文章编号:1000-0887(2017)11-1251-18

有限位移理论线弹性力学二类和三类混合变量的变分原理及其应用*

付宝连

(燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 提出了有限位移理论线弹性力学二类混合变量和三类混合变量的变分原理.考虑已知边界条件的变化并应用有限位移理论的功的互等定理,在导出上述两类变分原理的过程中起到了关键作用和桥梁作用.首先,考虑已知位移边界条件的变化和应用功的互等定理,导出了二类混合变量的最小势能原理.用类似的方法,导出了二类混合变量的驻值余能原理.应用应变能密度和应力余能密度的关系式于上述两个变分原理,得到三类混合变量的变分原理.然后,给出了二类和三类混合变量的虚功原理和虚余功原理.同时,应用拉氏乘子法导出了广义变分原理.以一个算例说明了在某些情况下拉氏乘子法会失效,介绍了构成广义变分原理泛函的半逆法.最后,应用二类混合变量最小势能原理计算了一大挠度悬臂梁的弯曲.

关 键 词: 有限位移理论; 线弹性力学; 二(三)类混合变量的变分原理; 混合变量的虚(余)功原理; 广义变分原理; 半逆法

中图分类号: O343 **文献标志码:** A doi:10.21656/1000-0887.380004

引 言

两个原理是有限位移理论变分公式的基础.其中之一是对位移的变分原理,这一原理导致最小势能原理[1-5].而另外一个是对位移和应力的变分原理,这一原理导致驻值余能原理[3-9].引入拉氏乘子到变分表达式的框架中,得到广义变分原理[5,10-16].众所周知,上述两个原理没有统一的变分变量.在导出上述原理的变分过程中假定在 S_u 和 S_p 上指定的边界条件保持不变.

在本文中,导出的变分原理将考虑已知边界条件的变化.首先将考虑位移边界条件的变化.在这种情况下,由体内位移的变分、由在 S_p 界面上位移的变分 δu_i 和由在 S_u 界面上位移变分 $\delta \overline{u_i}$ 所引起应变能的增量能被得到.应用有限位移理论的功的互等定理,定义该应变能增量的表达式,得到一个新的泛函,称为二类混合变量的总势能,它是一个位移和应力的泛函.此总势能对应力和位移取极值变分,得到平衡方程,静力边界条件和位移边界条件为 Euler(欧拉)方程.于是,有限位移理论二类混合变量的最小势能原理被导出.应用类似的方法,考虑到静力边界条件的变分,应用有限位移理论的功的互等定理得到了二类混合变量的驻值余能原理.在该原理中的二类混合变量总余能也是一个应力和位移的泛函,该总余能对应力和位移取变分驻值,得到应力-位移关系,位移边界条件和静力边界条件为 Euler 方程.

分别应用应变势能密度和应力余能密度的关系式于二类混合变量的总势能和总余能,得

* **收稿日期:** 2017-01-05; **修订日期:** 2017-03-10

作者简介: 付宝连(1934—),男,教授(E-mail:ysufubaolian@163.com).

到三类混合变量的总势能和总余能.它们都是位移、应力和应变的泛函.对三类混合变量的总势能取位移、应力和应变的变分极值,则得应变-应力关系,平衡方程,静力边界条件和位移边界条件为 Euler 方程.对三类混合变量的总余能取位移、应力和应变的变分驻值,则得应力-应变关系,应变-位移关系,位移边界条件和静力边界条件为 Euler 方程.

能够看到,在二类混合变量的变分原理中,位移和应力为变分变量,相应泛函取极值或驻值的等价方程为三类.在三类混合变量的变分原理中,位移、应力和应变为变分变量,相应泛函取极值或驻值的等价方程为四类.与 Lagrange、Castigliano 和 Reissner 变分原理相比较,二类和三类混合变量的变分原理都具有相同的变分变量和较多的等价方程.

在小位移理论中,最小势能原理以位移向量作为变分变量;在最小余能原理中以应力张量作为变分变量.在有限位移理论中,最小势能原理仍以位移向量为唯一的变分变量.对于驻值余能原理,有三类变分原理.其一是,以 Kirchhoff 应力张量和位移向量为变分变量的 Reissner 变分原理[17-20],它常被称为不是纯粹的余能原理.其二是,Levinson 原理[20-23],它是以 Piola 应力张量为变分变量,曾被称为真正的余能原理,但它不是总能成立的.最后是,Fraeijs de Veubeke 原理[24-29],在该原理中,除了 Piola 应力张量外,转动张量也是作为变分变量出现,这又没有达到人们对原理期待的“纯粹性”.

半个多世纪以来,学界内的一些人士期望,能像在小位移理论中的最小余能原理一样,在有限位移理论的驻值余能原理中也有一独立的变分变量存在,从而构造成一个“纯粹的”驻值余能原理.看来,为了和其他 3 个变分原理相统一,试图只取一类独立的变分变量来研究有限位移理论的驻值余能原理可能误入了歧途.

与前述 Levinson 原理和 Fraeijs de Veubeke 原理的出发点不相同,本文不是试图采用一种变分变量,而是采用了位移和应力两种变分变量和采用位移、应力和应变 3 种变分变量为统一变分变量,从而导出有限位移理论二类和三类混合变量的最小势能原理和驻值余能原理.在小位移理论中也存在与上述两个原理相应的变分原理.在小位移理论和有限位移理论中能导出混合变量的势能原理和余能原理是由于考虑了边界条件变化,以及应用小位移理论的修正的功的互等定理和有限位移理论的功的互等定理的结果.可以认为,上述过程是导出变分原理的一个新途径.

1 基 本 方 程

本文将采用 Lagrange 描述.在这一描述中,确定变形前物体一点的坐标被用来确定该点在随后变形中的位置.

在这一描述中,在直角坐标中有限位移理论的基本方程可被表达为

$$[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} + F_i = 0, \qquad x_i \in V, \tag{1}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}), \qquad x_i \in V, \tag{2}$$

$$(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j = \overline{p_i}, \qquad x_i \in S_p, \tag{3}$$

$$u_i = \overline{u_i}, \qquad x_i \in S_u, \tag{4}$$

$$\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ij}, \qquad x_i \in V, \tag{5a}$$

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = e_{ij}, \qquad x_i \in V. \tag{5b}$$

对于各向同性材料线性弹性体,式(5a)和式(5b)分别被简化为

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij}, \qquad x_i \in V, \tag{6a}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{G}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \qquad x_i \in V, \tag{6b}$$

其中 σ_{ij} 为 Kirchhoff 应力张量, e_{ij} 为 Green 应变张量, $A(e_{ij})$ 为应变能密度,$B(\sigma_{ij})$ 为余能密度,$G = E/(2(1+\nu))$,$\lambda = \nu E/((1+\nu)(1-2\nu))$,$E$ 为弹性模量,ν 为 Poisson 比.

2 有限位移理论三维线弹性的功的互等定理

考虑有限位移的两个线性弹性体.它们具有相同的几何形状、尺寸和本构关系,但具有不同的位移边界条件和静力边界条件.它们在各自外力作用下都处于真实状态.其中之一称为第一弹性体,它的相应力学量表示为$(\cdot)_1$;另一个称为第二弹性体,相应的力学量表示为$(\cdot)_2$.

根据文献[30],有限位移理论三维线弹性力学功的互等定理可表示为

$$\iint_{S_{1p}} \overline{p_{1i}}\, u_{2i}\mathrm{d}s + \iint_{S_{1u}} p_{1i}u_{2i}\mathrm{d}s + \iiint_V F_{1i}u_{2i}\mathrm{d}v + \iiint_V \sigma_{1ij}\left(\frac{1}{2}u_{2k,i}u_{2k,j} - u_{1k,i}u_{2k,j}\right)\mathrm{d}v = \iint_{S_{2p}} \overline{p_{2i}}\, u_{1i}\mathrm{d}s + \iint_{S_{2u}} p_{2i}u_{1i}\mathrm{d}s + \iiint_V F_{2i}u_{1i}\mathrm{d}v + \iiint_V \sigma_{2ij}\left(\frac{1}{2}u_{1k,i}u_{1k,j} - u_{2k,i}u_{1k,j}\right)\mathrm{d}v. \tag{7}$$

从式(7)可以看到,两边的力学量对脚标“1”和“2”具有倒易性.

3 二类混合变量最小势能原理的推导

3.1 余功的零变分关系

考虑第2节所述的两个弹性体,取第一弹性体的状态为

$$\begin{array}{cccc} V & V & S_p & S_u \\ \sigma_{ij} & F_i & \overline{p_i} & p_i \\ u_i + \delta u_i & u_i + \delta u_i & u_i + \delta u_i & \overline{u_i} + \delta\overline{u_i} \end{array}$$

而第二弹性体的状态为

$$\begin{array}{cccc} V & V & S_p & S_u \\ \sigma_{ij} & F_i & \overline{p_i} & p_i + \delta p_i \\ u_i + \delta u_i & u_i + \delta u_i & u_i + \delta u_i & \overline{u_i} \end{array}$$

应用功的互等定理式(7)于这两个状态,得

$$\iint_{S_u}(\overline{u_i}\,\delta p_i + p_i\delta\overline{u_i})\mathrm{d}s = \iint_{S_u}\delta(\overline{u_i}p_i)\mathrm{d}s = 0, \tag{8}$$

它被称为 S_u 外表面部分余功的零变分关系.

另一方面,需要引入关系

$$\iint_{S_u}\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_ju_i]\mathrm{d}s = 0, \tag{9}$$

它被称为 S_u 内表面部分余功的零变分关系.它是为导出后面二类混合变量最小势能原理所必须遵守的附加条件.

3.2 弱容许位移和协调弱容许应力

为后面导出二类混合变量的最小势能原理,首先引进下面两个定义:

弱容许位移:满足应变-位移关系(2)的位移.

协调弱容许应力:当位移是弱容许时,满足 S_u 内表面部分余功的零变分关系式(9)并遵守 Hooke(胡克)定律(6a)的应力.

3.3 二类混合变量最小势能原理

如所周知,在推导最小势能原理、驻值余能原理和它们的两族变分原理时,都假定,在变分过程中,在 S_u 上和 S_p 上的指定边界条件保持不变.本文将考虑指定边界条件的变化.

首先考虑位移边界条件的变化.在 S_u 上指定的位移分量给出无限小的增量 $\delta\overline{u_i}$, 而体力和在 S_p 上的力的边界条件保持不变,在体内和在 S_p 上所引起的无限小的位移增量都用 δu_i 表示.假设,这些无限小的位移增量产生一个新的位形,于是有[5]

$$\iiint_V \delta A(e_{ij})\,\mathrm{d}v = \iiint_V F_i \delta u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i}\,\delta u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} p_i \delta\,\overline{u_i}\,\mathrm{d}s, \tag{10}$$

利用外表面部分余功的零变分关系式(8),把式(10)转换为

$$\iiint_V \delta A(e_{ij})\,\mathrm{d}v = \iiint_V F_i \delta u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i}\,\delta u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} \overline{u_i}\,\delta p_i \mathrm{d}s\,. \tag{11}$$

如果引入一个新的泛函 $\Pi_{2\mathrm{mp}}$, 并且让它的变分 $\delta\Pi_{2\mathrm{mp}} = 0$, 则有

$$\Pi_{2\mathrm{mp}} = \iiint_V A(e_{ij})\,\mathrm{d}v - \iiint_V F_i u_i \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} \overline{u_i} p_i \mathrm{d}s \tag{12}$$

和

$$\delta\Pi_{2\mathrm{mp}} = \iiint_V \delta A(e_{ij})\,\mathrm{d}v - \iiint_V F_i \delta u_i \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i}\,\delta u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} \overline{u_i}\,\delta p_i \mathrm{d}s = 0, \tag{13}$$

这里 $\Pi_{2\mathrm{mp}}$ 被称为有限位移理论线弹性力学二类混合变量的总势能.它表示,该总势能等于应变能减去体力 F_i 和表面力 $\overline{p_i}$ 作用于相应弱容许位移 u_i 上的势,加上已知表面位移 $\overline{u_i}$ 作用于相应弱容许协调表面反力的余势.

在式(12)中,对弱容许位移 u_i, 弱容许应变 e_{ij} 和协调弱容许表面力 p_i 取极值变分,则得式(13).

对应变能进行变分,并注意位移是弱容许的,则

$$\begin{aligned}
\iiint_V \delta A(e_{ij})\,\mathrm{d}v &= \iiint_V \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} \mathrm{d}v = \iiint_V \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}} \frac{1}{2} \delta(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\,\mathrm{d}v = \\
&\iiint_V \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}} \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + \delta u_{k,i}u_{k,j} + u_{k,i}\delta u_{k,j})\,\mathrm{d}v = \\
&\iiint_V \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}(\delta u_{i,j} + u_{k,i}\delta u_{k,j})\,\mathrm{d}v = \iiint_V \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki} + u_{k,i})\delta u_{k,j} \mathrm{d}v = \\
&\iiint_V \left\{ \left[\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki} + u_{k,i})\delta u_k \right]_{,j} - \left[\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}(\delta_{ki} + u_{k,i}) \right]_{,j} \delta u_k \right\} \mathrm{d}v\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

通过分部积分,应用 Green 公式和 Hooke 定律(5a),式(14)被转换成

$$\begin{aligned}
\iiint_V \delta A(e_{ij})\,\mathrm{d}v = &\iint_{S_p} (\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj} n_j \delta u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} (\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj} n_j \delta u_i \mathrm{d}s - \\
&\iiint_V [(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} \delta u_i \mathrm{d}v\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

将内表面部分余功的零变分关系式(9)代入到式(15)中,则得

$$\iiint_V \delta A(e_{ij})\,\mathrm{d}v = \iint_{S_p} (\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj} n_j \delta u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} u_i \delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj} n_j]\,\mathrm{d}s -$$

$$\iiint_V [(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} \delta u_i \mathrm{d}v, \tag{16}$$

式(16)代入到式(13)后,则得

$$\delta \Pi_{2\mathrm{mp}} = -\iiint_V \{[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} + F_i\} \delta u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} [(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj} n_j - \overline{p_i}] \delta u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i}) \delta [(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj} n_j] \mathrm{d}s = 0. \tag{17}$$

根据变分法基本预备定理,最后得到 Euler 方程为

$$[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} + F_i = 0, \qquad x_i \in V, \tag{18}$$

$$(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj} n_j = \overline{p_i}, \qquad x_i \in S_p, \tag{19}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0, \qquad x_i \in S_u. \tag{20}$$

此后,将要证明对于真实解,$\Pi_{2\mathrm{mp}}$ 将取绝对极小值.让 u_i 和 p_i 分别表示真实解在 S_u 面上的位移分量和表面反力分量.δu_i 和 δp_i 分别表示在 S_u 面上的弱容许位移的变分和协调弱容许反力的变分.并且设 $u_i^* = u_i + \delta u_i, p_i^* = p_i + \delta p_i$, 于是有

$$\Pi_{2\mathrm{mp}}^*(u_i + \delta u_i, \cdots) = \Pi_{2\mathrm{mp}} + \delta \Pi_{2\mathrm{mp}} + \delta^2 \Pi_{2\mathrm{mp}}, \tag{21}$$

$$A(e_{ij} + \delta e_{ij}) = A(e_{ij}) + \delta A(\delta e_{ij}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(e_{ij})}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \delta e_{ij} \delta e_{kl}, \tag{22}$$

$$\Pi_{2\mathrm{mp}}^*(u_i + \delta u_i) = \iiint_V A(e_{ij} + \delta e_{ij}) \mathrm{d}v - \iiint_V F_i (u_i + \delta u_i) \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i}(u_i + \delta u_i) \mathrm{d}s + \iint_{S_u} \overline{u_i}(p_i + \delta p_i) \mathrm{d}s. \tag{23}$$

注意到式(12)和式(13)成立,以及物体是线弹性的,于是有

$$\delta^2 \Pi_{2\mathrm{mp}} = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A(e_{ij})}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \delta e_{ij} \delta e_{kl} \mathrm{d}v = \iiint_V \frac{1}{2} \delta \sigma_{ij} \delta e_{ij} \mathrm{d}v = \iiint_V A(\delta e_{ij}) \mathrm{d}v \geqslant 0, \tag{24}$$

进一步必得

$$\Pi_{2\mathrm{mp}}^* \geqslant \Pi_{2\mathrm{mp}}. \tag{25}$$

于是得出结论,在真实状态下,二类混合变量总势能取极小值.

该原理要求,弱容许位移和协调弱容许应力的条件应该得到满足.

4 二类混合变量驻值余能原理的推导

4.1 功的零变分关系

其次,将考虑有限位移的另外两个弹性体.第一弹性体的状态为

V	V	S_p	S_u
$\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$	F_i	$\overline{p_i} + \delta\overline{p_i}$	$p_i + \delta p_i$
$u_i + \delta u_i$	$u_i + \delta u_i$	u_i	$\overline{u_i}$

和第二弹性体的状态为

V	V	S_p	S_u
$\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$	F_i	$\overline{p_i}$	$p_i + \delta p_i$
$u_i + \delta u_i$	$u_i + \delta u_i$	$u_i + \delta u_i$	$\overline{u_i}$

应用功的互等定理式(7)于上述两个状态,得到

$$\iint_{S_p}(\overline{p_i}\,\delta u_i + u_i\delta\overline{p_i})\,\mathrm{d}s = \iint_{S_p}\delta(\overline{p_i}u_i)\,\mathrm{d}s = 0, \tag{26}$$

它被称为 S_p 外表面部分功的零变分关系.

另一方面需要引入关系式

$$\iint_{S_p}\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j u_i]\,\mathrm{d}s = 0, \tag{27}$$

它被称为 S_p 内表面部分功的零变分关系.关系式(27)是为导出后面二类混合变量驻值余能原理所必须遵守的附加条件.

4.2 弱容许应力和平衡弱容许位移

为了后面导出二类混合变量驻值余能原理,需要引进两个基本定义如下:

弱容许应力:满足平衡方程式(1)的应力.

平衡弱容许位移:当应力是一弱容许的,满足平衡方程式(1)和 S_p 内表面部分功的零变分关系式(27)并且遵守 Hooke 定律(6b)的位移.

4.3 二类混合变量驻值余能原理

本小节将考虑静力边界条件的变化.在 S_p 表面上,指定表面力给出一无限小的增量 $\delta\overline{p_i}$,而在 S_u 面上的位移边界条件和体力保持不变,在体内无限小的应力增量和位移增量分别为 $\delta\sigma_{ij}$ 和 δu_i.假设这些增量的应力和位移产生一个新的位形,于是有[5]

$$\iiint_V \delta B(\sigma_{ij})\,\mathrm{d}v + \iiint_V \frac{1}{2}\delta(\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j})\,\mathrm{d}v = \iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\,\mathrm{d}s + \iint_{S_p}u_i\delta\overline{p_i}\,\mathrm{d}s, \tag{28}$$

考虑外表面部分功的零变分关系式(26),把式(28)转换为

$$\iiint_V \delta B(\sigma_{ij})\,\mathrm{d}v + \iiint_V \frac{1}{2}\delta(\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j})\,\mathrm{d}v = \iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\,\mathrm{d}s - \iint_{S_p}\overline{p_i}\,\delta u_i\,\mathrm{d}s. \tag{29}$$

引入一个新的泛函 $\Pi_{2\mathrm{mc}}$ 并且让它的变分为 0,则有

$$\Pi_{2\mathrm{mc}} = \iiint_V\left[B(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v - \iint_{S_u}\overline{u_i}p_i\,\mathrm{d}s + \iint_{S_p}\overline{p_i}u_i\,\mathrm{d}s \tag{30}$$

和

$$\delta\Pi_{2\mathrm{mc}} = \iiint_V\delta\left[B(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v - \iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\,\mathrm{d}s + \iint_{S_p}\overline{p_i}\,\delta u_i\,\mathrm{d}s = 0, \tag{31}$$

这里 $\Pi_{2\mathrm{mc}}$ 被称为有限位移理论线弹性力学二类混合变量的总余能.为了更清楚地说明这一原理,$\iiint_V \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\,\mathrm{d}v$ 被称为耦合变形能.$\Pi_{2\mathrm{mc}}$ 表示,二类混合变量的总余能等于余能加上耦合变形能,减去指定表面位移作用在弱容许表面反力上的余势,再加上指定表面力作用在平衡弱容许位移上的势.

在式(30)中对 σ_{ij} 和 u_i 取驻值变分,得式(31).由于应力是弱容许的和位移是平衡弱容许的,并且体力保持不变,于是有

$$\iiint_V u_i\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}\,\mathrm{d}v = 0. \tag{32}$$

将式(32)和式(31)相加,得

$$\delta\Pi_{2\mathrm{mc}} = \iiint_V\delta\left[B(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v + \iiint_V u_i\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}\,\mathrm{d}v - \iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\,\mathrm{d}s + \iint_{S_p}\overline{p_i}\,\delta u_i\,\mathrm{d}s = 0. \tag{33}$$

在式(33)对弱容许应力 σ_{ij} 和平衡弱容许位移 u_i 进行变分运算,得

$$\iiint_V \delta\left[B(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v =$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij} + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij}u_{k,i}\delta u_{k,j}\right]\mathrm{d}v \tag{34}$$

和

$$\iiint_V u_i\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}\mathrm{d}v =$$

$$\iiint_V \{u_i\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]\}_{,j}\mathrm{d}v - \iiint_V \delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]u_{i,j}\mathrm{d}v =$$

$$\iint_{S_u} u_i\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s + \iint_{S_p} u_i\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s -$$

$$\iiint_V (\delta u_{k,i}\sigma_{kj}u_{i,j} + u_{k,i}\delta\sigma_{kj}u_{i,j} + \delta\sigma_{ij}u_{i,j})\mathrm{d}v. \tag{35}$$

根据内表面部分功的零变分关系式(27),再令 $i \to k \to j \to i$, 式(35)转换为

$$\iiint_V u_i\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}\mathrm{d}v = \iint_{S_u} u_i\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s -$$

$$\iint_{S_p}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\delta u_i\mathrm{d}s - \iiint_V(\sigma_{ij}u_{k,i}\delta u_{k,j} + u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij} + u_{i,j}\delta\sigma_{ij})\mathrm{d}v. \tag{36}$$

将式(34)和式(36)代入到式(33),得到

$$\delta\Pi_{2\mathrm{mc}} = \iiint_V\left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v +$$

$$\iint_{S_u}(u_i - \overline{u_i})\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s + \iint_{S_p}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j - \overline{p_i}]\delta u_i\mathrm{d}s = 0. \tag{37}$$

根据变分法基本预备定理,则得 Euler 方程为

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) = 0,\qquad x_i \in V, \tag{38}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0,\qquad x_i \in S_u, \tag{39}$$

$$(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j - \overline{p_i} = 0,\qquad x_i \in S_p. \tag{40}$$

该原理要求弱容许应力和平衡弱容许位移的条件应该得到满足.

5 三类混合变量变分原理的推导

5.1 三类混合变量最小势能原理

将应变势能密度和应力余能密度的关系式

$$\sigma_{ij}e_{ij} = A(e_{ij}) + B(\sigma_{ij}),\qquad x_i \in V \tag{41}$$

代入二类混合变量总势能式(12)中,得

$$\Pi_{3\mathrm{mp}} = \iiint_V[\sigma_{ij}e_{ij} - B(\sigma_{ij})]\mathrm{d}v - \iiint_V F_iu_i\mathrm{d}v -$$

$$\iint_{S_p}\overline{p_i}u_i\mathrm{d}s + \iint_{S_u}\overline{u_i}p_i\mathrm{d}s, \tag{42}$$

式(42)被称为三类变分变量的总势能.对式(42)取 u_i,σ_{ij} 和 e_{ij} 的变分极值,得

$$\delta\Pi_{3\mathrm{mp}} = \iiint_V\left\{\sigma_{ij}\delta e_{ij} + \left[e_{ij} - \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}\right]\delta\sigma_{ij}\right\}\mathrm{d}v - \iiint_V F_i\delta u_i\mathrm{d}v -$$

$$\iint_{S_p} \overline{p_i}\,\delta u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} \overline{u_i}\,\delta p_i \mathrm{d}s = 0. \tag{43}$$

仿照二类混合变量总势能式(13) $\Pi_{2\mathrm{mp}}$ 的变分运算,则得

$$\delta\Pi_{3\mathrm{mp}} = \iiint_V \left[e_{ij} - \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v - \iiint_V \{[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} + F_i\}\delta u_i \mathrm{d}v +$$

$$\iint_{S_p} [(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j - \overline{p_i}]\delta u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i})\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s = 0. \tag{44}$$

根据变分法基本预备定理,则得 Euler 方程为

$$e_{ij} - \frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{45}$$

$$[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} + F_i = 0, \qquad x_i \in V, \tag{46}$$

$$(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j - \overline{p_i} = 0, \qquad x_i \in S_p, \tag{47}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0, \qquad x_i \in S_u. \tag{48}$$

5.2 三类混合变量驻值余能原理

将式(41)代入二类混合变量总余能式(30)中,则得

$$\Pi_{3\mathrm{mc}} = \iiint_V \left\{[\sigma_{ij}e_{ij} - A(e_{ij})] + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right\}\mathrm{d}v -$$

$$\iint_{S_u} \overline{u_i}p_i \mathrm{d}s + \iint_{S_p} \overline{p_i}u_i \mathrm{d}s, \tag{49}$$

式(49)被称为三类混合变量的总余能.对式(49)取 u_i,σ_{ij} 和 e_{ij} 的变分驻值,得

$$\delta\Pi_{3\mathrm{mc}} = \iiint_V \left\{e_{ij}\delta\sigma_{ij} + \left[\sigma_{ij} - \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}\right]\delta e_{ij} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right\}\mathrm{d}v -$$

$$\iint_{S_u} \overline{u_i}\,\delta p_i \mathrm{d}s + \iint_{S_p} \overline{p_i}\,\delta u_i \mathrm{d}s = 0. \tag{50}$$

仿二类混合变量总余能式(31) $\Pi_{2\mathrm{mc}}$ 的变分运算,则得

$$\delta\Pi_{3\mathrm{mc}} = \iiint_V \left[\sigma_{ij} - \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}\right]\delta e_{ij}\mathrm{d}v + \iiint_V \left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v +$$

$$\iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i})\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s + \iint_{S_p} [(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j - \overline{p_i}]\delta u_i \mathrm{d}s = 0. \tag{51}$$

根据变分法基本预备定理,则得 Euler 方程为

$$\sigma_{ij} - \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{52}$$

$$e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) = 0, \qquad x_i \in V, \tag{53}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0, \qquad x_i \in S_p, \tag{54}$$

$$(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j - \overline{p_i} = 0, \qquad x_i \in S_u. \tag{55}$$

6 混合变量的虚功原理和虚余功原理

6.1 二类混合变量的虚功原理

首先给出如下两个基本定义:

弱虚位移:无限小的弱容许位移.

协调弱虚应力：无限小的协调弱容许应力。

本小节将直接给出与 3.3 小节相对应的二类混合变量的虚功原理。

在式(12)中对 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 和 u_i 取变分极值，则得

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}_{ij}\delta e_{ij}\mathrm{d}v = \iiint_V F_i\delta u_i\mathrm{d}v + \iint_{S_p}\overline{p_i}\,\delta u_i\mathrm{d}s - \iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\mathrm{d}s. \tag{56}$$

应用与 3.3 小节相同的方法，根据式(56)能导出式(18)~(20)。反向上述的推导，能用式(18)~(20)导出式(56)。于是，该原理可以表述为：若协调弱容许应力在相应的弱虚应变上所做的总功等于指定的体力和表面力在相应的弱虚位移上所做的功减去指定表面位移在相应的协调弱虚表面反力所做的余功，则该弹性体满足平衡方程、静力边界条件和位移边界条件，反之亦然。

该原理要求弱虚位移和协调弱虚应力的条件应该得到满足。

比较二类混合变量虚功原理和虚功原理可以看出，前者对于后者的优点类似于二类混合变量最小势能原理对于最小势能原理的优点。

6.2 二类混合变量的虚余功原理

给出下面两个基本定义：

弱虚应力：无限小的弱容许应力。

平衡弱虚位移：无限小的弱平衡容许位移。

本小节将直接给出与 4.3 小节相对应的二类混合变量的虚余功原理。

在式(31)中，对 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 和 u_i 取驻值变分，则得

$$\iiint_V e_{ij}\delta\boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathrm{d}v + \iiint_V\left[\boldsymbol{\sigma}_{ij}\frac{1}{2}\delta(u_{k,i}u_{k,j}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\boldsymbol{\sigma}_{ij}\right]\mathrm{d}v = \iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\mathrm{d}s - \iint_{S_p}\overline{p_i}\,\delta u_i\mathrm{d}s. \tag{57}$$

用与 4.3 小节类似的方法，根据式(57)能导出方程式(2)~(4)。反向上述的推导，根据式(2)~(4)能导出式(57)。

为了更清楚地说明这一原理，现给出两个定义：$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}_{ij}\frac{1}{2}\delta(u_{k,i}u_{k,j})\mathrm{d}v$ 定义为耦合弱虚功，而 $\iiint_V \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathrm{d}v$ 定义为耦合弱虚余功。

于是该定理可被叙述为：若平衡弱虚应变作用在相应弱虚应力上的总余功，加上耦合虚功和耦合虚余功等于指定表面位移作用在相应弱虚表面反力的余功，减去指定表面力作用在相应弱虚平衡虚位移所做的功，则该弹性体满足应力-位移关系、位移边界条件和静力边界条件，反之亦然。

该原理要求弱虚应力和平衡弱虚位移的条件应得到满足。

6.3 三类混合变量的虚功原理

三类混合变量的虚功原理可表示为

$$\iiint_V \boldsymbol{\sigma}_{ij}\delta e_{ij}\mathrm{d}v = -\iiint_V\left[e_{ij} - \frac{\partial B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{ij}}\right]\delta\boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathrm{d}v + \iiint_V F_i\delta u_i\mathrm{d}v + \iint_{S_p}\overline{p_i}\,\delta u_i\mathrm{d}s - \iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\mathrm{d}s. \tag{58}$$

6.4 三类混合变量的虚余功原理

三类混合变量的虚余功原理可表示为

$$\iiint_V e_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v + \iiint_V\left[\sigma_{ij}\frac{1}{2}\delta(u_{k,i}u_{k,j}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}\right]\mathrm{d}v =$$
$$-\iiint_V\left[\sigma_{ij} - \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}\right]\delta e_{ij}\mathrm{d}v + \iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\mathrm{d}s - \iint_{S_p}\overline{p_i}\,\delta u_i\mathrm{d}s. \tag{59}$$

7 广义变分原理

二类混合变量总势能式(12)是一个应满足式(2)和式(9)附加条件的泛函.为消除上述两个条件对泛函式(12)的限制,需要应用 Lagrange 乘子法,把它们置于该变分表达式中,于是有

$$\Pi_{\mathrm{gp}} = \iiint_V\left\{A(e_{ij}) - \sigma_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\right]\right\}\mathrm{d}v -$$
$$\iiint_V F_iu_i\mathrm{d}v - \iint_{S_p}\overline{p_i}u_i\mathrm{d}s + \iint_{S_u}\overline{u_i}p_i\mathrm{d}s - \iint_{S_u}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_ju_i]\mathrm{d}s, \tag{60}$$

它被称为广义势能.对式(60)取 u_i,e_{ij} 和 σ_{ij} 的驻值变分,得到式(1)~(4)和式(5b)为 Euler 方程.

应用相同的方法,得到广义余能

$$\Pi_{\mathrm{gc}} = \iiint_V\left(\sigma_{ij}e_{ij} - A(e_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right)\mathrm{d}v + \iiint_V\{[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j} + F_i\}u_i\mathrm{d}v -$$
$$\iint_{S_u}\overline{u_i}p_i\mathrm{d}s + \iint_{S_p}\overline{p_i}u_i\mathrm{d}s - \iint_{S_p}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_ju_i]\mathrm{d}s. \tag{61}$$

对式(61)取 e_{ij},σ_{ij} 和 u_i 的驻值变分,则得到式(1)~(4)和式(5a)为 Euler 方程.

二类混合变量变分原理导出三类等价方程;三类混合变量变分原理导出四类等价方程;广义变分原理导出弹性力学的全部五类方程.

将式(60)和式(61)相加,得

$$\Pi_{\mathrm{gc}} + \Pi_{\mathrm{gp}} = 0, \tag{62}$$

它是被钱伟长导出的[11].

8 拉氏乘子法的失效

在第 7 节中,应用拉氏乘子法导出了广义变分原理.但是,在某些情况下,如在 Hellinger-Reissner 变分原理和 Hu-Washizu 变分原理中为消除应力-应变关系而采用拉氏乘子法时该法会失效.现以小位移理论 Hellinger-Reissner 变分原理为例予以说明.

Hellinger-Reissner 变分原理的泛函为

$$\Pi_{\mathrm{HR}} = \iiint_V[B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + F_i)u_i]\mathrm{d}v - \iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j\overline{u_i}\mathrm{d}s - \iint_{S_p}(\sigma_{ij}n_j - \overline{p_i})u_i\mathrm{d}s, \tag{63}$$

现构成一新的泛函

$$\Pi_{\mathrm{HR}}^* = \Pi_{\mathrm{HR}} + \iiint_V\left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} - e_{ij}\right]\lambda_{ij}\mathrm{d}v, \tag{64}$$

式

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} - e_{ij} = 0 \tag{65}$$

为 Hellinger-Reissner 变分方程的约束条件, λ_{ij} 为一新引入的拉氏乘子,为一变分量.

对式(64)取 $u_i, e_{ij}, \boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$ 的驻值变分,则得

$$\delta\Pi_{\mathrm{HR}}^{k} = \iiint_V \left\{ \left[\frac{\partial B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{ij}} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{\partial^2 B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{ij}\partial\boldsymbol{\sigma}_{kl}} \boldsymbol{\lambda}_{kl} \right] \delta\boldsymbol{\sigma}_{ij} - \boldsymbol{\lambda}_{ij}\delta e_{ij} + (\boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + F_i)\delta u_i + \left[\frac{\partial B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{ij}} - e_{ij} \right] \delta\boldsymbol{\lambda}_{ij} \right\} \mathrm{d}v - \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i})\delta\boldsymbol{\sigma}_{ij} n_j \mathrm{d}s + \iint_{S_p} (\boldsymbol{\sigma}_{kj} n_j - \overline{p_i})\delta u_i \mathrm{d}s = 0. \tag{66}$$

按变分法基本预备定理,则得 Euler 方程为

$$\frac{\partial B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{ij}} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{\partial^2 B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{ij}\partial\boldsymbol{\sigma}_{kl}} \boldsymbol{\lambda}_{kl} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{67a}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{ij} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{67b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + F_i = 0, \qquad x_i \in V, \tag{67c}$$

$$\frac{\partial B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{ij}} - e_{ij} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{67d}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0, \qquad x_i \in S_u, \tag{67e}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} n_j - \overline{p_i} = 0, \qquad x_i \in S_p. \tag{67f}$$

由式(67b)知 $\boldsymbol{\lambda}_{ij} = 0$, 于是式(67d)不一定成立;而式(67a)、(67c)、(67e)和(67f)是 Hellinger-Reissner 变分原理原泛函的 Euler 方程,于是,在这里拉氏乘子法失效,同理,也可以证明 Hu-Washizu 变分原理为清除应力-应变关系应用拉氏乘子法也会失效.

9 半 逆 法

半逆法是构建广义变分原理泛函的一个强有力的方法.为说明该方法的基本思想,以小变形理论弹性力学最小势能原理推广为广义势能变分原理为例予以说明.最小势能原理总势能的泛函为

$$\Pi_{\mathrm{p}} = \iiint_V \left(\frac{1}{2} e_{ij} a_{ijkl} e_{kl} - f_i u_i \right) \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s. \tag{68}$$

式(68)中 Π_{p} 是一个在下述方程约束下的泛函:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = a_{ijkl} e_{kl}, \qquad x_i \in V, \tag{69}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad x_i \in V, \tag{70}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0, \qquad x_i \in S_u. \tag{71}$$

对总势能式(68)取 u_i 和 e_{ij} 的变分极限,则得 Euler 方程为

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij,j} + f_i = 0, \qquad x_i \in V, \tag{72}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} n_j - \overline{p_i} = 0, \qquad x_i \in S_p. \tag{73}$$

下面用半逆法构成一势能泛函,为此假设

$$M_{\mathrm{gp}} = \iiint_V \left(\frac{1}{2} e_{ij} a_{ijkl} e_{kl} - f_i u_i + F_i \right) \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i}) \boldsymbol{\gamma}_i \mathrm{d}s. \tag{74}$$

式(74)中的 F_i 和 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 是两个新引入的函数,它们取驻值的条件应满足式(69)~(71).能够判断,F_i 应该是 e_{ij} 的函数.对式(74)的体积项取 e_{ij} 的偏导驻值,则得凑试 Euler 方程为

$$a_{ijkl} e_{kl} + \frac{\partial F_i}{\partial e_{ij}} = 0, \tag{75}$$

于是有

$$F_i = - e_{ij}\sigma_{ij} + F_1, \tag{76}$$

这里 F_1 是新引进的一个函数,它与 e_{ij} 无关.于是得 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} e_{ij}a_{ijkl}e_{kl} - f_i u_i - e_{ij}\sigma_{ij} + F_1, \tag{77}$$

进一步可以判断, F_1 是 σ_{ij} 的函数.对式(77),对 σ_{ij} 取偏导驻值,则得凑试 Euler 方程为

$$- e_{ij} + \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \tag{78}$$

于是得

$$F_1 = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji})\sigma_{ij}. \tag{79}$$

易于得出

$$v_i = \sigma_{ij}n_j, \tag{80}$$

最后得出广义势能泛函为

$$\Pi_{\mathrm{gp}} = \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} e_{ij}a_{ijkl}e_{kl} - f_i u_i - \sigma_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \right\} \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i})\sigma_{ij}n_j \mathrm{d}s. \tag{81}$$

10 应 用

10.1 大挠度直梁二类混合变量的最小势能原理的应用

首先,应用有限位移理论二类混合变量的最小势能原理来计算一大挠度悬臂梁的弯曲.

图 1(a)为一受均布载荷作用的大挠度悬臂梁.解除其固定端的弯曲约束,代以作用在简支端的弯矩 $\overline{M_0}$, 自由端的挠度为 $\overline{w_l}$, 则得图 1(b)所示大挠度悬臂梁实际系统.

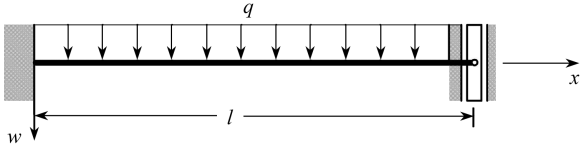

图 1(a) 均载作用下大挠度悬臂梁

Fig. 1(a) A cantilever beam with large deflection under uniformly distributed load

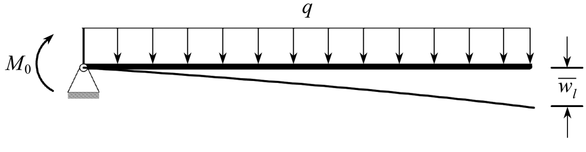

图 1(b) 均载作用下大挠度悬臂梁实际系统

Fig. 1(b) The actual system of the cantilever beam with large deflection under uniformly distributed load

该大挠度悬臂梁实际系统二类混合变量的总势能可表示为

$$\Pi_{\mathrm{mp}} = \int_0^l [A_{\mathrm{b}}(w) + A_{\mathrm{m}}(u,w)]\mathrm{d}x - \int_0^l qw\mathrm{d}x - \overline{M_0}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} + Q_{x=l}\,\overline{w_l}, \tag{82}$$

其中

$$A_{\mathrm{b}}(w)=\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2, \tag{83}$$

$$A_{\mathrm{m}}(u,w)=\frac{1}{2}EF\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^2, \tag{84}$$

这里 w 为弱容许挠度，u 为弱容许轴向位移.并假设

$$w(x)=\sum_{m=1,2}^{\infty}A_m\sin(\alpha_m x),\qquad 0\leqslant x<l, \tag{85}$$

其中 $\alpha_m=\dfrac{m\pi}{l}$.

将式(83)和式(84)代入式(82)中，则得

$$\Pi_{2\mathrm{mp}}=\int_0^l\left\{\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+\frac{1}{2}EF\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^2\right\}\mathrm{d}x-\int_0^l qw\mathrm{d}x-\overline{M_0}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}-EJ\left(\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}\right)_{x=l}\overline{w_l}. \tag{86}$$

对 $\Pi_{2\mathrm{mp}}$ 取 A_m 和 u 的变分极值，则得

$$\sum_{m=1,2}^{\infty}\left\{\left(\frac{l}{2}EJ\alpha_m^4+\frac{l}{2}N\alpha_m^2\right)A_m+q\frac{1}{\alpha_m}[(-1)^m-1]-\overline{M_0}\alpha_m+(-1)^mEJ\alpha_m^3\overline{w_l}\right\}\delta A_m+(N\delta u)_0^l-\int_0^l\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\delta u\mathrm{d}x=0. \tag{87}$$

再应用内边界位移余功的零变分关系

$$\delta(-u_0N_0+u_lN_l)=0, \tag{88}$$

并据变分法基本预备定理，则得

$$A_m=\frac{1}{(m\pi/l)^2+N/(EJ)}\left[\frac{2ql^2}{EJ(m\pi)^3}[1-(-1)^m]+\frac{2\overline{M_0}}{EJ(m\pi)}+(-1)^{m+1}\frac{2}{l}\left(\frac{m\pi}{l}\right)\overline{w_l}\right], \tag{89}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{90}$$

$$u_0=0,\qquad x=0, \tag{91}$$

$$u_l=0,\qquad x=l. \tag{92}$$

将式(89)代入式(85)，则得

$$w(x)=\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{1}{(m\pi/l)^2+N/(EJ)}\left[\frac{2ql^2}{EJ(m\pi)^3}[1-(-1)^m]+\frac{2\overline{M_0}}{EJ(m\pi)}+(-1)^{m+1}\frac{2}{l}\left(\frac{m\pi}{l}\right)\overline{w_l}\right]\sin(\alpha_m x),\qquad 0\leqslant x<l. \tag{93}$$

根据

$$\frac{\sinh(\beta_n x)}{\sinh(\beta_n l)}=\frac{2}{l}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\alpha_m}{\alpha_m^2+\beta_n^2}\sin(\alpha_m x), \tag{94}$$

可将式(93)转换成

$$w(x)=\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{1}{(m\pi/l)^2+N/(EJ)}\left[\frac{2ql^2}{EJ(m\pi)^3}[1-(-1)^m]+\frac{2\overline{M_0}}{EJ(m\pi)}\right]\sin(\alpha_m x)+\frac{\sinh(\beta_n x)}{\sinh(\beta_n l)}\overline{w_l},\qquad 0\leqslant x<l. \tag{95}$$

根据级数转换,有

$$\overline{M_0}\sinh(\beta_n(l-x))=\frac{2}{l}\overline{M_0}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{\alpha_m}{\beta_n^2+\alpha_m^2}\sinh(\beta_n l)\sin(\alpha_m x). \tag{96}$$

对式(96)做一次不定积分,有

$$\left(-\frac{1}{\beta_n}\right)\overline{M_0}\cosh(\beta_n(l-x))+C=\frac{2}{l}\overline{M_0}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{\alpha_m}{\beta_n^2+\alpha_m^2}\sinh(\beta_n l)\cdot(-1)\frac{1}{\alpha_m}\cos(\alpha_m x), \tag{97}$$

再做二次不定积分,有

$$\frac{1}{\beta_n^2}\overline{M_0}\sinh(\beta_n(l-x))+Cx+D=\frac{2}{l}\overline{M_0}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{\alpha_m}{\beta_n^2+\alpha_m^2}\sinh(\beta_n l)\cdot(-1)\frac{1}{\alpha_m^2}\sin(\alpha_m x). \tag{98}$$

根据 $x=l$ 时,$M_0=0$ 和 $x=0$ 时,$M_0=\overline{M_0}$, 得

$$D=-\overline{M_0}\frac{1}{\beta_n^2}\sinh(\beta_n l), \tag{99}$$

$$C=\frac{1}{l}\overline{M_0}\frac{1}{\beta_n^2}\sinh(\beta_n l), \tag{100}$$

于是得

$$\frac{2M_0}{EJ}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{1}{(\beta_n^2+\alpha_m^2)m\pi}\sin(\alpha_m x)=-\frac{M_0}{EJ}\left[\frac{\sinh(\beta_n(l-x))}{\sin(\beta_n l)}\frac{1}{\beta_n^2}\right]-\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{l}\overline{M_0}\frac{x}{\beta_n^2}-\overline{M_0}\frac{1}{\beta_n^2}\right). \tag{101}$$

将式(101)代入式(95),最终得

$$w(x)=\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{[1-(-1)^m]}{(m\pi/l)^2+N/(EJ)}\frac{2ql^2}{EJ(m\pi)^3}\sin(\alpha_m x)-\frac{\overline{M_0}}{EJ}\frac{\sinh(\beta_n(l-x))}{\beta_n^2\sin(\beta_n l)}-\frac{\overline{M_0}}{EJ}\left(\frac{1}{\beta_n^2}\frac{x}{l}-\frac{1}{\beta_n^2}\right)+\frac{\sinh(\beta_n x)}{\sinh(\beta_n l)}\overline{w_l},\qquad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{102}$$

其中 $\beta_n=\sqrt{\dfrac{N}{EJ}}$.

再根据边界条件

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}=0, \tag{103}$$

$$\frac{Nl}{EJ}=\int_0^l \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x, \tag{104}$$

$$\left[-EJ\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}+N\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right]_{x=l}=0, \tag{105}$$

可得 $N,\overline{M_0}$ 和$\overline{w_l}$, 于是问题得解.

10.2 大挠度直梁功的互等定理的应用

其次,应用大挠度直梁的功的互等定理来求解上述问题.

取一受单位集中载荷作用的小挠度简支梁为基本系统,如图 2 所示.在图 1(b)所示大挠度直梁和图 2 所示小挠度简支梁之间应用大挠度直梁功的互等定理,则得

$$w(\xi)-\frac{\xi}{l}\overline{w_l}=\int_0^l\left(q+N\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)w_1(x,\xi)\,\mathrm{d}x+\overline{M_0}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}, \tag{106}$$

其中 $w_1(x,\xi)$ 为基本解,可表示为

$$w_1(x,\xi)=\frac{1}{EJ}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{2l^3}{(m\pi)^4}\sin(\alpha_m x)\sin(\alpha_m\xi). \tag{107}$$

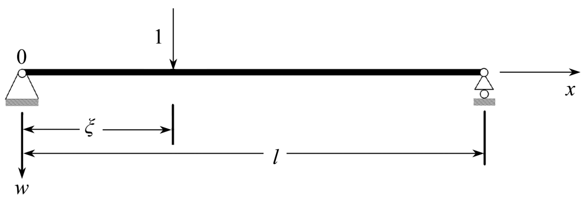

图 2 小挠度简支梁基本系统

Fig. 2 The basic system of a simply supported beam with small deflection

假设

$$w(\xi)=\sum_{m=1,2}^{\infty}A_m\sin(\alpha_m\xi), \qquad 0\leqslant\xi<l, \tag{108}$$

$$w(x)=\sum_{m=1,2}^{\infty}A_m\sin(\alpha_m x), \qquad 0\leqslant x<l, \tag{109}$$

将式(107)~(109)代到式(106)中,经过计算,则得与式(93)相同的表达式 $w(\xi)$, 再经过式(94)和式(101)的转换,则得

$$w(\xi)=\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{[1-(-1)^m]}{(m\pi/l)^2+N/(EJ)}\frac{2ql^2}{EJ(m\pi)^3}\sin(\alpha_m\xi)-\frac{\overline{M_0}}{EJ}\frac{\sinh(\beta_n(l-\xi))}{\beta_n^2\sin(\beta_n l)}-\frac{\overline{M_0}}{EJ}\left(\frac{1}{\beta_n^2}\frac{\xi}{l}-\frac{1}{\beta_n^2}\right)+\frac{\sinh(\beta_n\xi)}{\sinh(\beta_n l)}\overline{w_l}, \qquad 0\leqslant\xi\leqslant l, \tag{110}$$

式(110)和式(102)相同.说明直梁大挠度混合变量变分原理的正确性.

11 结 论

1) 本文提出了有限位移理论线弹性力学中的二类混合变量和三类混合变量的最小势能原理和驻值余能原理.

2) 考虑到指定边界条件的变化,并应用有限位移理论的功的互等定理在导出上述两类变分原理的过程中起到了关键作用和桥梁作用.这是推导变分原理的一个新途径.

3) 在二类混合变量最小势能原理中,二类混合变量的总势能是位移和应力的泛函.该泛

函对位移和应力取变分极值,导出平衡方程,静力边界条件和位移边界条件为 Euler 方程.对于二类混合变量驻值余能原理,二类混合变量的总余能也是位移和应力的泛函.该泛函对位移和应力取变分驻值,则得应力-位移关系,位移边界条件和静力边界条件为 Euler 方程.

4) 在三类混合变量的最小势能原理中,三类混合变量的总势能是位移、应力和应变的泛函.该泛函对位移、应力和应变取变分极值,则得应变-应力关系,平衡方程,静力边界条件和位移边界条件为 Euler 方程.对于三类混合变量的驻值余能原理,三类混合变量的总余能也是位移、应力和应变的泛函.该泛函对位移、应力和应变取变分驻值,则得应力-应变关系,应变-位移关系,位移边界条件和静力边界条件为 Euler 方程.

5) 给出了有限位移理论线弹性力学二类和三类混合变量的虚功原理和虚余功原理;并应用拉氏乘子法导出了有限位移线弹性力学的广义势能原理和广义余能原理.

参考文献(References):

[1] Bernoulli J. *New Mechanics or Statics*[M]. 1725.

[2] Lagrange J L. *Mécanique Analytique*[M]. 1788.

[3] Love A E H, M A, Sc D, et al. *The Mathematical Theory of Elasticity*[M]. New York: McGraw-Hill Book Co, 1944.

[4] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Co, 1970.

[5] Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*[M]. 2nd ed. Pergamon Press, 1975.

[6] Castigliano A. Nuova teoria intorno dellequilibrio deisistrmi elastici[J]. *Atti Acc Sci*, *Torino*, 1875.

[7] 钱令希. 余能原理[J]. 中国科学, 1950, **1**: 449-456.(TSIEN Ling-hi. Complementary energy principle[J]. *Scientia Sinica*, 1950, **1**: 449-456.(in Chinese))

[8] Reissner E. On a variational theorem in elasticity[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1950, **29**(2): 90-95.

[9] Reisser E. On variational principles in elasticity[C]//*Proceeding of Symposia in Applied Mathematics*. McGraw Hill, 1958, **8**: 1-6.

[10] 胡海昌. 论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理[J]. 物理学报, 1954, **10**(3): 259-290.(HU Hai-chang. On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity[J]. *Acta Physica Sinica*, 1954, **10**(3): 259-290.(in Chinese))

[11] 钱伟长. 变分法及有限元法[M]. 科学出版社, 1980.(CHIEN Wei-zang. *Variational Methods and Finite Element Methods*[M]. Science Press, 1980.(in Chinese))

[12] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 上海: 知识出版社, 1985.(CHIEN Wei-zang. *Generalized Variational Principles*[M]. Shanghai: Knowledge Press, 1985.(in Chinese))

[13] HE Ji-huan. Generalized equilibrium equations for shell derived from a generalized variational principle[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2017, **64**: 94-100.

[14] Tonti E. Variational principles in elastostatics[J]. *Mechanica*, 1967, **4**(2): 201-208.

[15] 钱令希, 钟万勰. 论固体力学中的极限分析并建立一个一般的变分原理[J]. 力学学报, 1963, **6**(4): 287-303.(TSIEN Ling-hi, TSOON Wan-shia. The limit analysis in solid mechanics and a suggested generalized variational principle[J]. *Acta Mechaniga Sinica*, 1963, **6**(4): 287-303.(in Chinese))

[16] Фу Бао-Лянь. Об обобщенных вариационных принципах термоупругости[J]. *Scientia Sinica*,

1964, **13**(9): 1507-1509.(FU Bao-lian. On generalized variational principles of thermo elasticity[J]. *Scientia Sinica*, 1964,**13** (9):1507-1509.(in Russia))

[17] Reissner E. On a variational theorem for finite elastic deformations[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1953, **32**(1/4): 129-135.

[18] Truesdell C, Noll W. *Non-linear Field Theories of Mechanics*[M]. Springer, 1965.

[19] Nemat-Nasser S. General variational principles in nonlinear and linear elasticity with applications[J]. *Mechanics Today*, 1972, **1**: 214-261.

[20] Levinson M. The complementary energy theorem in finite elasticity[J]. *Journal of Applied Mechanics.*, 1965, **32**(4): 826-828.

[21] Zubov L M. The stationary principle of complementary work in nonlinear theory of elasticity: PMM Vol 34, $n = 2$,1970, pp: 241-245[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, **34**(2): 228-232.

[22] Koiter W T. On the principle of stationary complementary energy in the nonlinear theory of elasticity[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1973, **25**(3): 424-434.

[23] Koiter W T. On the complementary energy theorem in nonlinear elasticity theory[C]//*Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics*, *Conf Univ Lecce*. Lecce, 1975: 207-232.

[24] Fraeijs de Veubeke B. A new variational principle for finite elastic displacements[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1972,**10**(9):745-763.

[25] Christoffersen J. On Zubov's principle of stationary complementary energy and a related principle[R]. Rep No: 44, Danish Center for Appl Math and Mech, 1973.

[26] Ogden R W. A note on variational theorems in non-linear elastostatics[J]. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1975, **77**: 609-615.

[27] Dill E H. The complementary energy principle in nonlinear elasticity[J]. *Lett Appl and Engng Sci*, 1977, **5**: 95-106.

[28] Ogden R W. Inequalities associated with the inversion of elastic stress-deformation relations and their implications[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1977, **81**(2): 313-324.

[29] Ogden R W. Extremum principles in non-linear elasticity and their application to composite-Ⅰ: theory[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, **14**(4): 265-282.

[30] 付宝连. 弯曲薄板的修正的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(11): 1197-1209.(FU Bao-lian. The corrected reciprocal theorem of bending of thin plates and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(11): 1197-1209.(in Chinese))

[31] 付宝连. 三维线弹性力学修正的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(5): 523-538.(FU Bao-lian. The corrected reciprocal theorem of three dimensional linear elasticity and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 523-538.(in Chinese))

[32] 付宝连. 有限位移理论的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(10): 1019-1034.(FU Bao-lian. The reciprocal theorems for finite displacement theory and its application [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(10): 1019-1034.(in Chinese))

Variational Principles for Dual and Triple Mixed Variables of Linear Elasticity With Finite Displacements and the Application

FU Bao-lian
(*College of Architectural Engineering and Mechanics*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao*, *Hebei* 066004, *P.R.China*)

Abstract: Variational principles for dual and triple mixed variables of linear elasticity with finite displacements were proposed. Considering the variation of prescribed boundary conditions and using the reciprocal theorem of finite displacements played the key and bridging roles in derivation of the above variational principles. First, in view of the variation of the prescribed geometrical boundary conditions and based on the reciprocal theorem, the principle of minimum potential energy with dual mixed variables was derived. In a similar way, the principle of stationary complementary energy with dual mixed variables was also given. Then the relation between the strain energy density and the complementary energy density was applied to the above 2 principles, and the variational principle with triple mixed variables was deduced. In turn, the principles of virtual work and virtual complementary work with dual and triple mixed variables were directly given. Meantime, the generalized variational principles were derived with the Lagrangian multiplier method. Through an example the Lagrangian multiplier method in certain cases was proved to be ineffective. The semi-inverse method for construction of the functionals for generalized variational principles was also introduced. Finally, a cantilever beam with large deflection was calculated by means of the principle of minimum potential energy for dual mixed variables.

Key words: finite displacement theory; linear elasticity; variational principle with dual (triple) mixed variables; principle of virtual (complementary) work with mixed variables; generalized variational principle; semi-inverse method

引用本文/Cite this paper:
付宝连. 有限位移理论线弹性力学二类和三类混合变量的变分原理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(11): 1251-1268.
FU Bao-lian. Variational principles for dual and triple mixed variables of linear elasticity with finite displacements and the application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(11): 1251-1268.