文章编号:1000-0887(2017)05-0526-13

非光滑半无限多目标优化问题的最优性充分条件*

杨玉红[1,2], 李 飞[1]

(1. 内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021;
2. 长江师范学院 数学与统计学院, 重庆 408100)

(我刊编委杨新民推荐)

摘要: 研究了一个非光滑半无限多目标优化问题(简记为 SIMOP),并讨论了它的最优性条件.首先, 通过对目标函数和约束函数的某种组合赋予 Clarke *F*- 凸性假设, 获得了 SIMOP(弱)有效解的最优性充分条件.接下来, 用 Chankong-Haimes 方法建立了此 SIMOP 的一个标量问题并得到了这个标量问题的最优性充分条件.

关 键 词: 半无限多目标优化; (弱)有效解; 最优性条件; Clarke *F*- 凸性

中图分类号: O221.6 **文献标志码:** A doi: 10.21656/1000-0887.380012

引 言

多目标优化问题(multiobjective optimization problem, 简记为 MOP)是指具有多个目标函数的优化问题.众所周知, 多目标优化的理论与方法在经济管理、工程设计、交通网络运输、生态保护以及数据处理等诸多领域有着广泛的应用, 已取得了丰富的研究成果,可参阅文献[1-3].鉴于多目标优化的重要性, 近年来不少学者也开始尝试研究多目标情形的半无限规划问题.半无限多目标优化问题(semi-infinite multiobjective optimization problem, 简记为 SIMOP)是指同时具有有限个目标函数和任意个(可能是无限个)约束函数的优化问题.如果只有一个目标函数, 则成为通常所说的半无限规划(semi-infinite programming, 简记为 SIP).半无限规划的理论研究已经比较成熟, 也出现了一些专门的著作,如文献[4-5].然而, 据笔者所知, 有关半无限多目标优化问题的研究却相对比较少.

近年来, 出现了一些研究半无限多目标优化问题最优性条件的文献.Caristi 等[6]提供了可微半无限多目标优化问题的一些最优性条件.Glover 等[7]获得了一个不可微凸半无限多目标优化问题的最优性条件.Chuong 和 Kim 等[8-9]研究了极限约束品性(LCQ), 并利用变分分析和广义微分的工具建立了非光滑半无限多目标优化问题关于(弱)有效解、真有效解的最优性条件和对偶理论.Kanzi 和 Nobakhtian[10]介绍了正则约束品性(RCQ), 并在 Clarke 次微分定义的

* **收稿日期:** 2017-01-10; **修订日期:** 2017-03-23
基金项目: 国家自然科学基金(11431004; 11601248)
作者简介: 杨玉红(1979—), 女, 讲师, 博士生(通讯作者. E-mail: yhyang1020@163.com);
李飞(1981—), 男, 讲师, 博士(E-mail: lifeimath@163.com).

广义凸性下获得了半无限多目标优化问题的最优性条件.Kanzi[11]推广了 Maeda 约束品性(MCQ)以及 Cottle 约束品性(CCQ),获得了非光滑半无限多目标优化问题的强 KKT 最优性必要条件,又在 Clarke 次微分定义的不变凸性下获得了强 KKT 最优性充分条件.Caristi 和 Kanzi[12]也推广了 MCQ 并获得了非光滑半无限多目标优化问题的弱/强 KKT 最优性必要条件,然后在 Clarke 次微分定义的 $\boldsymbol{\eta}$- 不变凸性下获得了最优性充分条件.Kanzi[13]则利用 CCQ 在 $\boldsymbol{\eta}$- 不变凸性下研究了不可微半无限多目标优化问题的最优性条件.最近,Piao 等[14]在 Clarke 次微分定义的广义凸性下建立了具有集合约束的非凸半无限多目标优化问题的最优性条件,同时用 Chankong-Haimes 方法建立了相应的标量问题,并获得了此标量问题的最优性条件.

经观察发现,目前为止,研究半无限多目标优化问题的大部分文献是在不变凸性下获得最优性条件.并且,设置在目标函数和约束函数上的凸性条件比较单一.此外,已有不少文献讨论了半无限多目标优化问题的最优性必要条件,但讨论最优性充分条件的文献却不是很多.受文献[14-15]的启发,笔者打算研究非光滑半无限多目标优化问题及其标量问题的最优性充分条件,并试图将凸性放宽到 F- 凸性.

1　预 备 知 识

本文使用以下符号:设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$,

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i=y_i,\qquad i=1,2,\cdots,n;$$
$$\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i,\qquad i=1,2,\cdots,n;$$
$$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i<y_i,\qquad i=1,2,\cdots,n;$$
$$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y},\qquad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y},$$

R^n 空间中的内积表示为$\langle\cdot,\cdot\rangle$.为了方便,本文使用下列参数向量集:

$$\Lambda^{+}:=\left\{\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m)\in R^m\mid\sum_{i=1}^{m}\tau_i=1,\ \tau_i\geqslant0,\ i=1,2,\cdots,m\right\};$$
$$\Lambda^{++}:=\left\{\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m)\in R^m\mid\sum_{i=1}^{m}\tau_i=1,\ \tau_i>0,\ i=1,2,\cdots,m\right\}.$$

设 $\varphi:R^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是局部 Lipschitz 函数,φ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处沿方向 $\boldsymbol{d}\in R^n$ 的 Clarke 广义方向导数[16]定义为

$$\varphi^0(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d}):=\limsup_{\substack{\boldsymbol{x}\to\bar{\boldsymbol{x}}\\ t\downarrow0}}\frac{\varphi(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{d})-\varphi(\boldsymbol{x})}{t},$$

以及 φ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的 Clarke 次微分[16]定义为

$$\partial^{c}\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}):=\{\boldsymbol{\xi}\in R^n\mid\varphi^0(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{d})\geqslant\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{d}\rangle,\ \forall\boldsymbol{d}\in R^n\}.$$

下面回顾 Clarke 次微分的一些性质.

引理 1[16]　假定 $\varphi,\psi:R^n\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是局部 Lipschitz 函数,且 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\operatorname{dom}\varphi\cap\operatorname{dom}\psi$,则以下成立:

(i) $\partial^{c}(a\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}))=a\partial^{c}\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}),\qquad\forall a\in\mathbf{R}$;

(ii)(和法则)$\partial^{c}(\varphi+\psi)(\bar{\boldsymbol{x}})\subseteq\partial^{c}\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})+\partial^{c}\psi(\bar{\boldsymbol{x}})$.

本文考虑如下非光滑半无限多目标优化问题,记为(SIMOP):

$$\text{(SIMOP)}\qquad\min f(\boldsymbol{x}):=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))$$
$$\text{s.t.}\quad g_t(\boldsymbol{x})\leqslant0,\qquad t\in T,$$

$\boldsymbol{x} \in R^n$,

其中f_i, $i \in M := \{1,2,\cdots,m\}$ 以及 g_t, $t \in T$ 是从 R^n 到 $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 的局部 Lipschitz 函数，指标集 T 是任意集合，可能是无限集(但是非空).假定(SIMOP)的可行集非空，并记为 $S := \{\boldsymbol{x} \in R^n \mid g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \forall t \in T\}$.给定一个可行解 $\boldsymbol{x} \in S$，用 $I(\boldsymbol{x})$ 表示在 $\boldsymbol{x}$ 处所有起作用约束的指标集，即 $I(\boldsymbol{x}) := \{t \in T \mid g_t(\boldsymbol{x}) = 0\}$.

定义 1[1] 称可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为(SIMOP)的有效解，如果不存在 $\boldsymbol{x} \in S$ 使得 $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$;称可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为(SIMOP)的弱有效解，如果不存在 $\boldsymbol{x} \in S$ 使得 $f(\boldsymbol{x}) < f(\bar{\boldsymbol{x}})$.

Piao 等[14]利用 Chankong-Haimes 方法建立了一个半无限多目标优化问题的标量问题，并讨论了这个半无限问题及其标量问题的最优性条件.受文献[14]的启发，本文也打算用 Chankong-Haimes 方法建立相应的标量问题，即考虑下列与(SIMOP)相对应的标量问题，记为 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$,其中 $j \in M$, $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}} \quad \min f_j(\boldsymbol{x})\\
&\text{s.t.} \quad f_k(\boldsymbol{x}) \leqslant f_k(\bar{\boldsymbol{x}}), \qquad k \in M \setminus \{j\},\\
&\qquad\quad \boldsymbol{x} \in S.
\end{aligned}$$

文献[17]的引理 3.1(另参见文献[1]的定理 4.5)已经给出了多目标优化问题和用 Chankong-Haimes 方法得到的标量问题之间解的关系刻画.由于文献[17]的这个结论与可行集的选取无关，因此这个刻画也适用于半无限多目标优化问题(SIMOP)及其标量问题 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$，具体情况见后文.

引理 2[17] 可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的有效解当且仅当对每一个 $j \in M$,$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是$(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$ 的最优解.

在研究优化问题的过程中，经常需要对所涉及的函数赋予凸性假设才能得到所需要的结果.函数的凸性研究有着非常丰富的内容，而不变凸性就是其中非常重要的一类.Hanson[18]第一个提出不变凸概念，后来被 Craven[19]正式命名为“invex”.在 Hanson 和 Craven 的工作之后，学者们从不同的角度研究不变凸性并不断地推广它，例如文献[20-23].由于本文打算研究非光滑半无限多目标优化问题，所以下面将文献[20]中的 F- 凸性推广到非光滑情形(见定义 3)，此概念基于 F 的次线性性.

定义 2[24] 令 $X \subseteq R^n$，称函数 F: $X \times X \times R^n \to \mathbf{R}$ 关于第三个变量是次线性的，如果对所有的 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in X$,

(i) $F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \leqslant F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}) + F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{y})$, $\qquad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in R^n$;

(ii) $F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; a\boldsymbol{x}) = aF(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x})$, $\qquad \forall \boldsymbol{x} \in R^n, \forall a \geqslant 0 (a \in \mathbf{R})$.

为了方便，记 $F_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; \boldsymbol{x})$.显然 $F_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}(\mathbf{0}) = 0$.

定义 3 假设 φ:$R^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 是一个局部 Lipschitz 函数，F: $X \times X \times R^n \to \mathbf{R}$ 是一个事先给定的关于第三个变量的次线性函数，X 是 R^n 的一个子集，则

(i) 称 φ 在 X 上的 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 是 Clarke F- 凸，若 $\forall \boldsymbol{y} \in X$, $\boldsymbol{\xi} \in \partial^c \varphi(\boldsymbol{x})$，有

$$\varphi(\boldsymbol{y}) - \varphi(\boldsymbol{x}) \geqslant F_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}).$$

进一步地,若对任意的 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ 有 $\varphi(\boldsymbol{y}) - \varphi(\boldsymbol{x}) > F_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi})$,则称 φ 是 Clarke 严格 F- 凸.

(ii) 称 φ 在 X 上的 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 是 Clarke F- 伪凸，若 $\forall \boldsymbol{y} \in X$, $\boldsymbol{\xi} \in \partial^c \varphi(\boldsymbol{x})$，有

$$F_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0 \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{y}) \geqslant \varphi(\boldsymbol{x}).$$

进一步地,若对任意的 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$,有 $F_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}) \geqslant 0 \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{y}) > \varphi(\boldsymbol{x})$，则称 φ 是 Clarke 严格 F- 伪凸.

(iii) 称 φ 在 X 上的 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 是 Clarke F- 拟凸，若 $\forall \boldsymbol{y} \in X$, $\boldsymbol{\xi} \in \partial^c \varphi(\boldsymbol{x})$，有

$\varphi(\boldsymbol{y}) \leqslant \varphi(\boldsymbol{x}) \Rightarrow F_{y,x}(\boldsymbol{\xi}) \leqslant 0.$

由 Clarke F- 凸性的定义易知，Clarke F- 凸同时蕴含 Clarke F- 伪凸和 Clarke F- 拟凸.并且还容易看出：

（a）设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为非负实数，如果 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 是 Clarke F- 凸，那么 $\sum_{i=1}^{m} a_i\varphi_i$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 也是 Clarke F- 凸.进一步地，如果 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 是 Clarke 严格 F- 凸且 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 不全为 0，那么 $\sum_{i=1}^{m} a_i\varphi_i$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 也是 Clarke 严格 F- 凸的.

（b）设 a 为非负实数，如果 φ_1 和 φ_2 在 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 是 Clarke F- 伪凸 / F- 拟凸，那么 $a\varphi_1$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 是 Clarke F- 伪凸 / F- 拟凸，然而 $\varphi_1 + \varphi_2$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处关于 F 却未必是 Clarke F- 伪凸 / F- 拟凸的.

在定义 3 中，如果取 $F_{y,x}(\cdot) = \langle \cdot, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \rangle$，则称 φ 为 Clarke（严格）不变凸、Clarke（严格）不变伪凸、Clarke 不变拟凸，其中 $\boldsymbol{\eta}: X \times X \to R^n$ 是一个事先给定的向量值函数.如果取 $F_{y,x}(\cdot) = \langle \cdot, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle$，则称 φ 为 Clarke（严格）凸、Clarke（严格）伪凸、Clarke 拟凸.为了精简文字叙述，本文余下部分将略去“Clarke”一词，在给定次线性函数 F 后，本文也会省略“关于 F”一词.

2　（SIMOP）的最优性充分条件

研究一个优化问题的最优性条件时，通常会从必要条件和充分条件两个方面来研究.众所周知，在研究最优性必要条件时，往往需要一定的约束品性来确保 KKT 条件成立，从而获得最优性条件.在引言中已经提到不少的约束品性，再加之本文重点关注最优性充分条件，所以不打算过多阐述半无限多目标优化问题的约束品性和最优性必要条件，有兴趣的读者可以参阅文献[8-10,13,25].下面，仅罗列一个最新文献里的最优性必要条件结论（文献[14]中的定理 3.3，且将此文献中的集合约束去掉）.

命题 1[14]　设 $\boldsymbol{z}$ 是（SIMOP）的有效解.如果存在 $j \in M$ 使得条件（$\mathscr{A}_j$）（文献[14]中定义的约束品性）对 $\boldsymbol{z}$ 成立，则存在 $\tau_i \geqslant 0, i \in M$, $\sum_{i \in M} \tau_i = 1$ 和 $\boldsymbol{\lambda} \in R_+^{(T)}$ 使得下列广义 KKT 条件成立：

$$\boldsymbol{0} \in \sum_{i \in M} \tau_i \partial^c f_i(\boldsymbol{z}) + \sum_{t \in T} \lambda_t \partial^c g_t(\boldsymbol{z}),\ \lambda_t g_t(\boldsymbol{z}) = 0, \qquad \forall t \in T, \tag{1}$$

其中 $R_+^{(T)} := \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_t)_{t \in T} \mid \lambda_t \geqslant 0, \forall t \in T$，但只有有限个 $\lambda_t \neq 0\}$.

一般来说，为了建立最优性充分条件，需要对目标函数和约束函数赋予一定的凸性条件.大部分已有研究半无限的文献中，约束函数部分的凸性条件是加在所有约束函数 g_t（即对所有 $t \in T$ 而言）上面的.然而，如果在式(1)中有某个 $\lambda_{\hat{t}} = 0$，则可以从式(1)中去掉 $\hat{t}$ 这一项.实际上，这些项 $\hat{t}$ 在 KKT 条件中并不真正存在，对应的约束函数 $g_{\hat{t}}$ 即使不具有凸性也不会影响本文的证明.因此，仅考虑满足 $\lambda_t \neq 0$ 的这些项 t，并只给对应的约束函数 g_t 赋予凸性假设.设 $\boldsymbol{\lambda} \in R_+^{(T)}$ 即有 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_t)_{t \in T}$，相应于向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的支撑集（supporting set）定义为 $T(\boldsymbol{\lambda}) := \{t \in T \mid \lambda_t \neq 0\}$.另外，本节均假定 F：$R^n \times R^n \times R^n \to \mathbf{R}$ 是一个给定的关于第三个变量的次线性函数.

定理 1　设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in S$ 是（SIMOP）的一个可行解：

1）如果存在 $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^+$ 以及 $\boldsymbol{\lambda} \in R_+^{(T)}$ 使得

$$\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0, \qquad \forall t \in T(\boldsymbol{\lambda}), \tag{2}$$

并且使得下列陈述之一成立，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的有效解.

(i) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 f_i, $i \in M$ 是严格 F-伪凸且 g_t, $t \in T(\boldsymbol{\lambda})$ 是 F-拟凸.并且

$$\boldsymbol{0} \in \sum_{i\in M} \tau_i \partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t \partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{3}$$

(ii) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 $\sum_{i\in M} \tau_i f_i$ 是严格 F-伪凸且 g_t, $t \in T(\boldsymbol{\lambda})$ 是 F-拟凸.并且

$$\boldsymbol{0} \in \partial^c \left(\sum_{i\in M} \tau_i f_i\right)(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t \partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{4}$$

(iii) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 f_i, $i \in M$ 是严格 F-伪凸且 $\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t$ 是 F-拟凸.并且

$$\boldsymbol{0} \in \sum_{i\in M} \tau_i \partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \partial^c \left(\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t\right)(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{5}$$

(iv) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 $\sum_{i\in M} \tau_i f_i$ 是严格 F-伪凸且 $\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t$ 是 F-拟凸.并且

$$\boldsymbol{0} \in \partial^c \left(\sum_{i\in M} \tau_i f_i\right)(\bar{\boldsymbol{x}}) + \partial^c \left(\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t\right)(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{6}$$

(v) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 $\sum_{i\in M} \tau_i f_i + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t$ 是严格 F-伪凸.并且

$$\boldsymbol{0} \in \partial^c \left(\sum_{i\in M} \tau_i f_i + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t\right)(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{7}$$

2) 如果将 1) 中陈述(i)和(iii)的严格 F-伪凸换成 F-凸，陈述(ii),(iv)和(v)的严格 F-伪凸减弱为 F-伪凸，并且 $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^{++}$，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 也是(SIMOP)的有效解.

3) 如果将 1) 中所有“严格”去掉，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的弱有效解.

证明 1) 反证法.

假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是(SIMOP)的有效解，则存在 $\boldsymbol{x} \in S$ 使得 $f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$，即

$$f_i(\boldsymbol{x}) \leqslant f_i(\bar{\boldsymbol{x}}), \qquad \forall i \in M, \ \exists i_0 \in M, f_{i_0}(\boldsymbol{x}) < f_{i_0}(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{8}$$

显然，$\boldsymbol{x} \neq \bar{\boldsymbol{x}}$.

(i) 根据式(3)，存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_i \in \partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}})(i \in M)$ 及 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \in \partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t \in T(\boldsymbol{\lambda}))$ 使得 $\sum_{i\in M} \tau_i \hat{\boldsymbol{\xi}}_i + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_t = \boldsymbol{0}$.进而

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\left(\sum_{i\in M} \tau_i \hat{\boldsymbol{\xi}}_i + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\right) = F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{0}) = 0. \tag{9}$$

结合 $\boldsymbol{x}$ 的可行性和 λ_t 的非负性，由式(2)得 $\lambda_t g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 = \lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}})$，$\forall t \in T(\boldsymbol{\lambda})$.注意到 $t \in T(\boldsymbol{\lambda})$，则 $t \in T$ 且 $\lambda_t > 0$.因此,$g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant g_t(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\forall t \in T(\boldsymbol{\lambda})$.因为 g_t, $t \in T(\boldsymbol{\lambda})$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F-拟凸，则 $F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}_t) \leqslant 0$, $\forall \boldsymbol{\eta}_t \in \partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t \in T(\boldsymbol{\lambda}))$.再由 λ_t 的非负性得

$$\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}_t) \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{\eta}_t \in \partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t \in T(\boldsymbol{\lambda})). \tag{10}$$

另一方面，因为 f_i, $i \in M$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 F-伪凸，由式(8)得

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}_i) < 0, \qquad \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}})(i \in M). \tag{11}$$

用 $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^+$ 乘以式(11)得

$$\sum_{i\in M} \tau_i F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}_i) < 0, \qquad \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}})(i \in M). \tag{12}$$

所以，由 F 的次线性性以及式(10)和(12)得

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\left(\sum_{i\in M} \tau_i \boldsymbol{\xi}_i + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t \boldsymbol{\eta}_t\right) \leqslant \sum_{i\in M} \tau_i F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}_i) + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}_t) < 0,$$

$$\forall \boldsymbol{\xi}_i \in \partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}})(i \in M),\ \forall \boldsymbol{\eta}_t \in \partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t \in T(\boldsymbol{\lambda})),$$

此与式(9)相矛盾.

(ii) 令 $\varphi = \sum_{i \in M} \tau_i f_i$. 根据式(4), 存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}} \in \partial^c \varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$ 和 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t \in \partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t \in T(\boldsymbol{\lambda}))$ 使得 $\hat{\boldsymbol{\xi}} + \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_t = \mathbf{0}$. 进而

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}} + \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t \hat{\boldsymbol{\eta}}_t\right) = F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\mathbf{0}) = 0. \tag{13}$$

由于此时加在约束函数上的凸性条件与陈述(i)一样, 故同样可以得到(i)中的式(10). 用 $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^+$ 乘以式(8)得

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in M} \tau_i f_i(\boldsymbol{x}) \leqslant \sum_{i \in M} \tau_i f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = \varphi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{14}$$

因为 $\varphi = \sum_{i \in M} \tau_i f_i$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 F- 伪凸, 则

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}) < 0, \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^c \varphi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{15}$$

于是, 由 F 的次线性性以及式(10)和(15)得

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\left(\boldsymbol{\xi} + \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t \boldsymbol{\eta}_t\right) \leqslant F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}_t) < 0,$$

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^c \varphi(\bar{\boldsymbol{x}}),\ \forall \boldsymbol{\eta}_t \in \partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t \in T(\boldsymbol{\lambda})),$$

此与式(13)相矛盾.

(iii) 令 $\psi = \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t$. 根据式(5), 存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_i \in \partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}})(i \in M)$ 及 $\hat{\boldsymbol{\eta}} \in \partial^c \psi(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得

$$\sum_{i \in M} \tau_i \hat{\boldsymbol{\xi}}_i + \hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}.$$

进而

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\left(\sum_{i \in M} \tau_i \hat{\boldsymbol{\xi}}_i + \hat{\boldsymbol{\eta}}\right) = F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\mathbf{0}) = 0. \tag{16}$$

基于 $\boldsymbol{x}$ 的可行性与 λ_t 的非负性, 由式(2)可得

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 = \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}}) = \psi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{17}$$

因为 $\psi = \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F- 拟凸, 则

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}) \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in \partial^c \psi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{18}$$

由于此时加在目标函数上的凸性条件与陈述(i)一样, 故同样可以得到(i)中的式(12). 所以, 由 F 的次线性性以及式(12)和(18)可得

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\left(\sum_{i \in M} \tau_i \boldsymbol{\xi}_i + \boldsymbol{\eta}\right) \leqslant \sum_{i \in M} \tau_i F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}_i) + F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}) < 0,$$

$$\forall \boldsymbol{\xi}_i \in \partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}})(i \in M), \forall \boldsymbol{\eta} \in \partial^c \psi(\bar{\boldsymbol{x}}),$$

此与式(16)相矛盾.

(iv) 令 $\varphi = \sum_{i \in M} \tau_i f_i$ 及 $\psi = \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t$. 根据式(6), 存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}} \in \partial^c \varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$ 及 $\hat{\boldsymbol{\eta}} \in \partial^c \psi(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得 $\mathbf{0} = \hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}$. 进而

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}) = F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\mathbf{0}) = 0. \tag{19}$$

由于此时加在目标函数上的凸性条件与陈述(ii)一样, 加在约束函数上的凸性条件与陈述(iii)一样, 因此重复(ii)中式(14)到(15)以及(iii)中式(17)到(18)的推导过程, 也会得到

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}) < 0, \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^c \varphi(\bar{\boldsymbol{x}});\quad F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}) \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{\eta} \in \partial^c \psi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{20}$$

因此，由 F 的次线性性以及式(20)可得

$$F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}) \leqslant F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\xi}) + F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\eta}) < 0, \qquad \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^{c}\varphi(\bar{\boldsymbol{x}}), \ \forall \boldsymbol{\eta} \in \partial^{c}\psi(\bar{\boldsymbol{x}}),$$

此与式(19)相矛盾.

(v) 令 $\Phi = \sum_{i\in M}\tau_i f_i + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$，则式(7)蕴含

$$\mathbf{0} \in \partial^{c}\Phi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{21}$$

由(ii)中的式(14)和(iii)中的式(17)得

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in M}\tau_i f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant \sum_{i\in M}\tau_i f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}}) = \Phi(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

因为 $\Phi = \sum_{i\in M}\tau_i f_i + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 F- 伪凸，则

$$F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\zeta}) < 0, \qquad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \partial^{c}\Phi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{22}$$

基于式(21)和(22)，得 $0 = F_{x,\bar{x}}(\mathbf{0}) < 0$，这不可能.

综上，在 1)的条件下可得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的有效解.

2）既然此时加在约束函数上的条件与 1)一样，所以主要处理目标函数部分.又由于陈述(i)和(iii)(分别地，陈述(ii)和(iv))加在目标函数上的条件相同，故只需证明(i)，(ii)和(v)即可.

(i) 参考 1)中(i)的证明，为了导出矛盾只需得到式(12).因为 f_i，$i \in M$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F- 凸，故

$$f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) \geqslant F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\xi}_i), \qquad \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \partial^{c} f_i(\bar{\boldsymbol{x}})\,(i \in M). \tag{23}$$

由式(8)和(23)得

$$F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\xi}_i) \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \partial^{c} f_i(\bar{\boldsymbol{x}}),\ \forall i \in M;\ \exists i_0 \in M,\ F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\xi}_{i_0}) < 0. \tag{24}$$

用 $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^{++}$ 乘以式(24) 可得 $\sum_{i\in M}\tau_i F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\xi}_i) < 0, \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \partial^{c} f_i(\bar{\boldsymbol{x}})\,(i \in M)$，即得式(12).

余下部分略.

(ii) 参考 1)中(ii)的证明，为了导出矛盾只需得到式(15).用 $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda^{++}$ 乘以式(8)得

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in M}\tau_i f_i(\boldsymbol{x}) < \sum_{i\in M}\tau_i f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = \varphi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{25}$$

由于 $\varphi = \sum_{i\in M}\tau_i f_i$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F- 伪凸，则 $F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\xi}) < 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \partial^{c}\varphi(\bar{\boldsymbol{x}})$，即得式(15).

余下部分略.

(v) 参考 1)中(v)的证明，为了导出矛盾只需得到式(22).由 $\boldsymbol{x}$ 的可行性及 λ_t 的非负性，由式(2)得

$$\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{26}$$

因此，由式(25)和(26)可得

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in M}\tau_i f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x}) < \sum_{i\in M}\tau_i f_i(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}}) = \Phi(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

因为 $\Phi = \sum_{i\in M}\tau_i f_i + \sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 F- 伪凸，则 $F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\zeta}) < 0, \forall \boldsymbol{\zeta} \in \partial^{c}\Phi(\bar{\boldsymbol{x}})$，即得式(22).

余下部分略.

综上，在 2)的条件下可得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的有效解.

3）与 2)类似，主要处理目标函数部分并且只需证明(i)，(ii)和(v).相反地，假设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 不是(SIMOP)的弱有效解，则存在 $\boldsymbol{x} \in S$ 使得

$$f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\bar{\boldsymbol{x}}), \qquad \forall i \in M. \tag{27}$$

(i) 参照 1)中(i)的证明，为了导出矛盾只需得到式(11).因为 f_i，$i \in M$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F- 伪凸，

由式(27)得 $F_{x,\bar{x}}(\boldsymbol{\xi}_i)<0,\forall \boldsymbol{\xi}_i\in\partial^c f_i(\bar{\boldsymbol{x}})(i\in M)$，即得式(11).

余下部分略.

(ii)/(V) 参照 2)中(ii)/(V)的证明，为了导出矛盾只需得到式(25).用 $\boldsymbol{\tau}\in\Lambda^+$ 乘以式(27)得 $\sum_{i\in M}\tau_i f_i(\boldsymbol{x})<\sum_{i\in M}\tau_i f_i(\bar{\boldsymbol{x}})$，即得式(25).

余下部分略.

综上，在 3)的条件下可得 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的弱有效解.证毕.

注 1 一般来说，在讨论最优性条件时(例如文献[8-10,12-13])通常选用式(3)(又称为对偶可行性条件)作为 KKT 条件的一部分.然而，本文却在定理 1 中采用不同形式的对偶可行性条件.一方面，既然 F-伪凸(F-拟凸)的非负线性组合不必是 F-伪凸(F-拟凸)，反过来同样也不成立，因此定理 1 的陈述(i)~(V)中的凸性不可比较，也没有必然联系.从而，为了完成证明，陈述(i)~(V)中不同的凸性条件就需要设置不同的对偶可行性条件.另一方面，由于引理 1 中 Clarke 次微分和法则的反向包含关系一般不成立，所以式(3)~(7)之间是有差别的.一般而言，它们并不能相互替代，当然式(7)是里面最强的一个.总之，定理 1 的 5 个陈述彼此不同且相互独立.本文余下部分，如果再遇到类似情况，将不再解释.

推论 1 设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in S$ 是(SIMOP)的一个可行解.

1) 如果存在 $\boldsymbol{\tau}\in\Lambda^+$ 及 $\boldsymbol{\lambda}\in R_+^{(T)}$ 使得式(2)和(7)成立，且使得下列陈述之一成立，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的有效解.

(i) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 f_i，$i\in M$ 是严格 F-凸且 g_t，$t\in T(\boldsymbol{\lambda})$ 是 F-凸.

(ii) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 $\sum_{i\in M}\tau_i f_i$ 是严格 F-凸且 g_t，$t\in T(\boldsymbol{\lambda})$ 是 F-凸.

(iii) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 f_i，$i\in M$ 是严格 F-凸且 $\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 是 F-凸.

(iv) 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 $\sum_{i\in M}\tau_i f_i$ 是严格 F-凸且 $\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 是 F-凸.

(V) $\sum_{i\in M}\tau_i f_i+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是严格 F-凸的.

2) 若将 1)中所有“严格”去掉，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的弱有效解.进一步地，若 $\boldsymbol{\tau}\in\Lambda^{++}$，则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是(SIMOP)的有效解.

注 2 实际上，基于 F-凸的特殊性，推论 1 中 5 个陈述的凸性有着蕴含关系(用项目符号来简单代替凸性条件)：(i)⇒(ii)和(iii),(ii)⇒(iv)⇒(V),(iii)⇒(iv)⇒(V).因此，只需证明推论 1 的(V)即可.然而，(严格)F-凸性蕴含(严格)F-伪凸性，所以这个推论可以直接由定理 1 得到.

3 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{x}}$ 的最优性充分条件

如果在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处定理 1 中 1)或 2)的假设条件成立，那么 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 就是(SIMOP)的有效解.因此，根据引理 2 可得，对每一个 $j\in M$，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{x}}$ 的最优解.也就是说定理 1 中 1)或 2)的假设条件是“对每一个 $j\in M$，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{x}}$ 的最优解”的一个充分条件.然而，如果只想得到“对某一个给定的 $j\in M$，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{x}}$ 的最优解”的话，定理 1 中 1)或 2)的假设条件就强了一点.这样一来，就需要改变 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的条件设置.参照定理 1 的证明，对一个给定的 $j\in M$，给出“$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{x}}$ 的最优解”的另一个充分条件，见下.本节均假定 $F:R^n\times R^n\times R^n\to\mathbf{R}$ 是一个给定的关于第三个变量的次线性函数.

定理 2 给定 $j\in M$，$\bar{\boldsymbol{x}}\in S$，假设 f_j 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 F-伪凸.如果存在 $\tau_k\geqslant 0,k\in M\backslash\{j\}$ 以及 $\boldsymbol{\lambda}\in R_+^{(T)}$ 使得

$$\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}})=0,\qquad \forall t\in T(\boldsymbol{\lambda}).\tag{28}$$

并且使得下列陈述之一成立：

(i) $f_k,\ k\in M\setminus\{j\}$ 和 $g_t,\ t\in T(\boldsymbol{\lambda})$ 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F-拟凸.并且

$$\mathbf{0}\in\partial^{c}f_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k\,\partial^{c}f_k(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t\,\partial^{c}g_t(\bar{\boldsymbol{x}}).\tag{29}$$

(ii) $\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k$ 和 $g_t,\ t\in T(\boldsymbol{\lambda})$ 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F-拟凸.并且

$$\mathbf{0}\in\partial^{c}f_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\partial^{c}\Big(\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k\Big)(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t\,\partial^{c}g_t(\bar{\boldsymbol{x}}).\tag{30}$$

(iii) $f_k,\ k\in M\setminus\{j\}$ 和 $\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F-拟凸.并且

$$\mathbf{0}\in\partial^{c}f_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k\partial^{c}f_k(\bar{\boldsymbol{x}})+\partial^{c}\Big(\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t\Big)(\bar{\boldsymbol{x}}).\tag{31}$$

(iv) $\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k$ 和 $\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F-拟凸.并且

$$\mathbf{0}\in\partial^{c}f_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\partial^{c}\Big(\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k\Big)(\bar{\boldsymbol{x}})+\partial^{c}\Big(\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t\Big)(\bar{\boldsymbol{x}}).\tag{32}$$

(v) $\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 在 S 上的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F-拟凸.并且

$$\mathbf{0}\in\partial^{c}f_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\partial^{c}\Big(\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t\Big)(\bar{\boldsymbol{x}}).\tag{33}$$

则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$ 的最优解.

证明 设 $\boldsymbol{x}$ 是 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$ 的任意一个可行解，则有

$$\boldsymbol{x}\in S,\ f_k(\boldsymbol{x})\leqslant f_k(\bar{\boldsymbol{x}}),\qquad k\in M\setminus\{j\}.\tag{34}$$

(i) 根据式(29)，存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^{c}f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$，$\hat{\boldsymbol{\xi}}_k\in\partial^{c}f_k(\bar{\boldsymbol{x}})(k\in M\setminus\{j\})$ 及 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\in\partial^{c}g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t\in T(\boldsymbol{\lambda}))$ 使得 $\mathbf{0}=\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k\hat{\boldsymbol{\xi}}_k+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t\hat{\boldsymbol{\eta}}_t$.进而，由 F 的次线性性可得

$$\begin{aligned}0=F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\Big(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k\hat{\boldsymbol{\xi}}_k+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\Big)\leqslant\\ F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)+\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_k)+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t).\end{aligned}\tag{35}$$

因为 $f_k,k\in M\setminus\{j\}$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处 F-拟凸，由式(34)得 $F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}_k)\leqslant 0,\forall\boldsymbol{\xi}_k\in\partial^{c}f_k(\bar{\boldsymbol{x}})(k\in M\setminus\{j\})$.进而由 $\tau_k\geqslant 0(k\in M\setminus\{j\})$ 得

$$\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi}_k)\leqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{\xi}_k\in\partial^{c}f_k(\bar{\boldsymbol{x}})(k\in M\setminus\{j\}).\tag{36}$$

由于 $\boldsymbol{x}\in S$ 及 $\lambda_t\geqslant 0(t\in T)$，由式(28)得 $\lambda_t g_t(\boldsymbol{x})\leqslant 0=\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}}),\forall t\in T(\boldsymbol{\lambda})$.注意到 $t\in T(\boldsymbol{\lambda})$，则 $t\in T$ 且 $\lambda_t>0$.因此，$g_t(\boldsymbol{x})\leqslant g_t(\bar{\boldsymbol{x}}),\forall t\in T(\boldsymbol{\lambda})$.因为 $g_t,\ t\in T(\boldsymbol{\lambda})$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F-拟凸，则 $F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}_t)\leqslant 0,\forall\boldsymbol{\eta}_t\in\partial^{c}g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t\in T(\boldsymbol{\lambda}))$.再由 λ_t 的非负性可得

$$\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta}_t)\leqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{\eta}_t\in\partial^{c}g_t(\bar{\boldsymbol{x}})(t\in T(\boldsymbol{\lambda})).\tag{37}$$

结合式(35)、(36)和(37)可得

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)\geqslant 0,\qquad\hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^{c}f_j(\bar{\boldsymbol{x}}).\tag{38}$$

因此，基于 f_j 的 F-伪凸性可得 $f_j(\boldsymbol{x})\geqslant f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$.注意到 $\boldsymbol{x}$ 是 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$ 的任意可行解，所以 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 $(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$ 的最优解.

参照(i)的证明，只需得到式(38)即可.因而，当证明(ii)~(v)时，将略去(i)中式(38)之后的

证明内容.

(ii) 令 $\tilde{\varphi}=\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k$. 根据式(30), 存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^c f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}\in\partial^c\tilde{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 以及 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\in\partial^c g_t(\bar{\boldsymbol{x}})$ $(t\in T(\boldsymbol{\lambda}))$ 使得 $\mathbf{0}=\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\hat{\boldsymbol{\xi}}+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t\hat{\boldsymbol{\eta}}_t$. 进而, 由 F 的次线性性可得

$$0=F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\hat{\boldsymbol{\xi}}+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t\hat{\boldsymbol{\eta}}_t\right)\leqslant F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)+F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}})+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_t). \tag{39}$$

由式(34)和 $\tau_k\geqslant 0, k\in M\setminus\{j\}$ 可得

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x})=\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k(\boldsymbol{x})\leqslant\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k(\bar{\boldsymbol{x}})=\tilde{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{40}$$

因为 $\tilde{\varphi}=\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F- 拟凸, 则

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi})\leqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{\xi}\in\partial^c\tilde{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{41}$$

由于此时加在约束函数上的凸性条件与陈述(i)一样, 故同样可得到(i)中的式(37). 结合式(37)、(39)和(41)可得 $F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)\geqslant 0, \hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^c f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, 即得式(38).

(iii) 令 $\psi=\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$. 根据式(31), 存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^c f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_k\in\partial^c f_k(\bar{\boldsymbol{x}})$ $(k\in M\setminus\{j\})$ 以及 $\hat{\boldsymbol{\eta}}\in\partial^c\psi(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得 $\mathbf{0}=\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k\hat{\boldsymbol{\xi}}_k+\hat{\boldsymbol{\eta}}$. 进而, 由 F 的次线性性可得

$$\begin{aligned}0=F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}\left(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k\hat{\boldsymbol{\xi}}_k+\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)\leqslant\\ F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)+\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_k)+F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}).\end{aligned} \tag{42}$$

由于此时加在目标函数 f_k, $k\in M\setminus\{j\}$ 上的凸性条件与陈述(i)一样, 故同样可以得到(i)中的式(36). 另一方面, 由于 $\boldsymbol{x}\in S$ 及 $\lambda_t\geqslant 0(t\in T)$, 由式(28)得

$$\psi(\boldsymbol{x})=\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x})\leqslant\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}})=\psi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{43}$$

因为 $\psi=\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F- 拟凸, 则

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta})\leqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{\eta}\in\partial^c\psi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{44}$$

结合式(36)、(42)和(44)可得 $F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)\geqslant 0, \hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^c f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, 即得式(38).

(iv) 令 $\tilde{\varphi}=\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_i f_i$ 以及 $\psi=\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$. 根据式(32), 存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^c f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}\in\partial^c\tilde{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 及 $\hat{\boldsymbol{\eta}}\in\partial^c\psi(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得 $\mathbf{0}=\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\hat{\boldsymbol{\xi}}+\hat{\boldsymbol{\eta}}$. 进而, 由 F 的次线性性可得

$$0=F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\hat{\boldsymbol{\xi}}+\hat{\boldsymbol{\eta}})\leqslant F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)+F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}})+F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\eta}}). \tag{45}$$

此时加在目标函数 f_k, $k\in M\setminus\{j\}$ 上的凸性条件与陈述(ii)一样, 加在约束函数上的凸性条件与陈述(iii)一样, 因此重复(ii)中式(40)、(41)以及(iii)中式(43)、(44)的推导过程, 也会得到

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\xi})\leqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{\xi}\in\partial^c\tilde{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}});\quad F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\eta})\leqslant 0,\qquad\forall\boldsymbol{\eta}\in\partial^c\psi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{46}$$

由式(45)和(46)可得 $F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)\geqslant 0$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^c f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$, 即得式(38).

(v) 令 $\tilde{\Phi}=\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t$. 根据式(33), 存在 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j\in\partial^c f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$ 及 $\hat{\boldsymbol{\zeta}}\in\partial^c\tilde{\Phi}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得 $\mathbf{0}=\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\hat{\boldsymbol{\zeta}}$. 进而, 由 F 的次线性性可得

$$0=F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j+\hat{\boldsymbol{\zeta}})\leqslant F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j)+F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}). \tag{47}$$

由(ii)中的式(40)及(iii)中的式(43)得

$$\tilde{\Phi}(\boldsymbol{x})=\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k(\boldsymbol{x})+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\boldsymbol{x})\leqslant\sum_{k\in M\setminus\{j\}}\tau_k f_k(\bar{\boldsymbol{x}})+\sum_{t\in T(\boldsymbol{\lambda})}\lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}})=\tilde{\Phi}(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

因为 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \sum_{k \in M \setminus \{j\}} \tau_k f_k + \sum_{t \in T(\boldsymbol{\lambda})} \lambda_t g_t$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 F- 拟凸，则

$$F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\boldsymbol{\zeta}) \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \partial^c \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{48}$$

由式(47)和(48)得 $F_{\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}_j) \geqslant 0$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j \in \partial^c f_j(\bar{\boldsymbol{x}})$，即得式(38).综上可得，$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是$(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$ 的最优解.
证毕.

4 结　　语

本文通过在目标函数和约束函数的某种组合上赋予 Clarke F- 凸性假设，获得了一个非光滑半无限多目标优化问题的最优性充分条件.接下来利用类似的手法，获得了与这个半无限多目标优化问题相对应的标量问题的最优性充分条件.此外，本文的所有定理和推论在 Clarke 不变凸、Clarke 不变伪凸和 Clarke 不变拟凸(相应的，Clarke 凸、Clarke 伪凸和 Clarke 拟凸)相对应情形下也成立.实际上,上面的所有定理和推论的证明与次线性函数“F”的选取无关.如果在这些定理和推论的证明中将“$F_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}}(\cdot)$”用“$\langle \cdot, \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \rangle$”代替(相应的，用“$\langle \cdot, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} \rangle$”代替)，那么相应的证明依然成立.从这个角度可以看出，本文的一些结论推广了某些文献在 Clarke 不变凸性/Clarke 凸性条件下的相关结果.

注 3　如果不考虑集合约束的话，本文定理 1 中 1)的(iv)对应的结论包含了文献[14]中定理 3.4 的结论.同时，文献[14]中定理 3.2 可以看作是本文定理 2 中(i)的特例.而且，本文的定理 2 还提供了比文献[14]更多的充分条件来确保$(\mathrm{SP})_{j,\bar{\boldsymbol{x}}}$ 的最优性.本文推论 1 中(i)对应的结论包含了文献[11]中定理 6 的结论.如果不考虑集合约束和等式约束并且从普通多目标优化(MOP)的角度来看的话，本文定理 1 中 2)的(iv)对应的结论包含了文献[15]中定理 4.8 的结论.

注 4　如果将本文所有定理和推论中的 $T(\boldsymbol{\lambda})$ 用 $I(\bar{\boldsymbol{x}})$ 代替,并将“互补条件”(2)即式(28)去掉,相应的结论同样成立.事实上,当 $t \in I(\bar{\boldsymbol{x}})$ 时,$g_t(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$.从而,对任意的可行解 $\boldsymbol{x}$，有 $g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 = g_t(\bar{\boldsymbol{x}})$, $\forall t \in I(\bar{\boldsymbol{x}})$.而且，基于 λ_t 的非负性，又可以得到 $\sum_{t \in I(\bar{\boldsymbol{x}})} \lambda_t g_t(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 = \sum_{t \in I(\bar{\boldsymbol{x}})} \lambda_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}})$.而这两个式子恰好是本文的定理和推论的证明所需.

参考文献(References)：

[1] Ehrgott M. *Multicriteria Optimization*[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 2005.

[2] Jahn J. *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions*[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

[3] 戎卫东，杨新民. 向量优化及其若干进展[J]. 运筹学学报，2014，**18**(1)：9-38.(RONG Wei-dong, YANG Xin-min. Vector optimization and its developments[J]. *Operations Research Transactions*, 2014, **18**(1): 9-38.(in Chinese))

[4] Goberna M A, López M A. *Linear Semi-Infinite Optimization*[M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1998.

[5] Reemtsen R, Rückmann J-J. *Semi-Infinite Programming*[M]. Dordrecht: Springer Science, 1998.

[6] Caristi G, Ferrara M, Ştefănescu A. Semi-infinite multiobjective programming with generalized invexity[J]. *Mathematical Reports*, 2010, **12**(62): 217-233.

[7] Glover B M, Jeyakumar V, Rubinov A M. Dual conditions characterizing optimality for convex multi-objective programs[J]. *Mathematical Programming*, 1999, **84**(1): 201-217.

[8] Chuong T D, Kim D S. Nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2014, **160**(3): 748-762.

[9] Chuong T D, Yao J C. Isolated and proper efficiencies in semi-infinite vector optimization problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2014, **162**(2): 447-462.

[10] Kanzi N, Nobakhtian S. Optimality conditions for nonsmooth semi-infinite multiobjective programming[J]. *Optimization Letters*, 2014, **8**(4): 1517-1528.

[11] Kanzi N. On strong KKT optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming problems with Lipschitzian data[J]. *Optimization Letters*, 2015, **9**(6): 1121-1129.

[12] Caristi G, Kanzi N. Karush-Kuhn-Tuker type conditions for optimality of non-smooth multiobjective semi-infinite programming[J]. *International Journal of Mathematical Analysis*, 2015, **9**(39): 1929-1938.

[13] Kanzi N. Karush-Kuhn-Tucker types optimality conditions for non-smooth semi-infinite vector optimization problems[J]. *Journal of Mathematical Extension*, 2015, **9**(4): 45-56.

[14] Piao G R, Jiao L G, Kim D S. Optimality conditions in nonconvex semi-infinite multiobjective optimization[J]. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2016, **17**(1): 167-175.

[15] Golestani M, Nobakhtian S. Nonsmooth multiobjective programming: strong Kuhn-Tucker conditions[J]. *Positivity*, 2013, **17**(3): 711-732.

[16] Clarke F H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*[M]. Philadelphia: SIAM, 1990.

[17] Kanniapan P. Necessary conditions for optimality of nondifferentiable convex multiobjective programming[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1983, **40**(2): 167-174.

[18] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucher conditions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, **80**(2): 545-550.

[19] Craven D. Invex functions and constrained local minima[J]. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1981, **24**(3): 357-366.

[20] Hanson M A, Mond B. Further generalization of convexity in mathematical programming[J]. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 1982, **3**(1): 25-32.

[21] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Generalized invexity and generalized invariant monotonicity [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2003, **117**(3): 607-625.

[22] 彭再云, 汪达成. 强预不变凸函数的新性质及应用[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2008, **27**(5): 839-842. (PENG Zai-yun, WANG Da-cheng. New characteristics and application of strictly pre-invex functions[J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University (Natural Science)*, 2008, **27**(5): 839-842.(in Chinese))

[23] 彭再云, 李永红. 半严格-*G*-半预不变凸性与最优化[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(8): 836-845.(PENG Zai-yun, LI Yong-hong. Semistrict-*G*-semi-preinvexity and optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(8): 836-845.(in Chinese))

[24] Yang X M, Yang X Q, Teo K L, et al. Second order symmetric duality in non-differentiable multiobjective programming with *F*-convexity[J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, **164**(2): 406-416.

[25] Goberna M A, Guerra-Vazquez F, Todorov M I. Constraint qualifications in convex vector semi-infinite optimization[J]. *European Journal of Operational Research*, 2016, **249**(1): 32-40.

Sufficient Optimality Conditions for Nonsmooth Semi-Infinite Multiobjective Optimization Problems

YANG Yu-hong[1,2], LI Fei[1]
(1. *School of Mathematical Sciences*, *Inner Mongolia University*, *Hohhot* 010021, *P.R.China*;
2. *School of Mathematics and Statistics*, *Yangtze Normal University*, *Chongqing* 408100, *P.R.China*)
(Recommended by YANG Xin-min, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problem (SIMOP) was addressed and its optimality conditions were discussed. First, the Clarke F-convexity hypothesis was imposed on some combinations of the objective functions and the constraint functions, the sufficient optimality conditions for the (weakly) efficient solution to the SIMOP were established. Next, the sufficient optimality conditions for the optimal solution to its scalar problem were obtained with the Chankong-Haimes method.

Key words: semi-infinite multiobjective optimization; (weakly) efficient solution; optimality condition; Clarke F-convexity

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11431004; 11601248)

引用本文/Cite this paper:
杨玉红, 李飞. 非光滑半无限多目标优化问题的最优性充分条件[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 526-538.
YANG Yu-hong, LI Fei. Sufficient optimality conditions for nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 526-538.