文章编号:1000-0887(2017)12-1359-18

有限位移理论线弹性动力学二类和三类混合变量的最小势作用量原理和驻值余作用量原理及其应用*

付宝连

(燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 两个新的概念,即势作用量的概念和余作用量的概念被引入弹性动力学变分原理中.根据势作用量的概念,最小作用量原理(即 Hamilton 原理)被改称为最小势作用量原理.根据余作用量的概念,首次提出了驻值余作用量原理.考虑边界条件的变化并应用有限位移理论的功的互等定理,导出了以位移和应力为变分变量的二类混合变量的最小势作用量原理及驻值余作用量原理.应用应变势能密度与应力余能密度的关系式于上述二类混合变量作用量原理,导出了以位移、应力和应变为变分变量的三类混合变量的相关作用量原理.最后,应用拉氏乘子法给出了广义势作用量原理及广义余作用量原理,并且应用大挠度梁二类混合变量最小势作用量原理计算了一悬臂梁的受迫振动.

关 键 词: 势作用量; 余作用量; 有限位移理论的功的互等定理; 二类(三类)混合变量最小势作用量原理; 二类(三类)混合变量驻值余作用量原理

中图分类号: O343 **文献标志码:** A doi:10.21656/1000-0887.380005

引 言

两个原理是有限位移理论变分公式的基础.其中之一是对位移的变分原理,这一原理导致最小势能原理[1-5].而另外一个是对位移和应力的变分原理,这一原理导致驻值余能原理[3-9].引入拉氏乘子到变分表达式的框架中,得到广义变分原理[5,10-14].众所周知,上述两个原理没有统一的变分变量.在导出上述原理的变分过程中假定在 S_u 和 S_p 上指定的边界条件保持不变.

在本文中,两个新的概念,即势作用量的概念和余作用量的概念被引入到弹性动力学变分原理中.因而,最小作用量原理(即 Hamilton 原理)被改称为最小势作用量原理,并且首次导出了驻值余作用量原理.

在文献[15]中,构建了二类混合变量和三类混合变量的最小势能原理和驻值余能原理.本文推广了文献[15]的思想,将导出有限位移理论线弹性动力学二类混合变量和三类混合变量的最小势作用量原理及驻值余作用量原理;考虑到边界条件的变化,并应用有限位移理论的功的互等定理在导出上述二类和三类混合变量作用量原理的过程中起到了关键作用和桥梁作用.首先,考虑位移边界条件的变化并应用功的互等定理,导出了二类混合变量的势作用量,该

* 收稿日期: 2017-01-05; 修订日期: 2017-05-13
作者简介: 付宝连(1934—),男,教授(E-mail: ysufubaolian@163.com).

势作用量是位移、应力和速度的泛函.该泛函对位移、应力和速度取变分极值,导出运动方程、静力边界条件和位移边界条件为 Euler(欧拉)方程.用类似的方法,考虑到静力边界条件的变化并应用功的互等定理,导出二类混合变量的余作用量.该余作用量也是位移、应力和速度的泛函.对该泛函取位移、应力和速度的驻值变分,导出应力-位移关系,位移边界条件和静力边界条件为 Euler 方程.应用应变势能密度和应力余能密度关系于上述二类混合变量的势(或余)作用量原理,导出三类混合变量的势(或余)作用量,该两作用量都是位移、应力、应变和速度的泛函.对两泛函取位移、应力、应变和速度的极(或驻)值变分,得应变-应力关系、运动方程、静力边界条件和位移边界条件(或应力-应变关系,应变-位移关系,位移边界条件和静力边界条件)为 Euler 方程.最后,应用拉氏乘子法导出了广义势作用量原理和广义余作用量原理,并应用大挠度二类混合变量最小势作用量原理计算一悬臂梁的受迫振动.

上述论述表明,弹性动力学中的最小势作用量原理及驻值余作用量原理分别与弹性静力学中的最小势能原理及驻值余能原理相对应.弹性动力学中的二类和三类混合变量的最小势作用量原理及驻值余作用量原理分别与弹性静力学中二类和三类混合变量最小势能原理及驻值余能原理相对应.弹性动力学中两个新的驻值余作用量原理的建立,一是推广了势能范畴的作用量原理到余能范畴,同时也捋顺了弹性静力学的势能原理和余能原理与弹性动力学的势作用量原理和余作用量原理对应关系,这都是得益于引进势作用量和余作用量两个新的概念所致.

1 基 本 方 程

本文将采用 Lagrange 描述.在这一描述中,确定变形前物体一点的坐标被用来确定该点在随后变形中的位置.

在这一描述中,在直角坐标中有限位移理论的基本方程可被表达为

$$[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}+F_i-\rho u_{i,tt}=0,\qquad x_i\in V,\tag{1}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}),\qquad x_i\in V,\tag{2}$$

$$(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j=\overline{p_i},\qquad x_i\in S_p,\tag{3}$$

$$u_i=\overline{u_i},\qquad x_i\in S_u,\tag{4}$$

$$\frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij},\qquad x_i\in V,\tag{5a}$$

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij},\qquad x_i\in V,\tag{5b}$$

$$\sigma_{ij}=2Ge_{ij}+\lambda e_{kk}\delta_{ij},\qquad x_i\in V,\tag{6a}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2G}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{G}\sigma_{kk}\delta_{ij},\qquad x_i\in V,\tag{6b}$$

其中 $i,j=1,2,3$,σ_{ij} 为 Kirchhoff 应力张量,e_{ij} 为 Green 应变张量,$A(e_{ij})$ 为应变能密度,$B(\sigma_{ij})$ 为余能密度,$G=E/(2(1+\nu))$,$\lambda=\nu E/((1+\nu)(1-2\nu))$,$E$ 为弹性模量,ν 为 Poisson 比.

2 有限位移理论三维线弹性的功的互等定理

考虑有限位移的两个线性弹性体.它们具有相同的几何形状、尺寸和本构关系,但具有不同的位移边界条件和静力边界条件.它们在各自外力作用下都处于真实状态.其中之一称为第

一弹性体，相应的力学量表示为$(\cdot)_1$；另一个被称为第二弹性体,相应的力学量表示为$(\cdot)_2$.

根据文献[16-18],有限位移理论三维线弹性力学功的互等定理可表示为

$$\begin{aligned}&\iiint_V (F_{1i}-\rho u_{1i,tt})u_{2i}\mathrm{d}v+\iint_{S_{1p}}\overline{p_{1i}}\,u_{2i}\mathrm{d}s+\iint_{S_{1u}}p_{1i}u_{2i}\mathrm{d}s+\\&\quad\iiint_V \sigma_{1ij}\left(\frac{1}{2}u_{2k,i}u_{2k,j}-u_{1k,i}u_{2k,j}\right)\mathrm{d}v=\\&\quad\iiint_V (F_{2i}-\rho u_{2i,tt})u_{1i}\mathrm{d}v+\iint_{S_{2p}}\overline{p_{2i}}\,u_{1i}\mathrm{d}s+\iint_{S_{2u}}p_{2i}u_{1i}\mathrm{d}s+\\&\quad\iiint_V \sigma_{2ij}\left(\frac{1}{2}u_{1k,i}u_{1k,j}-u_{2k,i}u_{1k,j}\right)\mathrm{d}v.\end{aligned}\tag{7}$$

3 最小势作用量原理与驻值余作用量原理

Hamilton 原理的运动变分方程可写为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-\Pi_{\mathrm{p}})\mathrm{d}t=0,\tag{8}$$

这里 L 称为 Lagrange 函数或称为作用量；T 为弹性体的动能,它可表示为

$$T=\iiint_V \frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2\mathrm{d}v;\tag{9}$$

总势能 Π_{p} 可表示为

$$\Pi_{\mathrm{p}}=\iiint_V A(e_{ij})\mathrm{d}v-\iiint_V F_iu_i\mathrm{d}v-\iint_{S_p}\overline{p_i}\,u_i\mathrm{d}s,\tag{10}$$

Hamilton 原理也称为最小作用量原理.此后,建议式(8)改写为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}A_{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-\Pi_{\mathrm{p}})\mathrm{d}t=0,\tag{11}$$

这里 A_{p} 重新定义为势作用量.

对式(11)取容许位移分量 u_i 和速度分量 $u_{i,t}$ 的变分极值,则

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\delta A_{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V \{[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}+F_i-\rho u_{i,tt}\}\delta u_i\mathrm{d}v\mathrm{d}t-\\&\quad\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_p}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j-\overline{p_i}]\delta u_i\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\\&\quad\iiint_V \rho u_{i,t}\delta u_i\mathrm{d}v\Big|_{t_1}^{t_2}=0.\end{aligned}\tag{12}$$

当初始时刻 t_1 和终止时刻 t_2 变形体各点 u_i 为一固定值时,有 $\delta u_i=0$.根据变分法基本预备定理,则得 Euler 方程为

$$[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}+F_i-\rho u_{i,tt}=0,\qquad x_i\in V,\tag{13}$$

$$[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j-\overline{p_i}]=0,\qquad x_i\in S_p.\tag{14}$$

这就是通常所谓的有限位移理论的最小作用量原理,本文把它改称为最小势作用量原理.

于是最小势作用量原理可以描述为:当初始时刻 t_1 和终止时刻 t_2 变形体各点位移为一固定值时,对势作用量的时间定积分 $\int_{t_1}^{t_2}A_{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$ 取容许位移分量 u_i 和速度分量 $u_{i,t}$ 的变分极值,则得运动平衡方程和静力边界条件为 Euler 方程.

这一原理要求的是容许位移,即满足应变-位移关系和位移边界条件的位移.

对于应力和位移的运动变分方程可表示为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}A_{\mathrm{c}}\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-\Pi_{\mathrm{c}})\mathrm{d}t=0, \tag{15}$$

这里的 A_{c} 定义为余作用量，Π_{c} 是总余能，它可写为

$$\Pi_{\mathrm{c}}=\iiint_V\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v-\iint_{S_u}\overline{u_i}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s, \tag{16}$$

称式(15)是驻值余作用量原理的运动变分方程.

注意到应力和位移是平衡容许的，故有

$$\iiint_V u_i\delta\{[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}-\rho u_{i,tt}\}\mathrm{d}v=0. \tag{17}$$

将式(15)和式(17)合并，则得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}A_{\mathrm{c}}\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2\mathrm{d}v-\iiint_V\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v+\right.$$
$$\left.\iint_{S_u}\overline{u_i}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t-$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V u_i\delta\{[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}-\rho u_{i,tt}\}\mathrm{d}v\mathrm{d}t=0. \tag{18}$$

在式(18)中对 u_i，$u_{i,t}$ 和 σ_{ij} 进行变分运算，则得

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta A_{\mathrm{c}}\mathrm{d}t=\iiint_V\mathrm{d}v(\rho u_i\delta u_{i,t})_{t_1}^{t_2}-$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iiint_V\left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\sigma_{kj}\mathrm{d}v-$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\iint_{S_u}(u_i-\overline{u_i})\delta[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s=0, \tag{19}$$

当初始时刻 t_1 和终止时刻 t_2 变形体各点的速度都为已知时，有 $\delta u_{i,t}=0$.于是，根据变分法基本预备定理，则有 Euler 方程为

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0,\qquad x_i\in V, \tag{20}$$

$$u_i-\overline{u_i}=0,\qquad x_i\in S_u, \tag{21}$$

这就是有限位移理论驻值余作用量原理.它可以被描述为：当初始时刻 t_1 和终止时刻 t_2 变形体各点的速度为已知时，对余作用量的时间定积分 $\int_{t_1}^{t_2}A_{\mathrm{c}}\mathrm{d}t$ 取 u_i，$u_{i,t}$ 和 σ_{ij} 的变分驻值，则得变形体的应力-应变-位移关系和位移边界条件为 Euler 方程.

这一原理要求的是容许应力和容许位移，即满足平衡方程和静力边界条件的应力和位移.

本文引进了势作用量的概念和余作用量的概念.根据势作用量的概念，最小作用量原理(即 Hamilton 原理)改称为最小势作用量原理；根据余作用量的概念，首次构建了驻值余作用量原理.最小势作用量原理和驻值余作用量原理相配对正好和最小势能原理和驻值余能原理配对相对应.弹性静力学和弹性动力学形成一完整的理论体系.

4 二类混合变量最小势作用量原理的推导

4.1 余功的零变分关系

考虑第 2 节所述的两个弹性体，取第一弹性体的状态为

$$
\begin{array}{cccc}
V & V & S_p & S_u \\
\sigma_{ij} & F_i & \overline{p_i} & p_i \\
u_i + \delta u_i & u_i + \delta u_i & u_i + \delta u_i & \overline{u_i} + \delta \overline{u_i}
\end{array}
$$

而第二弹性体的状态为

$$
\begin{array}{cccc}
V & V & S_p & S_u \\
\sigma_{ij} & F_i & \overline{p_i} & p_i + \delta p_i \\
u_i + \delta u_i & u_i + \delta u_i & u_i + \delta u_i & \overline{u_i}
\end{array}
$$

应用功的互等定理式(7)于这两个状态,得

$$\iint_{S_u} (\overline{u_i}\,\delta p_i + p_i \delta \overline{u_i})\,\mathrm{d}s = \iint_{S_u} \delta(\overline{u_i} p_i)\,\mathrm{d}s = 0, \tag{22}$$

式(22)被称为 S_u 外表面部分余功的零变分关系.

另一方面,需引入关系

$$\iint_{S_u} \delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj} n_j u_i]\,\mathrm{d}s = 0, \tag{23}$$

式(23)被称为 S_u 内表面部分余功的零变分关系.式(23)是为后面导出二类混合变量的最小势作用量原理所必须遵守的约束条件.

4.2 弱容许位移和协调弱容许应力

为以后导出二类混合变量的最小势作用量原理,首先引入下述两个基本定义:

弱容许位移:满足应变-位移关系式(2)的位移.

协调弱容许应力:当位移是弱容许的,满足 S_u 内表面部分余功的零变分关系式(23)并遵守 Hooke(胡克)定律式(6a)的应力.

4.3 二类混合变量的最小势作用量原理

迄今为止,在导出最小势作用量原理时都假设,在变分过程中,在 S_u 和 S_p 上指定的边界条件保持不变.本文将考虑指定边界条件的变化.

首先考虑位移边界条件的变化.在 S_u 上指定的位移分量给出一无限小的增量 $\delta \overline{u_i}$, 而体力和在 S_p 上的力的边界条件保持不变;在体内和在 S_p 上的无限小的位移增量表示为 δu_i.假设这些增量位移产生一新的位形,因而具有应变能的增量为[5]

$$\iiint_V \delta A(e_{ij})\,\mathrm{d}v = \iiint_V F_i \delta u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i}\,\delta u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} p_i \delta \overline{u_i} \mathrm{d}s, \tag{24}$$

应用 S_u 外表面部分余功的零变分关系式(22),能把式(24)转化为

$$\iiint_V \delta A(e_{ij})\,\mathrm{d}v = \iiint_V F_i \delta u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i}\,\delta u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} \overline{u_i}\,\delta p_i \mathrm{d}s. \tag{25}$$

将引入一新的泛函:

$$A_{2\mathrm{mp}} = T - \Pi_{2\mathrm{mp}}, \tag{26}$$

$\Pi_{2\mathrm{mp}}$ 称为二类混合变量的总势能,并且可表示为

$$\Pi_{2\mathrm{mp}} = \iiint_V A(e_{ij})\,\mathrm{d}v - \iiint_V F_i u_i \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} \overline{u_i} p_i \mathrm{d}s, \tag{27}$$

其中 u_i 为弱容许位移, p_i 为协调弱容许表面反力.

将式(9)和式(27)代入式(26)后,则得

$$A_{2\mathrm{mp}} = \iiint_V \frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2 \mathrm{d}v - \iiint_V A(e_{ij})\,\mathrm{d}v + \iiint_V F_i u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} \overline{u_i} p_i \mathrm{d}s, \tag{28}$$

这里 $A_{2\mathrm{mp}}$ 称为二类混合变量的势作用量.

在任意两时刻 t_1 和 t_2 间做定积分,则得

$$\int_{t_1}^{t_2} A_{2\mathrm{mp}} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \iiint_V \frac{1}{2} \rho (u_{i,t})^2 \mathrm{d}v - \iiint_V A(e_{ij}) \mathrm{d}v + \iiint_V F_i u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i}\, u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} \overline{u_i} p_i \mathrm{d}s \Big\} \mathrm{d}t. \tag{29}$$

对式(29)取 u_i, $u_{i,t}$ 和 σ_{ij} 变分极值,则得变分方程

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} A_{2\mathrm{mp}} \mathrm{d}t = \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\iiint_V \frac{1}{2} \rho (u_{i,t})^2 \mathrm{d}v - \iiint_V A(e_{ij}) \mathrm{d}v + \iiint_V F_i u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} \overline{u_i} p_i \mathrm{d}s \Big] \mathrm{d}t = 0. \tag{30}$$

在式(30)中对 $u_{i,t}$, u_i 和 σ_{ij} 进行变分运算,则得

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A_{2\mathrm{mp}} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\iiint_V \{ [(\delta_{ki} + u_{k,i}) \sigma_{kj}]_{,j} + F_i - \rho u_{i,tt} \} \delta u_i \mathrm{d}v - \iint_{S_p + S_u} [(\delta_{ki} + u_{k,i}) \sigma_{kj} n_j] \delta u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_p} \overline{p_i}\, \delta\, \overline{u_i}\, \mathrm{d}s - \iint_{S_u} \overline{u_i} \delta p_i \mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}t + \iiint_V \rho u_{i,t} \mathrm{d}v \delta u_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{31}$$

将 S_u 内表面部分余功的零变分关系式(23)代入到式(31)中,并假设在时刻 t_1 和 t_2 变形体各点的 u_i 为已知值,故 $\delta u_i = 0$, 于是有

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta A_{2\mathrm{mp}} \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\iiint_V \{ [(\delta_{ki} + u_{k,i}) \sigma_{kj}]_{,j} + F_i - \rho u_{i,tt} \} \delta u_i \mathrm{d}v - \iint_{S_p} [(\delta_{ki} + u_{k,i}) \sigma_{kj} n_j - \overline{p_i}] \delta u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i}) \delta p_i \mathrm{d}s \Big) \mathrm{d}t = 0, \tag{32}$$

根据变分法基本预备定理,则得下述 Euler 方程为

$$[(\delta_{ki} + u_{k,i}) \sigma_{kj}]_{,j} + F_i - \rho u_{i,tt} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{33}$$

$$(\delta_{ki} + u_{k,i}) \sigma_{kj} n_j = \overline{p_i}, \qquad x_i \in S_p, \tag{34}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0, \qquad x_i \in S_u. \tag{35}$$

于是,二类混合变量的最小势作用量原理被导出.这一原理可被描述为:当初始时刻 t_1 和终止时刻 t_2 变形体各点的位移都为一固定值时,对二类混合变量的势作用量的时间定积分 $\int_{t_1}^{t_2} A_{2\mathrm{mp}} \mathrm{d}t$ 取弱容许位移 u_i, 协调弱容许应力 σ_{ij} 和速度 $u_{i,t}$ 的变分极值,则得运动平衡方程、静力边界条件和位移边界条件为 Euler 方程.

式(30)是这一原理的运动变分方程.弹性动力学中的这一原理正好和弹性静力学中的二类混合变量最小势能原理相对应.

当只取位移做为容许的, 而应力不是变分变量, 这时变分方程式(30)简化为变分方程式(11).

5 二类混合变量驻值余作用量原理的推导

5.1 功的零变分关系

其次,考虑有限位移的另外两个线性弹性体.第一弹性体的状态为

$$
\begin{array}{cccc}
V & V & S_p & S_u \\
\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij} & F_i & \overline{p_i}+\delta\overline{p_i} & p_i+\delta p_i \\
u_i+\delta u_i & u_i+\delta u_i & u_i & \overline{u_i}
\end{array}
$$

而第二弹性体的状态为

$$
\begin{array}{cccc}
V & V & S_p & S_u \\
\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij} & F_i & \overline{p_i} & p_i+\delta p_i \\
u_i+\delta u_i & u_i+\delta u_i & u_i+\delta u_i & \overline{u_i}
\end{array}
$$

在上述两状态之间应用功的互等定理式(7),则得

$$\iint_{S_p}(\overline{p_i}\,\delta u_i+u_i\delta\,\overline{p_i})\,\mathrm{d}s=\iint_{S_p}\delta(\overline{p_i}\,u_i)\,\mathrm{d}s=0, \tag{36}$$

它被称为 S_p 外表面部分功的零变分关系.

另一方面,必须引入关系

$$\iint_{S_p}\delta[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_ju_i]\,\mathrm{d}s=0, \tag{37}$$

它被表示为 S_p 内表面部分功的零变分关系.为后面导出二类混合变量驻值余作用量原理,式(37)是必须遵守的约束条件.

5.2 弱容许应力和平衡弱容许位移

为后面导出二类混合变量驻值余作用量原理,需要另外引入如下两个基本定义:

弱容许应力:满足运动方程(1)的应力.

平衡弱容许位移:当应力是弱容许的,满足运动方程(1)和 S_p 内表面部分功的零变分关系(37)并遵守 Hooke 定律(6b)的位移.

5.3 二类混合变量驻值余作用量原理

众所周知,在推导驻值余作用量原理时假定,在变分过程中,在 S_p 和 S_u 上的指定边界条件保持不变.本小节将考虑静力边界条件的变化.在 S_p 上指定表面力给出一无限小的增量 $\delta\,\overline{p_i}$,而在 S_u 上的位移边界条件和体力保持不变.在体内所引起的应力和位移无限小的增量分别表示为 $\delta\sigma_{ij}$ 和 δu_i.假设这些增量应力和位移产生一新的位形.于是有[5]

$$\iiint_V\delta B(\sigma_{ij})\,\mathrm{d}v+\iiint_V\frac{1}{2}\delta(\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j})\,\mathrm{d}v=\iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\mathrm{d}s+\iint_{S_p}u_i\delta\overline{p_i}\mathrm{d}s, \tag{38}$$

考虑到 S_p 外表面部分功的零变分关系式(36),式(38)可转换为

$$\iiint_V\delta B(\sigma_{ij})\,\mathrm{d}v+\iiint_V\frac{1}{2}\delta(\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j})\,\mathrm{d}v=\iint_{S_u}\overline{u_i}\,\delta p_i\mathrm{d}s-\iint_{S_p}\overline{p_i}\,\delta u_i\mathrm{d}s. \tag{39}$$

其次引入另一个新的泛函

$$A_{2\mathrm{mc}}=T-\Pi_{2\mathrm{mc}}, \tag{40}$$

这里 $A_{2\mathrm{mc}}$ 称为二类混合变量的余作用量, $\Pi_{2\mathrm{mc}}$ 为二类混合变量的总余能,并能被写成

$$\Pi_{2\mathrm{mc}}=\iiint_V\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v-$$
$$\iint_{S_u}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\,\overline{u_i}\mathrm{d}s+\iint_{S_p}\overline{p_i}u_i\mathrm{d}s, \tag{41}$$

这里 σ_{ij} 为弱容许应力, u_i 为平衡弱容许位移.将式(9)和式(41)代入式(40),则得

$$A_{2\mathrm{mc}}=\iiint_V\frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2\mathrm{d}v-\iiint_V\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v+$$

$$\iint_{S_u}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\,\overline{u_i}\,\mathrm{d}s-\iint_{S_p}\overline{p_i}u_i\mathrm{d}s. \tag{42}$$

对 $\int_{t_1}^{t_2}A_{2\mathrm{mc}}\mathrm{d}t$ 取弱容许应力 σ_{ij}、平衡弱容许位移 u_i 和速度 $u_{i,t}$ 的变分驻值，则得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}A_{2\mathrm{mc}}\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2\mathrm{d}v-\iiint_V\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v+\right.$$
$$\left.\iint_{S_u}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\,\overline{u_i}\mathrm{d}s-\iint_{S_p}\overline{p_i}u_i\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{43}$$

在体内应力和位移的变分分别表示为 $\delta\sigma_{ij}$ 和 δu_i，而体力保持不变，于是有

$$-\iiint_V u_i\delta\{[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}-\rho u_{i,tt}\}\mathrm{d}v=0. \tag{44}$$

将 S_p 内表面部分功的零变分关系式(37)和式(44)代入到式(43)，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta A_{2\mathrm{mc}}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\frac{1}{2}\rho\delta(u_{i,t})^2\mathrm{d}v-\iiint_V\delta\left[B(\sigma_{ij})+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v+\right.$$
$$\iint_{S_u}\overline{u_i}\delta[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s-\iint_{S_p}\overline{p_i}\delta u_i\mathrm{d}s-$$
$$\iiint_V u_i\delta\{[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}-\rho u_{i,tt}\}\mathrm{d}v+$$
$$\left.\iint_{S_p}\delta\{[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]u_i\}\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{45}$$

假设在 t_1 和 t_2 时刻 $\delta u_{i,t}$ 为 0，通过分部积分并应用 Green 公式，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta A_{2\mathrm{mc}}\mathrm{d}t=\iiint_V\mathrm{d}v(\rho u_i\delta u_{i,t})\Big|_{t_1}^{t_2}-$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V\left[\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v-\right.$$
$$-\iint_{S_u}(u_i-\overline{u_i})\delta[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s+$$
$$\left.\iint_{S_p}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j-\overline{p_i}]\delta u_i\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{46}$$

基于变分法基本预备定理，得到下述 Euler 方程：

$$\frac{\partial B(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0,\qquad x_i\in V, \tag{47}$$

$$u_i-\overline{u_i}=0,\qquad x_i\in S_u, \tag{48}$$

$$(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j-\overline{p_i}=0,\qquad x_i\in S_p. \tag{49}$$

于是，二类混合变量的驻值余作用量原理被导出.这一原理可描述为：当初始时刻 t_1 和终止时刻 t_2 变形体各点的速度为已知时，对二类混合变量的余作用量的时间定积分 $\int_{t_1}^{t_2}A_{2\mathrm{mc}}\mathrm{d}t$ 取弱容许应力 σ_{ij}、平衡弱容许位移 u_i 和速度 $u_{i,t}$ 的变分驻值，则得应力-应变-位移关系，位移边界条件和静力边界条件为 Euler 方程.式(43)是该原理的运动变分方程.弹性动力学中的这一原理与弹性静力学的二类混合变量驻值余能原理相对应.

当取应力和位移是容许的，而不是弱容许的，并且不取已知边界力的变分，则变分方程式(43)简化为驻值余作用量变分方程式(15).

6 三类混合变量势作用量原理及余作用量原理的推导

6.1 三类混合变量势作用量原理

定义三类混合变量总势能为

$$\Pi_{3\mathrm{mp}} = \iiint_V [\boldsymbol{\sigma}_{ij}e_{ij} - B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})]\mathrm{d}v - \iiint_V F_i u_i \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i}\, u_i \mathrm{d}s + \iint_{S_u} \overline{u_i} p_i \mathrm{d}s, \tag{50}$$

定义三类混合变量势作用量为

$$A_{3\mathrm{mp}} = T - \Pi_{3\mathrm{mp}}, \tag{51}$$

其中 $A_{3\mathrm{mp}}$ 是u_i，$\boldsymbol{\sigma}_{ij}$，e_{ij} 和 $u_{i,t}$ 的泛函。

将式(9)和式(50)代入式(51)，则得

$$A_{3\mathrm{mp}} = \iiint_V \frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2\mathrm{d}v - \iiint_V [\boldsymbol{\sigma}_{ij}e_{ij} - B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})]\mathrm{d}v + \iiint_V F_i u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i}\, u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} \overline{u_i} p_i \mathrm{d}s. \tag{52}$$

对 $A_{3\mathrm{mp}}$ 取两时间间隔 t_1，t_2 的定积分，并对此定积分取 u_i，$\boldsymbol{\sigma}_{ij}$，e_{ij} 和$u_{i,t}$ 的变分极值，则得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} A_{3\mathrm{mp}}\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint_V \frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2\mathrm{d}v - \iiint_V [\boldsymbol{\sigma}_{ij}e_{ij} - B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})]\mathrm{d}v + \iiint_V F_i u_i \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i}\, u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} \overline{u_i} p_i \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = 0. \tag{53}$$

对式(53)进行变分验算，则得

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2} A_{3\mathrm{mp}}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{ & -\iiint_V \left[e_{ij} - \frac{\partial B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}\right]\delta\boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathrm{d}v + \\ & \iiint_V \{[(\delta_{ki} + u_{k,i})\boldsymbol{\sigma}_{kj}]_{,j} + F_i - \rho u_{i,tt}\}\delta u_i \mathrm{d}v - \\ & \iint_{S_p}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\boldsymbol{\sigma}_{kj}n_j - \overline{p_i}]\delta u_i\mathrm{d}s + \iint_{S_u}(u_i - \overline{u_i})\delta p_i \mathrm{d}s\Big\}\mathrm{d}t + \\ & \iiint_V \rho u_{i,t}\mathrm{d}v\delta u_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.\end{aligned} \tag{54}$$

当 t_1 和 t_2 变形体各点的位移 u_i 已知时，再根据变分法基本预备定理，则得 Euler 方程为

$$e_{ij} - \frac{\partial B(\boldsymbol{\sigma}_{ij})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{55}$$

$$[(\delta_{ki} + u_{k,i})\boldsymbol{\sigma}_{kj}]_{,j} + F_i - \rho u_{i,tt} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{56}$$

$$(\delta_{ki} + u_{k,i})\boldsymbol{\sigma}_{kj}n_j - \overline{p_i} = 0, \qquad x_i \in S_p, \tag{57}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0, \qquad x_i \in S_u. \tag{58}$$

6.2 三类混合变量的余作用量原理

定义三类混合变量的总余能为

$$\Pi_{3\mathrm{mc}} = \iiint_V \left[\boldsymbol{\sigma}_{ij}e_{ij} - A(e_{ij}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v - \iint_{S_u} \overline{u_i}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\boldsymbol{\sigma}_{kj}n_j]\mathrm{d}s + \iint_{S_p} \overline{p_i}\, u_i\mathrm{d}s. \tag{59}$$

定义三类混合变量余作用量为

$$A_{3mc} = T - \Pi_{3mc}, \tag{60}$$

其中 A_{3mc} 是 u_i, σ_{ij}, e_{ij} 和 $u_{i,t}$ 的泛函.

将式(9)和式(59)代入式(60),则得

$$A_{3mc} = \iiint_V \frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2 \mathrm{d}v - \iiint_V \left[\sigma_{ij}e_{ij} - A(e_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v + \iint_{S_u}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\,\overline{u_i}\mathrm{d}s - \iint_{S_p}\overline{p_i}\,u_i\mathrm{d}s, \tag{61}$$

对 A_{3mc} 取两时间间隔 t_1, t_2 的定积分,并对此定积分取 u_i, σ_{ij}, e_{ij} 和 $u_{i,t}$ 的变分驻值,则得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} A_{3mc}\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint_V \frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2 \mathrm{d}v - \iiint_V \left[\sigma_{ij}e_{ij} - A(e_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{k,i}u_{k,j}\right]\mathrm{d}v + \iint_{S_u}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\,\overline{u_i}\mathrm{d}s - \iint_{S_p}\overline{p_i}\,u_i\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = 0, \tag{62}$$

对式(62)进行变分运算,则得

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_1}^{t_2} A_{3mc}\mathrm{d}t = {}& \int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint_V \left[\sigma_{ij} - \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}}\right]\delta e_{ij}\mathrm{d}v - \right.\\ & \iiint_V\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}v - \\ & \left.\iint_{S_u}(u_i - \overline{u_i})\delta[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]\mathrm{d}s + \iint_{S_p}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j - \overline{p_i}]\delta u_i\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t + \\ & \iiint_V(\rho u_i\delta u_{i,t})\mathrm{d}v\,\Big|_{t_1}^{t_2} = 0.\end{aligned} \tag{63}$$

当 t_1 和 t_2 变形体各点的速度 $u_{i,t}$ 为已知值时,再根据变分法基本预备定理,得 Euler 方程为

$$\sigma_{ij} - \frac{\partial A(e_{ij})}{\partial e_{ij}} = 0, \qquad x_i \in V, \tag{64}$$

$$e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) = 0, \qquad x_i \in V, \tag{65}$$

$$u_i - \overline{u_i} = 0, \qquad x_i \in S_p, \tag{66}$$

$$(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j - \overline{p_i} = 0, \qquad x_i \in S_u. \tag{67}$$

7 广义势作用量原理和广义余作用量原理

二类混合变量的势作用量式(27)是在约束条件式(2)和 S_u 内表面部分余功的零变分关系式(23)限制下的一个泛函.为消除上述两个条件对泛函(27)的限制,需要使用 Lagrange 乘子法将上述两个条件置入变分方程的框架中,于是有

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} A_{gp}\mathrm{d}t = \delta\int_{t_1}^{t_2}(T - \Pi_{2mp})\mathrm{d}t + \delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sigma_{ij}\left[e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})\right] + \iint_{S_u}[(\delta_{ki} + u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]u_i\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t, \tag{68}$$

这里 A_{gp} 为广义势作用量.在式(68)中对 u_i, σ_{ij}, e_{ij} 和 $u_{i,t}$ 取驻值变分,得到式(1)~(4)和(5a)为 Euler 方程.

应用相同的方法,得到广义余作用量的时间定积分为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}A_{\mathrm{gc}}\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-\Pi_{2\mathrm{mc}})\mathrm{d}t+$$
$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\langle\iiint_V\{[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]_{,j}+(F_i-\rho u_{i,tt})\}\delta u_i\mathrm{d}v+\right.$$
$$\left.\iint_{S_p}[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j]u_i\mathrm{d}s\right\rangle\mathrm{d}t,\tag{69}$$

在式(69)中对 σ_{ij},u_i,e_{ij} 和 $u_{i,t}$ 取驻值变分,得到式(1)~(4)和式(5a)为 Euler 方程.

广义势作用量原理和广义余作用量原理分别与弹性静力学中的广义势能原理和广义余能原理相对应.

8 广义泛函的构成[19-20]

构成广义泛函的方法有如下几种:首先是传统的 Lagrange 乘子法.钱伟长把这一方法系统地应用于构造广义变分原理的广义泛函,已得到业内人士的广泛认可.其次是钱伟长提出的高阶 Lagrange 乘子法.钱伟长发现,在 Hellinger-Reissner 变分原理和 Hu-Washizu 变分原理中,为消除应力-应变关系的约束而构成更广义的泛函时,Lagrange 乘子法失效,故而提出高阶 Lagrange 乘子法.再次是刘高联提出的系统反推法,该法的主要思想是根据应得到的 Euler 方程反演推出泛函的构成.最后是何吉欢提出的半逆法.该法的主要特点是对泛函的主要构成变量进行假设.在此假设的基础上对构成的泛函进行变分运算,从而得出泛函的一些后续变分变量.可以认为半逆法是构成广义变分原理广义泛函的一个行之有效的方法.

9 半 逆 法

半逆法是构建广义变分原理泛函的一个强有力的方法.为说明该法的基本思想,以有限变形理论最小势作用量原理推广为广义势作用量原理为例予以说明.最小势作用量原理的变分方程为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}A_{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-\Pi_{\mathrm{p}})\mathrm{d}t=0,\tag{70}$$

其中

$$T=\iiint_V\frac{1}{2}\rho(u_{i,t})^2\mathrm{d}v,\tag{71}$$

$$\Pi_{\mathrm{p}}=\iiint_V\left(\frac{1}{2}e_{ij}a_{ijkl}e_{kl}-f_iu_i\right)\mathrm{d}v-\iint_{S_p}\overline{p_i}\,u_i\mathrm{d}s.\tag{72}$$

式(72)中的 Π_{p} 是一个在下述方程约束下的泛函:

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}e_{kl},\qquad x_i\in V,\tag{73}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}),\qquad x_i\in V,\tag{74}$$

$$u_i-\overline{u_i}=0,\qquad x_i\in S_u.\tag{75}$$

对总势能式(72)取 u_i 和 e_j 的变分极值,则得 Euler 方程为

$$[(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}]_{,j}-f_i=0,\qquad x_i\in V,\tag{76}$$

$$(\delta_{ki}+u_{k,i})\sigma_{kj}n_j=p_i,\qquad x_i\in V.\tag{77}$$

下面用半逆法(semi-inverse method)构成一广义势能泛函 Π_{gp},为此假设

$$\Pi'_{\mathrm{gp}} = \iiint_V \left(\frac{1}{2} e_{ij} a_{ijkl} e_{kl} - f_i u_i + F_i \right) \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i}\, u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i}) \nu_i \mathrm{d}s . \tag{78}$$

式(78)中的 F_i 和 ν_i 是两个新引入的函数,它们的引入应该满足式(73)~(75).能够判断, F_i 应该是 e_{ij} 的函数.对式(78)中体积分中被积函数取 e_{ij} 的偏导驻值,则得凑合 Euler 方程为

$$a_{ijkl} e_{kl} + \frac{\partial F_i}{\partial e_{ij}} = 0, \tag{79}$$

于是有

$$F_i = - e_{ij} \sigma_{ij} + F_1 , \tag{80}$$

这里 F_1 是新引入的一个函数,它与 e_{ij} 无关.于是得一 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} e_{ij} a_{ijkl} e_{kl} - f_i u_i - e_{ij} \sigma_{ij} + F_i , \tag{81}$$

进一步可以判断, F_1 是 σ_{ij} 的函数.对式(81)取 σ_{ij} 的偏导驻值,则得凑合 Euler 方程为

$$- e_{kl} + \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{ij}} = 0, \tag{82}$$

于是得

$$F_1 = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \sigma_{ij} . \tag{83}$$

易于得出

$$\nu_i = (\delta_{k,i} + u_{k,i}) \sigma_{kj} n_j , \tag{84}$$

于是得广义势能泛函为

$$\Pi_{\mathrm{gp}} = \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} e_{ij} a_{ijkl} e_{kl} - f_i u_i - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \right] \right\} \mathrm{d}v - \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s - \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i}) [(\delta_{k,i} + u_{k,i}) \sigma_{kj} n_j] \mathrm{d}s , \tag{85}$$

最后得广义势作用量为

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} A_{\mathrm{gp}} \mathrm{d}t &= \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi_{\mathrm{p}}) \mathrm{d}t = \\ & \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left[\frac{1}{2} \rho (u_{i,t})^2 - \left(\frac{1}{2} e_{ij} a_{ijkl} e_{kl} - f_i u_i \right) \right] \mathrm{d}v + \iint_{S_p} \overline{p_i} u_i \mathrm{d}s + \right. \\ & \iiint_V \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \right] \mathrm{d}v + \\ & \left. \iint_{S_u} (u_i - \overline{u_i}) [(\delta_{k,i} + u_{k,i}) \sigma_{kj} n_j] \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t , \end{aligned} \tag{86}$$

这里, A_{gp} 为广义势作用量.

10 应 用

10.1 大挠度直梁混合变量的最小势作用量原理的应用

首先,应用有限位移理论二类混合变量的最小势作用量原理来计算一在均布谐载作用下大挠度悬臂梁的受迫振动.

图 1(a)为一在均布谐载作用下的大挠度悬臂梁;图 1(b)是与图 1(a)相对应受其幅值载

荷作用的大挠度悬臂梁.解除图 1(b)梁固定端的弯曲约束代以集中幅值弯矩 $\overline{M_0}$,并假设其自由端的幅值挠度为 $\overline{w_l}$, 则得幅值大挠度悬臂梁实际系统图 1(c).

假设纵向振动比横向振动较小,可忽略,则图 1(a)所示幅值大挠度悬臂梁实际系统二类混合变量势作用量在时间间隔 t_1, t_2 的定积分的变分极值为

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}A_{2\mathrm{mp}}\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^l\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial w'}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x-\int_0^l\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x+\int_0^l q'w'\mathrm{d}x-\right.$$
$$\left.\int_0^l\frac{1}{2}EF\left[\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2\right]^2\mathrm{d}x+\overline{M'_0}\left(\frac{\partial w'}{\partial x}\right)_{x=0}-\overline{w'_l}Q'_{x=l}\right\}\mathrm{d}t=0. \tag{87}$$

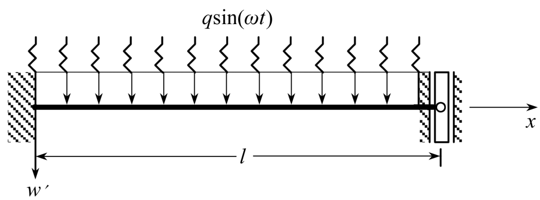

图 1(a) 均布谐载作用下大挠度悬臂梁

Fig. 1(a) A cantilever beam with large deflection under uniformly distributed harmonic load

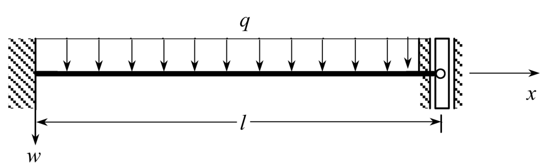

图 1(b) 均布幅值载荷作用下大挠度悬臂梁

Fig. 1(b) A cantilever beam with large deflection under uniformly distributed amplitude load

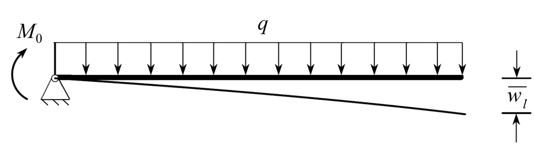

图 1(c) 均布幅值载荷作用下大挠度悬臂梁实际系统

Fig. 1(c) The actual system of the cantilever beam with large deflection under uniformly distributed amplitude load

此时, $w'(x,t)$ 和 $u'(x,t)$ 均满足时刻 t_1 和时刻 t_2 时 $w'(x,t_1)$ 和 $u'(x,t_2)$ 为固定值的要求.变分极值式(87)可被二类混合变量幅值总势能取变分极值所代替,即被下式变分极值所代替:

$$\delta\Pi_{2\mathrm{amp}}=\delta\int_0^l\left[\frac{1}{2}EJ\left(\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2-\frac{1}{2}\rho\omega^2w^2-qw\right]\mathrm{d}x+$$
$$\int_0^l\frac{1}{2}EF\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^2\mathrm{d}x-\overline{M_0}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}+\overline{w_l}Q_{x=l}=0, \tag{88}$$

其中 w 为弱容许幅值挠度, u 为弱容许幅值轴向位移.式(88)称为幅值二类混合变量总势能.该幅值二类混合变量总势能与势作用量的积分是等价的.并假设

$$w(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin(\alpha_m x),\qquad 0\leqslant x<l. \tag{89}$$

在式(88)中,对 $\Pi_{2\mathrm{amp}}$ 取 A_m 和 u 的变分极值,则得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{l}{2}EJ\alpha_m^4+\frac{l}{2}N\alpha_m^2-\frac{l}{2}\rho\omega^2\right]A_m-q\frac{1}{\alpha_m}[1-(-1)^m]-\right.$$
$$\left.\overline{M_0}\alpha_m+(-1)^m EJ\alpha_m^3\,\overline{w_l}\right\}\delta A_m+(N\delta u)_0^l-\int_0^l\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\delta u\mathrm{d}x=0, \tag{90}$$

应用内边界位移余功的零变分关系

$$\delta(-u_0N_0+u_lN_l)=0, \tag{91}$$

并据变分法预备定理,由式(90)可得

$$A_m=\frac{1}{m^4+m^2(N/(EJ))(l/\pi)^2-\lambda^4(l/\pi)^4}\left\{\frac{q}{EJ}\frac{2l^4}{\pi^5}\frac{1}{m}[1-(-1)^m]+\right.$$
$$\left.\frac{2\overline{M_0}l^2}{EJ}\frac{m}{\pi^3}+(-1)^{m+1}\frac{2}{\pi}m^3\,\overline{w_l}\right\},\qquad 0\leqslant x<l, \tag{92}$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{93}$$

$$u_0=0,\qquad x=0, \tag{94}$$

$$u_l=0,\qquad x=l. \tag{95}$$

将式(92)代入式(89),得

$$w(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4+m^2(N/(EJ))(l/\pi)^2-\lambda^4(l/\pi)^4}\left\{\frac{q}{EJ}\frac{2l^4}{\pi^5}\frac{1}{m}[1-(-1)^m]+\right.$$
$$\left.\frac{2\overline{M_0}l^2}{EJ}\frac{m}{\pi^3}\right\}\sin(\alpha_m x)+$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4+m^2(N/(EJ))(l/\pi)^2-\lambda^4(l/\pi)^4}(-1)^{m+1}\frac{2m^3}{\pi}\overline{w_l}\sin(\alpha_m x),$$
$$0\leqslant x<l. \tag{96}$$

据文献[20]中式(A.81),有

$$-\frac{2}{\pi}\overline{w_l}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m m^3}{m^4+(N/(EJ))m^2(l/\pi)^2-\lambda^4(l/\pi)^4}\sin(\alpha_m x)=$$
$$\frac{1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\left(\frac{\alpha_1^2\sinh(\alpha_1 x)}{\sinh(\alpha_1 l)}+\frac{\beta_1^2\sin(\beta_1 x)}{\sin(\beta_1 l)}\right)\overline{w_l}. \tag{97}$$

据文献[20]中式(A.75),有

$$\frac{2\overline{M_0}l^2}{\pi^3 EJ}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4+m^2(N/(EJ))(l/\pi)^2-\lambda^4(l/\pi)^4}\sin(\alpha_m x)=$$
$$\frac{\overline{M_0}}{EJ}\frac{1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\left[-\frac{\sinh(\alpha_1(l-x))}{\sinh(\alpha_1 l)}+\frac{\sin(\beta_1(l-x))}{\sin(\beta_1 l)}\right]. \tag{98}$$

将式(97)和式(98)代入式(96)中,则得

$$w(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4+m^2(N/(EJ))(l/\pi)^2-\lambda^4(l/\pi)^4}\frac{q}{EJ}\frac{2l^4}{\pi^3}\frac{1}{m}[1-(-1)^m]\sin(\alpha_m x)+$$
$$\frac{\overline{M_0}}{EJ}\frac{1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\left[-\frac{\sinh(\alpha_1(l-x))}{\sinh(\alpha_1 l)}+\frac{\sin(\beta_1(l-x))}{\sin(\beta_1 l)}\right]+$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\left(\frac{\alpha_1^2\sinh(\alpha_1 x)}{\sinh(\alpha_1 l)}+\frac{\beta_1^2\sin(\beta_1 x)}{\sin(\beta_1 l)}\right)\overline{w_l}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{99}$$

这里

$$\begin{cases}\alpha_1=\sqrt{\sqrt{\left(\dfrac{N}{2EJ}\right)^2+\lambda^4}+\dfrac{N}{2EJ}},\\ \beta_1=\sqrt{\sqrt{\left(\dfrac{N}{2EJ}\right)^2+\lambda^4}-\dfrac{N}{2EJ}}.\end{cases} \tag{100}$$

再根据边界条件

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}=0, \tag{101}$$

$$\frac{Nl}{EJ}=\int_0^l \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x, \tag{102}$$

$$\left[-EJ\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}x^3}+N\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right]_{x=l}=0, \tag{103}$$

可得 N,$\overline{M_0}$ 和 $\overline{w_l}$.于是问题得解.

10.2 大挠度直梁动力功的互等定理的应用

其次应用大挠度直梁动力问题的功的互等定理来求解上述问题.

取一受单位集中载荷作用的小挠度简支梁为基本系统,如图 2 所示.在图 1(c)所示幅值大挠度悬臂梁实际系统和图 2 所示小挠度简支梁基本系统之间应用功的互等定理,则得

$$w(\xi)-\frac{\xi}{l}\overline{w_l}=\int_0^l\left(q+N\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}++\rho\omega^2w\right)w_1(x,\xi)\,\mathrm{d}x+\overline{M_0}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}. \tag{104}$$

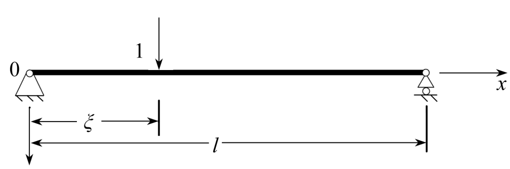

图 2 小挠度简支梁基本系统

Fig. 2 The basic system of a simply supported beam with small deflection

假设

$$w(\xi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin(\alpha_m\xi), \qquad 0\leqslant \xi < l, \tag{105}$$

$$w(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin(\alpha_m x), \qquad 0\leqslant x < l, \tag{106}$$

已知基本解为

$$w_1(x,\xi)=\frac{1}{EJ}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2l^3}{(m\pi)^4}\sin(\alpha_m x)\sin(\alpha_m\xi), \tag{107}$$

将式(105)~(107)代到式(104)中,经过计算,则得式(92).将式(92)代入式(105),再根据式(97)和式(98)进行转换,则得

$$
\begin{aligned}
w(\xi) = {} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4 + m^2(N/(EJ))(l/\pi)^2 - \lambda^4(l/\pi)^4} \frac{q}{EJ} \frac{2l^4}{\pi^3} \frac{1}{m}[1-(-1)^m]\sin(\alpha_m \xi) + \\
& \frac{\overline{M_0}}{EJ} \frac{1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\left[-\frac{\sinh(\alpha_1(l-\xi))}{\sinh(\alpha_1 l)} + \frac{\sin(\beta_1(l-\xi))}{\sin(\beta_1 l)}\right] + \\
& \frac{1}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\left(\frac{\alpha_1^2\sinh(\alpha_1\xi)}{\sinh(\alpha_1 l)} + \frac{\beta_1^2\sin(\beta_1\xi)}{\sin(\beta_1 l)}\right)\overline{w_l}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant l,
\end{aligned} \tag{108}
$$

式(108)和式(99)相同.说明了大挠度梁二类混合变量最小势作用量原理的正确性.

11 结 论

1）两个新的概念,即势作用量的概念和余作用量的概念被引入到有限位移理论弹性动力学的变分方程中.从而导出了相应理论的最小势作用量原理及驻值余作用量原理.

2）考虑位移边界条件的变化,并应用有限位移理论的功的互等定理导出了二类混合变量的最小势作用量原理.在这一原理中,位移、应力和速度都取为变分变量.结果导致运动平衡方程、力的边界条件和位移边界条件为 Euler 方程.

3）应用相似的方法,考虑到静力边界条件的变化,并应用有限位移理论的功的互等定理导出了二类混合变量的驻值余作用量原理.在这一原理中,应力、位移和速度都取为变分变量.结果导致应变-位移关系、位移边界条件和力的边界条件为 Euler 方程.

4）应用应变能密度和余能密度间的关系式于二类混合变量的势作用量和余作用量,则得三类混合变量的势作用量和余作用量,它们都是位移、应力、应变和速度的泛函.三类混合变量的势作用量对位移、应力、应变和速度取变分极值,则得应变-应力关系、运动平衡方程、静力边界条件和位移边界条件为 Euler 方程.三类混合变量的余作用量对位移、应力、应变和速度取变分驻值,则得应力-应变关系、应变-位移关系、位移边界条件和静力边界条件为 Euler 方程.

5）应用拉氏乘子法导出了广义势作用量原理和广义余作用量原理.

参考文献(References)：

[1] Bernoulli J. *New Mechanics or Statics*[M]. 1725.

[2] Lagrange J L. *Mécanique Analytique*[M]. 1788.

[3] Love A E H, M A, Sc D, et al. *The Mathematical Theory of Elasticity*[M]. New York: McGraw-Hill Book Co, 1944.

[4] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Co, 1970.

[5] Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*[M]. 2nd ed. Pergamon Press, 1975.

[6] Castigliano A. Nuova teoria intorno dellequilibrio deisistrmi elastici[J]. *Atti Acc Sci*, *Torino*, 1875.

[7] 钱令希. 余能原理[J]. 中国科学, 1950, **1**(2/4): 449-456.(TSIEN Ling-hi. Complementary energy principle[J]. *Scientia Sinica*, 1950, **1**(2/4): 449-456.(in Chinese))

[8] Reissner E. On a variational theorem in elasticity[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1950, **29**(2): 90-95.

[9] Reissner E. On variational principles in elasticity[C]//*Proceeding of Symposia in Applied*

Mathematics. McGraw Hill, 1958, **8**: 1-6.

[10] 胡海昌. 论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理[J]. 物理学报, 1954, **10**(3): 259-290.(HU Hai-chang. On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity[J]. *Acta Physica Sinica*, 1954, **10**(3): 259-290.(in Chinese))

[11] 钱伟长. 变分法及有限元法[M]. 北京: 科学出版社, 1980.(CHIEN Wei-zang. *Variational Methods and Finite Element Methods*[M]. Beijing: Science Press, 1980.(in Chinese))

[12] Tonti E. Variational principles in elastostatics[J]. *Mechanica*, 1967, **4**(2): 201-208.

[13] 何吉欢. 大位移非线弹性理论的广义变分原理[J]. 中国矿业大学学报, 1999, **28**(2): 136-138.(HE Ji-huan. Family of generalized variational principles for nonlinear elasticity with finite displacement[J]. *Journal of China University of Mining & Technology*, 1999, **28**(2): 136-138.(in Chinese))

[14] ФУ Бао-лянь. Об обобщенных вариационных принципах т ермоупругост и[J]. *Scientia Sinica*, 1964, **13**(9): 1507-1509.(FU Bao-lian. On generalized variational principles of thermo elasticity[J]. *Scientia Sinica*, 1964, **13** (9): 1507-1509.(in Russia))

[15] 付宝连. 有限位移理论线弹性力学二类和三类混合变量的变分原理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(11): 1251-1268.(FU Bao-lian. Variational principles for dual and triple mixed variables of linear elasticity with finite displacements and the application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(11): 1251-1268.(in Chinese))

[16] 付宝连. 弯曲薄板的修正的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(11): 1197-1209.(FU Bao-lian. The corrected reciprocal theorem of bending of thin plates and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(11): 1197-1209.(in Chinese))

[17] 付宝连. 三维线弹性力学修正的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(5): 523-538.(FU Bao-lian. The corrected reciprocal theorem of three dimensional linear elasticity and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 523-538.(in Chinese))

[18] 付宝连. 有限位移理论的功的互等定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(10): 1019-1034.(FU Bao-lian. The reciprocal theorems for finite displacement theory and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(10): 1019-1034.(in Chinese))

[19] Novozhilov V V. *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*[M]. New York: Graylook Press, 1955.

[20] 付宝连. 弹性力学混合变量的变分原理及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.(FU Bao-lian. *Variational Principles With Mixed Variables in Elasticity and Their Applications*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010.(in Chinese))

Principles of Minimum Potential Action and Stationary Complementary Action With Dual and Triple Mixed Variables for Linear Elastodynamics of Finite Displacement Theory and the Application

FU Bao-lian

(*College of Architectural Engineering and Mechanics*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao*, *Hebei* 066004, *P.R.China*)

Abstract: 2 new concepts, potential action and complementary action, were first introduced into the variational principles for linear elastodynamics. On the basis of the concept of potential action, the principle of minimum action (Hamilton's principle) was renamed to the principle of minimum potential action. In terms of the concept of complementary action, the principle of stationary complementary action was proposed for the first time. Next, the principles of minimum potential action and stationary complementary action with dual mixed variables of displacement and stress were derived in view of the boundary condition changes by means of the reciprocal theorem. And then, through the application of the relations between the strain energy density and the complementary energy density to the above 2 principles with dual mixed variables, the principles of potential action and complementary action with triple mixed variables of displacement, stress and strain were derived. Finally, the generalized principles of potential action and complementary action were given with the Lagrange multiplier method, in the meantime, the principle of minimum potential action with dual mixed variables of large deflection beams was applied to the calculation of a bending cantilever beam under forced vibration.

Key words: potential action; complementary action; reciprocal theorem of finite displacement theory; principle of minimum potential action with dual (triple) mixed variables; principle of stationary complementary action with dual (triple) mixed variables

引用本文/Cite this paper:

付宝连. 有限位移理论线弹性动力学二类和三类混合变量的最小势作用量原理和驻值余作用量原理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(12): 1359-1376.

FU Bao-lian. Principles of minimum potential action and stationary complementary action with dual and triple mixed variables for linear elastodynamics of finite displacement theory and the application [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(12): 1359-1376.