相流保持辛结构,然而传统的边值问题求解算法并没有考虑系统的特性,其数值结果往往会歪曲相流的整体特征.本文针对线性齐次和非齐次 Hamilton 系统边值问题,基于正则变换和生成函数理论构造了一类保辛数值求解算法.文中根据 Hamilton 系统正则变换的辛矩阵描述,导出了生成函数系数矩阵的保结构递推算法,从而得到高精度的未知初始状态参数,进而采用初值问题的保辛算法求解,使得数值结果能够保持原系统的几何结构特征.数值仿真算例说明:1) 本文提出的递推算法能够有效地求解线性齐次和非齐次 Hamilton 系统的边值问题;2) 采用保辛数值算法求解时,能够保持连续系统的辛几何性质,在大步长离散情况下依然能很好地保持 Hamilton 系统的固有特性.

致谢 本文作者衷心感谢西北工业大学研究生创新创业种子基金(Z2016093)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] Liberzon D. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction* [M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011.
- [2] 陈文斌, 程晋, 吴新明, 等. 微分方程数值解[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2014. (CHEN Wen-bin, CHENG Jin, WU Xin-ming, et al. *Numerical Method of Ordinary Differential Equations* [M]. Shanghai: Fudan University Press, 2014. (in Chinese))
- [3] FENG Kang, QIN Meng-zhao. *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems* [M]. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [4] 钟万勰, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算中的几个问题——分析结构力学的观点[J]. 航天控制, 2007, **25**(6): 3-12. (ZHONG Wan-xie, WU Zhi-gang, TAN Shu-jun. Some issues in theory and computation of state-space control—an analytical structural mechanics viewpoint[J]. *Aerospace Control*, 2007, **25**(6): 3-12. (in Chinese))
- [5] 钟万勰, 高强, 彭海军. 经典力学——辛讲[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2013. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang, PENG Hai-jun. *Classical Mechanics—Its Symplectic Description* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2013. (in Chinese))
- [6] Kobilarov M B, Marsden J E. Discrete geometric optimal control on Lie groups[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2011, **27**(4): 641-655.
- [7] Guibout V M, Scheeres D J. Solving two-point boundary value problems using generating functions: theory and applications to optimal control and the study of Hamiltonian dynamical systems[J]. 2003. arXiv: math/0310475.
- [8] Park C, Scheeres D J. Determination of optimal feedback terminal controllers for general boundary conditions using generating functions[J]. *Automatica*, 2006, **42**(5): 869-875.
- [9] Park C, Scheeres D J, Guibout V. Solving optimal continuous thrust rendezvous problems with generating functions[C]//*AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences*. San Francisco, California, 2005.
- [10] WU Zhi-gang, Mesbahi M. Symplectic transformation based analytical and numerical methods for linear quadratic control with hard terminal constraints[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2012, **50**(2): 652-671.
- [11] 彭海军. 计算最优控制的保辛数值方法及其在平动点附近航天器控制中的应用[D]. 博士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2012. (PENG Hai-jun. Symplectic numerical method for computational optimal control and its application in the control of spacecraft near the libration point [D]. PhD Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2012. (in Chinese))
- [12] PENG Hai-jun, GAO Qiang, WU Zhi-gang, et al. Symplectic approaches for solving two-point boundary-value problems[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, **35**(2): 653-659.
- [13] PENG Hai-jun, TAN Shu-jun, GAO Qiang, et al. Symplectic method based on generating function for receding horizon control of linear time-varying systems[J]. *European Journal of Control*, 2017, **33**: 24-34.
- [14] Goldstein H, Poole C P, Safko J L. *Classical Mechanics*[M]. 3rd ed. San Francisco: Addison-

Wesley, 2001.

- [15] Iserles A, Nørsett S P. On the solution of linear differential equations in Lie groups[J]. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1999, **357** (1754): 983-1019.
- [16] 谭述君, 钟万勰. 非齐次动力方程 Duhamel 项的精细积分[J]. *力学学报*, 2007, **39**(3): 374-381.(TANG Shu-jun, ZHONG Wan-xie. Precise integration method for Duhamel terms arising from non-homogenous dynamic systems[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(3): 374-381.(in Chinese))
- [17] Rao A V, Benson D A, Darby C, et al. Corrigendum: Algorithm 902: GPOPS, a MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using the gauss pseudospectral method[J]. *Acm Transactions on Mathematical Software*, 2010, **37**(2). doi: 10.1145/1731022.1731032.

A Symplectic Approach for Boundary-Value Problems of Linear Hamiltonian Systems

JIANG Xian-hong, DENG Zi-chen, ZHANG Kai, WANG Jia-qi
(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, P.R.China)

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A symplectic approach based on canonical transformation and generating functions was proposed to solve boundary-value problems of linear Hamiltonian systems. According to the relationship between the generating function and the state-transition matrix, an interval merge recursive algorithm was constructed to calculate the coefficient matrices of the 2nd-type generating function for linear homogeneous Hamiltonian systems, which was further extended to non-homogeneous cases. Then the properties of the generating function were used to transform the boundary-value problems to initial-value problems. Finally, the general initial-value problems were solved with the symplectic numerical method to preserve the geometric structure of the Hamiltonian system. Numerical simulations show the validity of the presented approach for linear homogeneous and nonhomogeneous problems, and the advantages of the symplectic numerical method to preserve the intrinsic properties of Hamiltonian systems.

Key words: Hamiltonian system; boundary-value problem; generating function; state-transition matrix; symplectic method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11432010)

引用本文/Cite this paper:

蒋宪宏, 邓子辰, 张凯, 王嘉琪. 线性 Hamilton 系统边值问题的保辛数值方法[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(9): 988-998.

JIANG Xian-hong, DENG Zi-chen, ZHANG Kai, WANG Jia-qi. A symplectic approach for boundary-value problems of linear Hamiltonian systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38** (9): 988-998.