

基于 Gauss 伪谱法的欠驱动航天器 姿态优化控制*

易中贵¹, 戈新生²

(1. 北京信息科技大学 机电工程学院, 北京 100192;
2. 北京信息科技大学 理学院, 北京 100192)

摘要: 现代航天器一般可以通过三正交反作用动量飞轮对其进行姿态机动控制并任意定位. 研究了当其中某一个动量飞轮失效而不能输出完整三轴控制力矩时的欠驱动航天器姿态优化控制问题. 在系统动量矩等于零时, 其姿态控制问题可以转化为无漂移系统的非完整运动规划问题. 采用 Gauss 伪谱法(GPM)将带有两个反作用动量飞轮的航天器姿态非完整运动规划问题转换为非线性规划问题(NLP), 再通过 SQP(sequential quadratic programming)算法求解. 通过数值仿真、优化控制能达到设计的零边界控制要求, 方便伺服电机对动量飞轮的控制; 规划得到的姿态曲线与数值积分得到的曲线几乎完全重叠; 权衡最终的优化目标值、运行时间和精度三因素找到合适的插值配点个数; 结果表明了该方法对欠驱动航天器的姿态优化控制是有效的.

关键词: 欠驱动航天器; Gauss 伪谱法; 姿态优化控制; 非完整运动规划; 非线性规划

中图分类号: V412.4⁺2 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.380013

引 言

姿态控制分系统作为航天器的重要分系统之一, 在近几年的研究中取得了巨大的进展. 正常情况下, 安装有足够或冗余执行机构(如 n 个飞轮 / 控制力矩陀螺, 或者 n 对喷气推力器($n \geq 3$)) 的三轴稳定航天器姿态控制系统可以在滚转、俯仰和偏航三轴同时输出控制力矩, 完成其姿态控制和任意定位. 但航天器系统的姿态控制任务繁多、系统结构复杂, 容易导致 3 个飞轮当中的某一个发生故障或者失效, 从而不能输出完整的三轴控制力矩, 此时的航天器系统便成为了欠驱动航天器. 在一些特殊情况下, 也能对这类欠驱动航天器的姿态进行控制并定位. 早在 1984 年, Crouch^[1] 就研究了刚体航天器所安装的执行机构(喷气推力器或动量飞轮) 数目少于 3 个时的可控性问题, 并设计了相应的控制算法, 其研究表明, 在系统的动量矩不等于零时, 欠驱动航天器并不可控. Krishnan 等^[2] 和 Tsiotras 等^[3] 研究了带有 2 个动量飞轮的航天器角速度方程的稳定性问题. 基于微分几何方法, Krishnaprasad^[4] 提出了多体航天器姿态调节的一般框架理论. Walsh 等^[5] 讨论了带 2 个转子的航天器的定位问题, 并设计了姿态控制算

* 收稿日期: 2017-01-10; 修订日期: 2017-02-20

基金项目: 国家自然科学基金(11472058)

作者简介: 易中贵(1989—), 男, 硕士生(E-mail: yhcqyzg@sina.com);

戈新生(1957—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: gebim@vip.sina.com).

法. Coverstone-Carroll 等^[6]利用数值方法研究了带机器人航天器的优化控制问题. 戈新生等^[7-8]利用 Ritz 理论和粒子群算法, 研究了带两个反作用飞轮的航天器和太阳帆板展开过程的姿态控制问题. 段柳成等^[9]采用单项递推组集方法建立了空间漂浮航天器太阳翼展开与锁定过程的动力学模型, 并研究了其动力学控制问题.

对于求解最优控制问题, Gauss 伪谱法(又称正交配点法)是一种直接配点法, 它通过一系列数值近似变换将最优控制问题转化为求解非线性规划问题. 其具有以较少节点来求解就能获得较高的解精度、收敛精度和较快的收敛速度的优势^[10]. 且通过 Gauss 伪谱法转换而得到的非线性规划问题的 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件与原最优控制问题的一阶必要条件的离散形式是一致的^[11]. 雍恩米等^[12]采用 Gauss 伪谱法求解了高超声速飞行器滑翔式再入的快速轨迹优化问题. 李适^[13]基于 Gauss 伪谱法探讨了自由漂浮空间机器人从初始姿态到达目标姿态的最优轨迹. 董雪仰等^[14]研究了自适应 Gauss 伪谱法求解太阳帆板展开过程中航天器姿态最优控制的问题. 易中贵等^[15]则将 Gauss 伪谱法和直接打靶法相结合研究了自由下落猫的姿态优化控制问题.

而在针对欠驱动航天器姿态优化控制问题的研究上, 伪谱法也得到了广泛的应用. 如庄宇飞等^[16]采用 Legendre 伪谱法研究了欠驱动航天器的时间最优轨迹规划问题. 另外针对非轴对称欠驱动航天器, Zhuang (庄宇飞) 等^[17]还提出了一种新的基于微分平滑特性的时间最优轨迹规划算法, 利用伪谱法离散系统的平滑输出函数, 最终将优化问题转化为一个低维的, 仅含有代数约束的非线性规划问题, 且无需积分求解系统的动态力学方程. 而吴锦杰等^[18]则针对非轴对称欠驱动航天器设计了六自由度相对运动的姿轨耦合控制器. 他们考虑到姿轨耦合特性, 利用 Gauss 伪谱法和非线性规划求解得到了相对轨道运动能量最优的轨迹, 进而采用了滑模变结构控制实现对该轨迹的跟踪.

本文针对仅能输出两个控制力矩的欠驱动航天器姿态非完整运动规划问题, 采用了基于 Gauss 伪谱法的最优化控制思路, 在一系列 Gauss 离散点上构造 Lagrange 全局插值多项式, 同时近似状态变量和控制变量. 通过对插值近似的状态变量表达式求导来近似状态微分方程, 由 Gauss 积分来求解目标函数当中的积分项, 状态变量的末端值可通过对动力学微分方程在初末端时间区间上积分获得. 从而把一个非完整运动规划问题转换成了一个非线性规划问题, 再由 SQP 求解得到 2 个动量飞轮的初末控制值均为零的输入规律, 且使航天器载体姿态机动到设计的期望姿态, 并与数值积分解作比较, 验证了姿态运动的合理性, 最后给出其数值仿真.

1 运动模型

在系统不受外力矩作用时, 可使用动量矩守恒原理来推导欠驱动航天器的动力学方程.

假设欠驱动航天器由载体 B_0 和两个正交反作用动量飞轮 $B_i (i = 1, 2)$ 构成(如图 1 所示). 系统的总质心 O 为原点, 建立惯性坐标系 $(OXYZ)$, 以航天器载体 B_0 和两个动量飞轮 $B_i (i = 1, 2)$ 的质心建立的主轴连体坐标系分别为 $(O_i x_i y_i z_i) (i = 0, 1, 2)$. 本文选取 1→2→3 的旋转顺序, 使刚体航天器机动到期望的最终姿态, 旋转矩阵为 $\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$, 其中 α, β 和 γ 为 Cardan 角^[19]. $m_i, \mathbf{I}_i (i = 0, 1, 2)$ 分别为航天器载体和 2 个正交反作用动量飞轮的质量及惯量张量. $\mathbf{p}_i (i = 0, 1, 2)$ 为各连体坐标系的原点 $O_i (i = 0, 1, 2)$ 相对于系统总质心 O 的矢径, 飞轮 B_i 的质心 O_1 和 O_2 到航天器主刚体质心 O_0 的距离分别为 d_1 和 d_2 . 于是飞轮 $B_i (i = 1, 2)$ 相对总质心的位置可以写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_0 + d_1 \mathbf{b}_1, \\ \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_0 + d_2 \mathbf{b}_2, \end{cases} \quad (1)$$

式中的 \mathbf{b}_1 和 \mathbf{b}_2 分别为飞轮 1 和飞轮 2 旋转轴的单位基矢量,且均位于航天器的主轴平面内而与欠驱动轴(图 1 中 Z 轴)垂直。 \mathbf{b}_1 和 \mathbf{b}_2 一般可写成

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = (b_{1x}, b_{1y}, 0)^T, \\ \mathbf{b}_2 = (b_{2x}, b_{2y}, 0)^T. \end{cases} \quad (2)$$

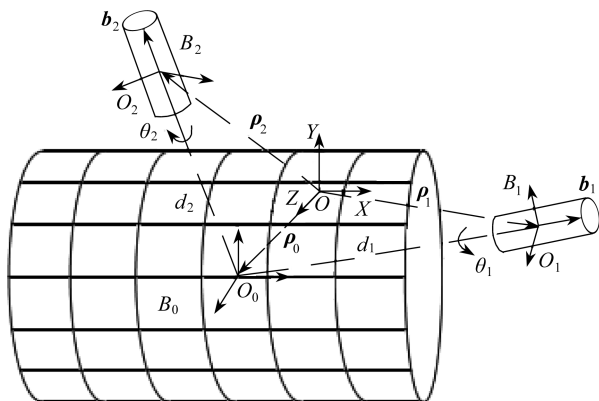


图 1 带有两个动量飞轮的航天器

Fig. 1 A spacecraft with 2 momentum wheels

根据系统的总质心位置,可求出各矢径 $\boldsymbol{\rho}_i = (\rho_{ix}, \rho_{iy}, 0)^T (i = 0, 1, 2)$.由动量矩守恒原理,航天器系统相对总质心 O 的动量矩映射到坐标系 $(O_0x_0y_0z_0)$ 上的表达式为

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{H} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^2 \underline{\mathbf{I}}_i (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}_i \dot{\theta}_i), \quad i = 0, 1, 2, \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \left[\mathbf{I}_0 + \sum_{i=0}^2 \underline{\mathbf{I}}_i + \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I}_i - \underline{\mathbf{I}}_i) \right],$$

$$\underline{\mathbf{I}}_i = \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T j_i, \quad \underline{\mathbf{I}}_i = m_i \begin{bmatrix} \rho_{iy}^2 & -\rho_{ix} \rho_{iy} & 0 \\ -\rho_{ix} \rho_{iy} & \rho_{ix}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{ix}^2 + \rho_{iy}^2 \end{bmatrix},$$

式中, \mathbf{H} 为航天器系统的动量矩, $\boldsymbol{\omega}$ 为航天器的绝对角速度矢量, $\theta_i (i = 1, 2)$ 分别对应飞轮 B_i 绕转动轴 \mathbf{b}_i 的转角, $j_i (i = 1, 2)$ 分别为动量飞轮 B_i 相对自身转轴的惯量矩,假设 \mathbf{H} 等于 $\mathbf{0}$, 则式(3)可写为

$$\boldsymbol{\omega} = - \left(\mathbf{J} + \sum_{i=1}^2 \underline{\mathbf{I}}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^2 \underline{\mathbf{I}}_i \mathbf{b}_i \dot{\theta}_i. \quad (4)$$

航天器绕系统总质心转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在载体坐标系 $(O_0x_0y_0z_0)$ 各轴上的投影 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 可用 Cardan 角及导数表示为^[20]

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} \dot{\mathbf{q}}, \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

将式(5)代入式(4)得到

$$\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{J} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i \mathbf{b}_i \dot{\theta}_i. \quad (6)$$

由系统动量矩守恒导出的动力学方程(6)并不可积。

2 航天器姿态最优控制问题

不失一般性,本文以 Bolza 形式的最优控制问题来考虑。

$$\begin{cases} \min & J = \Phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt, \\ \text{s.t.} & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \\ & \Phi(\mathbf{x}(t_0), t_0, \mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{0}, \end{cases} \quad t \in [t_0, t_f],$$

上述方程依次为:性能指标函数、状态约束方程、边界约束方程和路径约束方程。其中 $\mathbf{x} \in R^n$ 为状态变量, $\mathbf{u} \in R^m$ 为控制变量, t 为实际任意时间, t_0 为实际初始时间, t_f 为实际终端时间。函数 Φ 和 g 是标量, $\mathbf{f} \in R^n$ 为 n 维向量函数, $\Phi \in R^r$ 为 q 维向量函数, $\mathbf{C} \in R^c$ 为 c 维向量函数。下面把带有两个正交反作用动量飞轮的航天器姿态非完整运动规划问题转换为最优控制问题。

2.1 目标函数

定义两个正交飞轮 $B_i (i = 1, 2)$ 绕其自身旋转轴转动的角速度 $\dot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 为输入的控制变量,并写作 $\mathbf{u} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)^T$ 。设此系统是可控的^[1],存在最优解 $\mathbf{u}^* \in L^2([0, T])$,其中 $L^2([0, T])$ 为可测向量函数 $\mathbf{u}(t), t \in [0, T]$ 构成的 Hilbert 空间。由于需要航天器长期执行任务,节约燃料可以延长其在轨道上的服务寿命,因此选择航天器的两个反作用动量飞轮转动所耗散的能量作为最优控制目标,即

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^T \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle dt. \quad (7)$$

2.2 状态约束方程

将航天器姿态角 $\mathbf{q} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ 取作状态变量,则系统的状态方程可表示为

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \quad (8)$$

其中状态矩阵

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = -\mathbf{L}^{-1}\left(\mathbf{J} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i \mathbf{b}_i.$$

2.3 边界约束方程

先给出航天器系统的初末姿态位形 $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f \in R^3$ (即状态边界约束),由目标函数寻找优化控制输入 $\mathbf{u}(t) \in R^2, t \in [0, T]$,从而可确定系统(8)从 \mathbf{q}_0 到 \mathbf{q}_f 的姿态运动轨迹。

通常两个飞轮的速度是通过电机来控制的,所以其初末速度应均为零,以方便实现电机对飞轮的控制,即 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_f = \mathbf{0}$ (即控制边界约束)。

3 Gauss 伪谱方法

3.1 基本原理

Gauss 伪谱方法是通过一系列变换,将连续最优控制问题离散为具有代数约束的参数优

化问题,即非线性规划问题,主要通过以下步骤实现。

3.1.1 时域变换

Gauss 伪谱法需要引入新的时间变量 $\tau \in [-1, 1]$, 把姿态运动规划问题的时间区间 $[t_0, t_f]$ 转换为 $[-1, 1]$, 定义时间变量 t 为

$$t = \frac{t_0 + t_f}{2} - \frac{t_0 - t_f}{2} \tau. \tag{9}$$

3.1.2 状态变量与控制变量

取 K 个 Legendre-Gauss (LG) 点以及 $\tau_0 = -1$ 作为 Gauss 伪谱法的节点, 构造 $K + 1$ 个 Lagrange 插值多项式, 并把它作为基函数构造状态变量的近似表达式, 即式 (10)。其中 LG 点为 K 阶 Legendre 多项式 $(P_K(\tau) = (1/(2^K K!)) (d^K/d\tau^K) [(\tau^2 - 1)^K], K = 1, 2, \dots)$ 的根, 且在区间 $(-1, 1)$ 上的分布特点为两端稠密, 中间稀疏, 从而可以有效抑制 Lagrange 插值时两端容易出现的 Runge 现象。

$$\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^K L_i(\tau) \mathbf{X}(\tau_i), \tag{10}$$

式中 Lagrange 插值基函数

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq i}^K \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j},$$

且在节点处, 近似状态等于实际状态, 即 $\mathbf{X}(\tau_i) = \mathbf{x}(\tau_i), i = 0, 1, \dots, K$ 。

由于 Gauss 伪谱方法中没有用到控制变量的导数, 所以相对于状态变量的近似, 其近似要简单得多。为了形式上的统一, Gauss 伪谱法仍以 LG 点作为节点 (即仅选用配点作为节点), 构造 K 个 Lagrange 插值多项式 $\tilde{L}_i(\tau) (i = 1, 2, \dots, K)$, 并把它作为基函数来近似控制变量, 即

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^K \tilde{L}_i(\tau) \mathbf{U}(\tau_i). \tag{11}$$

3.1.3 终端状态约束的离散

由 Bolza 型最优控制问题可知状态方程约束包含末端节点, 而式 (10) 的时间区间为 $[-1, 1]$, 因而状态变量的近似表达式中并未包含终端时刻节点 $\mathbf{X}(\tau_f)$ 。对动力学微分方程在区间 $[-1, 1]$ 上积分有

$$\mathbf{x}(\tau_f) - \mathbf{x}(\tau_0) = \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau), \tau) d\tau. \tag{12}$$

将其离散并用 Gauss 积分来近似可得

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{X}_0 + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \mu_k \mathbf{f}(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \tau_k; t_0, t_f), \tag{13}$$

其中 $\mu_k = \int_{-1}^1 L_k(\tau) d\tau$ 为 Gauss 权重, τ_k 为 LG 点。

3.1.4 动力学微分方程的转换

在伪谱法中, 状态变量是通过全局正交插值多项式来近似的, 因而其导数可通过对式 (10) 求导而得到, 即

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_k) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \sum_{i=0}^K \dot{L}_i(\tau) \mathbf{X}(\tau_i). \tag{14}$$

可用一个微分近似矩阵 $\mathbf{D} \in R^{K \times (K+1)}$ 来确定式中 Lagrange 多项式的微分

$$D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \sum_{l=0, l \neq i}^K \frac{\prod_{j=0, j \neq i, l}^K \tau_k - \tau_j}{\prod_{j=0, j \neq i}^K \tau_i - \tau_j}, \quad (15)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, K; i = 0, 1, \dots, K$. 再代入动力学微分方程, 便可以得到其离散表达式为

$$\sum_{i=0}^K D_{ki} X_i - \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) = 0, \quad (16)$$

其中 $X_k \equiv X(\tau_k) \in R^n, U_k \equiv U(\tau_k) \in R^m (k = 1, 2, \dots, K)$, 由此可知状态约束只在 LG 点处 (即配点) 计算而不在边界点计算.

3.1.5 目标函数

应用 Gauss 积分来计算最优控制问题中目标函数的积分项, 可得离散形式的近似目标函数为

$$J = \Phi(X_0, t_0, X_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^K \mu_k g(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f). \quad (17)$$

连续最优控制问题通过上述数值近似变换便转化成了一个非线性规划问题, 它的解是连续 Bolza 问题的近似解, 其状态设计变量为 $X_i (i = 0, 1, \dots, K)$, 控制设计变量为 $U_i (i = 1, 2, \dots, K)$.

3.2 非线性规划问题

应用 Gauss 伪谱法求解以上欠驱动航天器姿态运动规划最优控制问题. 定义各个插值点上的状态变量为 $X_{1K}, X_{2K}, X_{3K} \in R^{K+1}$, 控制变量为 $U_{1K}, U_{2K} \in R^K$. 首先由 Gauss 求积公式得到近似的目标函数

$$J = \frac{t_f - t_0}{2} \cdot \boldsymbol{\mu}^T \cdot (U_{1K}^2 + U_{2K}^2), \quad (18)$$

式中 $\boldsymbol{\mu} \in R^K$ 为 Gauss 权重.

再由微分近似矩阵 $D \in R^{K \times (K+1)}$ 可得状态方程的展开形式:

$$\begin{cases} DX_{1K} - \frac{t_f - t_0}{2} \cdot (B_{11} U_{1K} + B_{12} U_{2K}) = 0, \\ DX_{2K} - \frac{t_f - t_0}{2} \cdot (B_{21} U_{1K} + B_{22} U_{2K}) = 0, \\ DX_{3K} - \frac{t_f - t_0}{2} \cdot (B_{31} U_{1K} + B_{32} U_{2K}) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

式中 $B_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$ 为式(8)状态矩阵中的元素.

由于状态变量不包括末端节点, 因此可通过 Gauss 求积公式得到末端约束条件

$$\begin{cases} X_{1f} - X_{10} = \frac{t_f - t_0}{2} \cdot \boldsymbol{\mu}^T \cdot (B_{11} U_{1K} + B_{12} U_{2K}), \\ X_{2f} - X_{20} = \frac{t_f - t_0}{2} \cdot \boldsymbol{\mu}^T \cdot (B_{21} U_{1K} + B_{22} U_{2K}), \\ X_{3f} - X_{30} = \frac{t_f - t_0}{2} \cdot \boldsymbol{\mu}^T \cdot (B_{31} U_{1K} + B_{32} U_{2K}). \end{cases} \quad (20)$$

最后还需要设置状态变量和控制变量的初末值边界约束

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{X}_0, \mathbf{q}_f = \mathbf{X}_f, \mathbf{u}_0 = \mathbf{U}_0, \mathbf{u}_f = \mathbf{U}_f, \tag{21}$$

式中 $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_f$ 分别为近似状态变量矩阵的第一列和最后一列;离散后的控制变量矩阵的第一列和最后一列分别为 $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_f$.

3.3 协态变量映射关系

通过计算离散化后的非线性规划问题可以得到原最优控制问题的近似解,但为了判断此近似解是否也满足原最优控制问题的一阶必要条件,还需通过协态映射定理来证明.

早在 2005 年, Benson 就提出了 Gauss 伪谱协态变量映射定理^[11],证明了非线性规划问题的 KKT 条件完全等价于用 Gauss 伪谱法离散连续 Bolza 型最优控制问题的一阶必要条件得到的离散化形式,且最优控制问题一阶必要条件的协态变量与用 Gauss 伪谱法离散后的非线性规划问题的 Lagrange 乘子的关系如下:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0(t_0) = \tilde{\mathbf{A}}_0, \\ \mathbf{A}_k = \frac{\tilde{\mathbf{A}}_k^\top}{\boldsymbol{\omega}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ \mathbf{A}(t_f) = \tilde{\mathbf{A}}_F, \\ \boldsymbol{\kappa}_k = \frac{2}{t_f - t_0} \frac{\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_k}{\boldsymbol{\omega}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \\ \boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}, \end{cases} \tag{22}$$

式中, $\mathbf{A}_k, \boldsymbol{\kappa}_k, \boldsymbol{\nu}$ 分别对应应用 Gauss 伪谱法离散后的非线性规划问题中的状态变量、控制变量和边界约束的 Lagrange 乘子,而 $\tilde{\mathbf{A}}_k, \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_k, \tilde{\boldsymbol{\nu}}$ 分别对应原最优控制问题中的状态变量、控制变量和边界约束的协态变量.定理表明了用 Gauss 伪谱法求解得出的最优解的合理性.

4 数值仿真

设 2 个正交动量飞轮均位于航天器的两个主轴上,定义 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 在主轴基矢量上的坐标分别为 $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0)^\top$ 和 $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 0)^\top$.设航天器系统的质量几何参数分别为^[2]

$$\begin{cases} d_1 = d_2 = 0.2 \text{ m}, j_1 = j_2 = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ m_0 = 500 \text{ kg}, m_1 = m_2 = 5 \text{ kg}, \\ \mathbf{I}_0 = \text{diag}(86.215, 85.07, 113.565) \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ \mathbf{I}_1 = \text{diag}(0.5, 0.25, 0.25) \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ \mathbf{I}_2 = \text{diag}(0.25, 0.5, 0.25) \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{cases}$$

边界条件设置如下:

$$\mathbf{X}_0 = [0 \ 0 \ 0]^\top, \mathbf{X}_f = [0 \ 0 \ \pi/6]^\top, \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_f = [0 \ 0]^\top.$$

末端姿态即为刚体航天器系统绕其欠驱动轴转动 $\pi/6$ 之后的姿态.控制输入则从零值开始并以零值结束.优化算法中的性能指标函数为飞轮消耗能量最小.选取 40 个 Gauss 点,时间 $T = 5 \text{ s}$,在 MATLAB2015b 环境下运行编写的程序,利用 SQP 算法实现离散后的非线性规划问题的计算.算法选取元素全为 $1 \times (1 \times 210)$ 的向量作为运算初值,优化参数设置:算法 algorithm 选择 SQP,大规模运算,允许进行函数评价的最大次数为 10^4 次,最大迭代次数为 10^4 次.在内存为 4.0 G, CPU 频率为 2.1 GHz 的 Windows7 操作系统的计算机上编程计算.仿真计算后,优化的目标值为 $3.970 \ 3 \times 10^4$; CPU 运行时间为 1 516.813 s;航天器载体从 \mathbf{q}_0 机动到 \mathbf{q}_f 的姿态角优

化曲线如图 2.图 3 为两个动量飞轮相对航天器主轴转动的最优控制输入规律.图 2 中的实线是采用上述算法直接得到的欠驱动航天器的能量最优姿态机动轨迹,而虚线是将图 3 中的最优控制输入代入欠驱动航天器系统模型(8),通过数值积分得到的系统实际状态,从图中可以看出,两组曲线没有明显差异,几乎是完全重叠的.

图 4 为姿态误差曲线,其计算方式为:在每个 LG 点上通过数值积分求得的状态变量值减去相应点上的由 Gauss 伪谱法求解得到的状态变量值.

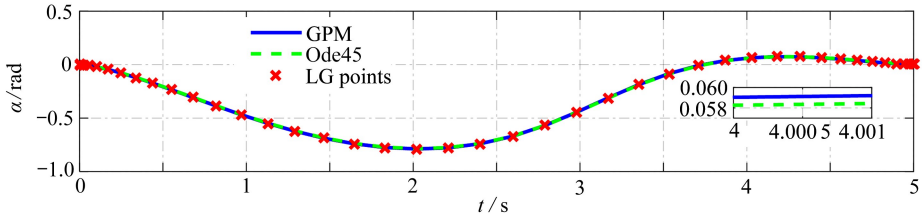
为便于比较,采用相同的非线性规划初始值,将节点 LG 的个数从 $K = 10$ 开始,每一次均增加 10 个 LG 点,增加到 $K = 50$ 为止,比较由 Gauss 伪谱法所求得的优化目标函数值、优化过程中 CPU 运行所消耗的时间以及状态变量误差的变化情况,结果如表 1 所示.其中状态变量误差的定义为

$$\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(t))^T (\mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(t)) dt. \quad (23)$$

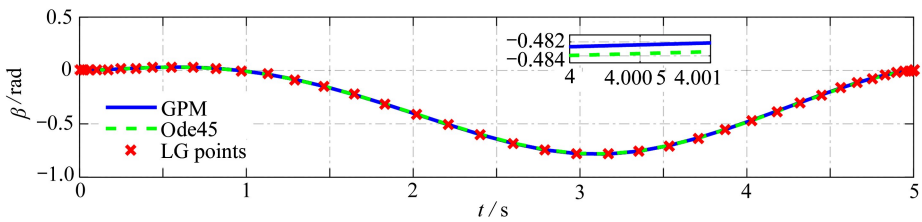
表 1 性能指标、CPU 运行时间及状态变量误差随节点 K 增加的变化情况

Table 1 Performance indices, CPU running times and state errors with respect to node K

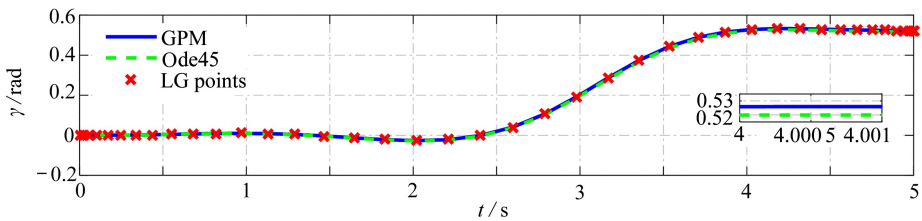
node N	10	20	30	40	50
objective E/J	3.810E+4	3.971E+4	4.021E+4	3.970E+4	3.957E+4
time t/s	17.467	150.960	791.716	1 516.813	3 939.143
error ε	0.034	0.002	6.190E-4	1.068E-4	4.677E-5



(a) α



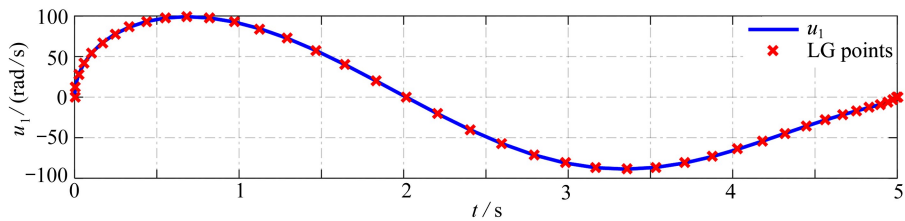
(b) β



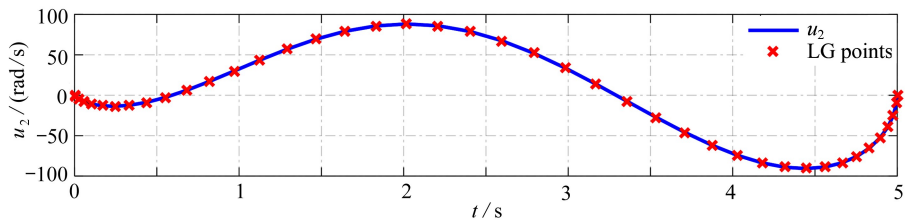
(c) γ

图 2 欠驱动刚体航天器的姿态运动优化轨迹

Fig. 2 The optimal trajectory of the underactuated rigid spacecraft



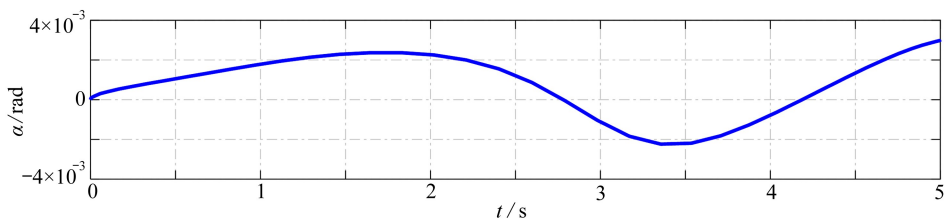
(a) u_1



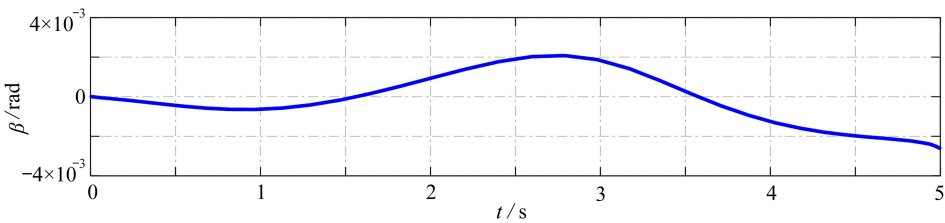
(b) u_2

图3 两个反作用动量飞轮的优化输入规律

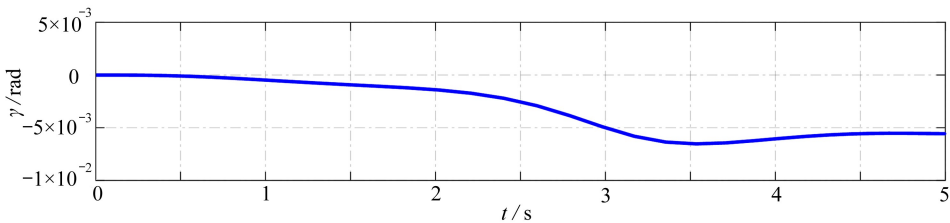
Fig. 3 The optimal control input for the 2 momentum wheels



(a) α



(b) β



(c) γ

图4 状态变量在 LG 点处的误差曲线

Fig. 4 State errors at the LG nodes

从仿真结果可以看出,随着 LG 点数量的增加,性能指标出现了小幅的波动情况,但在一定范围内是减小的;而 CPU 运行消耗的时间则急剧增加;误差越来越小,即求解精度越来越

高.由于 Gauss 伪谱法是一种数值优化方法,则 LG 离散点数目越多,离散后的非线性规划问题的解越接近原最优控制问题的解,从而就越接近实际的全局最优解.但是当 LG 点增加到一定数量后,其求解精度不会再大幅的提高,从而性能指标函数值的幅度也不会变化太大.从表 1 可以明显看出,在 $K = 30$ 以后,优化算法的运行时间随 LG 配点个数的增加呈加速爬升的趋势,这主要是因为随着离散点 LG 个数的增加,设计变量的个数会越来越庞大,微分近似矩阵 D 和等式约束 Jacobi 矩阵的维数也随之增加,就如在本文的优化算法中,当 $K = 40$ 时,设计变量的个数为 $5 \times (40 + 2) = 210$, D 的维数为 40×41 ,而 Jacobi 矩阵的维数则为 133×210 ,其中行数 $133 = (5 \times 2 + 3 \times 40 + 3)$;当 K 增加至 50 时,相应的优化设计变量个数、微分近似矩阵和 Jacobi 矩阵维数将分别增加到 260, 50×51 , 163×260 ,从而运算时间会急剧上升.

在本文中,首先考虑求解的精度至少要达到千分之一,从表 1 可知,仅有 LG 点个数在 30 以上才满足条件;在 30 以上的节点中,目标函数值随着节点数目的增加而下降,求解精度也随之提高,但运行时间却大幅急剧上升;因此综合以上分析,本文选取的 LG 点个数为 40 个.由此可看出,使用 Gauss 伪谱法求解最优控制问题时,选取的节点个数不是越多越好,而应综合考虑优化目标函数值、CPU 运行时间以及精度误差等因素,对求解得到的数据进行分析比较研究,从而得到最合适的 LG 配点个数.

5 结 论

本文将 Gauss 伪谱法引入到求解欠驱动航天器姿态最优控制中来是一次新的、有益的尝试.该方法把连续最优控制问题转化为非线性规划问题,再用求解大规模非线性约束优化问题的 SQP 算法运算.仿真运算得到欠驱动刚体航天器系统从初始位形调姿到终端位形的有效姿态机动轨迹.优化得到的最优控制输入的初末值均等于零,因此控制电机的初始和终止角速度均可以等于零,可以方便实现对飞轮的控制,成功解决了 Fourier 展开方法规划的初末角速度不为零的情况.同时,将 Gauss 伪谱法求解得到的最优控制解代入系统动力学方程,利用数值积分求解出航天器系统的实际姿态曲线,可以发现两种方法求解得到的曲线几乎完全重叠,从而反向验证了 Gauss 伪谱法求得的最优解的合理性和有效性,同时也表明欠驱动航天器系统在不受外力矩作用时,航天器系统的调姿是可以通过其自身的内部运动(动量飞轮)来完成的.

参考文献(References):

- [1] Crouch P E. Spacecraft attitude control and stabilization: applications of geometric control theory to rigid body models[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, **29**(4): 321-331.
- [2] Krishnan H, McClanroch N H, Reyhanoglu M. Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two momentum wheel actuators[J]. *Journal of Guidance Control & Dynamics*, 1995, **18**(2): 256-263.
- [3] Tsiotras P, Corless M, Longuski J M. A novel approach to the attitude control of axisymmetric spacecraft[J]. *Automatica*, 1995, **31**(8): 1099-1112.
- [4] Krishnaprasad P S. Geometric phases, and optimal reconfiguration for multibody systems[C]// *Proceedings of the American Control Conference*. New York: The American Automatic Control Council, 1990: 2440-2444.
- [5] Walsh G C, Montgomery R, Sastry S S. Orientation control of the dynamic satellite[C]// *Proceedings of the American Control Conference*. Baltimore, Maryland: The American Automatic

- Control Council, 1994: 138-142.
- [6] Coverstone-Carroll V L, Wilkey N M. Optimal control of a satellite-robot system using direct collocation with nonlinear programming[J]. *Acta Astronautica*, 1995, **36**(3): 149-162.
- [7] 戈新生, 陈立群, 刘延柱. 带有两个动量飞轮刚体航天器的姿态非完整运动规划问题[J]. 控制理论与应用, 2004, **21**(5): 781-784. (GE Xin-sheng, CHEN Li-qun, LIU Yan-zhu. Nonholonomic motion planning for the attitude of rigid spacecraft with two momentum wheel actuators[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, **21**(5): 781-784. (in Chinese))
- [8] 孙凯, 戈新生. 航天器太阳帆板伸展过程最优控制的粒子群优化算法[J]. 工程力学, 2007, **24**(9): 188-192. (SUN Kai, GE Xin-sheng. Optimal control of stretching process of solar array on spacecraft using particle swarm optimization algorithm[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(9): 188-192. (in Chinese))
- [9] 段柳成, 李海泉, 刘晓峰, 等. 考虑铰摩擦的太阳翼展开动力学研究[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(12): 1308-1319. (DUAN Liu-cheng, LI Hai-quan, LIU Xiao-feng, et al. Deployment dynamics for solar wings with joint friction[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(12): 1308-1319. (in Chinese))
- [10] Benson D A, Huntington G T, Thorvaldsen T P, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, **29**(6): 1435-1440.
- [11] Benson D. A Gauss pseudospectral transcription for optimal control[D]. PhD Thesis. Cambridge, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [12] 雍恩米, 唐国金, 陈磊. 基于 Gauss 伪谱方法的高超声速飞行器再入轨迹快速优化[J]. 宇航学报, 2008, **29**(6): 1766-1772. (YONG En-mi, TANG Guo-jin, CHEN Lei. Rapid trajectory optimization for hypersonic reentry vehicle via Gauss pseudospectral method[J]. *Journal of Astronautics*, 2008, **29**(6): 1766-1772. (in Chinese))
- [13] 李适. 空间机器人路径优化与鲁棒跟踪控制[D]. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013. (LI Shi. Path optimization and robust tracking control for space manipulator[D]. PhD Thesis. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013. (in Chinese))
- [14] 董雪仰, 戈新生. 航天器太阳帆板展开过程最优控制的自适应 Gauss 伪谱法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(6): 655-664. (DONG Xue-yang, GE Xin-sheng. The adaptive Gauss pseudospectral method for the optimal control of spacecraft solar array deployment[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(6): 655-664. (in Chinese))
- [15] 易中贵, 戈新生. 自由下落猫姿态最优控制的混合优化策略[J]. 力学学报, 2016, **48**(6): 1390-1397. (YI Zhong-gui, GE Xin-sheng. The attitude optimal control with a hybrid optimal strategy for a free-falling cat[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **48**(6): 1390-1397. (in Chinese))
- [16] 庄宇飞, 马广富, 黄海滨. 欠驱动刚性航天器时间最优轨迹规划设计[J]. 控制与决策, 2010, **25**(10): 1469-1473. (ZHUANG Yu-fei, MA Guang-fu, HUANG Hai-bin. Time-optimal motion planning of an underactuated rigid spacecraft[J]. *Control and Decision*, 2010, **25**(10): 1469-1473. (in Chinese))
- [17] ZHUANG Yu-fei, MA Guang-fu, LI Chuan-jiang, et al. Time-optimal trajectory planning of underactuated rigid spacecraft using differential flatness[J]. *Journal of Astronautics*, 2011, **32**(8): 1753-1761.
- [18] 吴锦杰, 刘昆, 韩大鹏, 等. 欠驱动航天器相对运动的姿轨耦合控制[J]. 控制与决策, 2014, **29**(6): 969-978. (WU Jin-jie, LIU Kun, HAN Da-peng, et al. Coupled attitude and orbit control

- for relative motion of underactuated spacecraft[J]. *Control and Decision*, 2014, **29**(6): 969-978.(in Chinese)
- [19] 刘延柱, 潘振宽, 戈新生. 多体系统动力学[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.(LIU Yan-zhu, PAN Zhen-kuan, GE Xin-sheng. *Dynamics of Multibody Systems*[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2014.(in Chinese))
- [20] 刘延柱. 航天器姿态动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.(LIU Yan-zhu. *Spacecraft Attitude Dynamics*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995.(in Chinese))

Optimal Attitude Control of Underactuated Spacecrafts With the Gauss Pseudospectral Method

YI Zhong-gui¹, GE Xin-sheng²

(1. *School of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, P.R.China;*

2. *School of Applied Science, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, P.R.China)*

Abstract: The attitude and orientation of modern spacecrafts generally can be controlled by 3 orthogonal reaction momentum wheels. The attitude control of underactuated spacecrafts with only 2 momentum wheels and failed out of complete 3-axis controlling torques, was investigated. The control problem was converted to a nonholonomic motion planning problem of a drift-free system with zero angular momentum. The attitude motion planning problem of a spacecraft with 2 momentum wheels was converted to a nonlinear programming problem (NLP) with the Gauss pseudospectral method, and then solved with the SQP algorithm. Through numerical simulation the optimal control met the design requirements of zero boundaries, so the wheels can be controlled easily by servomotors; the planned attitude curves were almost identical to the numerically integrated solutions; the number of suitable collocation points was found through balancing among 3 factors: the target function value, the running time and the solution error. The results show that the proposed method is effective for the optimal attitude control of underactuated spacecrafts.

Key words: underactuated spacecraft; Gauss pseudospectral method; optimal attitude control; nonholonomic motion planning; nonlinear programming

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11472058)

引用本文/Cite this paper:

易中贵, 戈新生. 基于 Gauss 伪谱法的欠驱动航天器姿态优化控制[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(12): 1319-1330.

YI Zhong-gui, GE Xin-sheng. Optimal attitude control of underactuated spacecrafts with the Gauss pseudospectral method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(12): 1319-1330.