

# 一类变时滞复数 Cohen-Grossberg 神经网络的 动态行为分析\*

徐晓惠<sup>1,2</sup>, 宋乾坤<sup>3</sup>, 张继业<sup>4</sup>, 施继忠<sup>5</sup>, 赵玲<sup>2</sup>

- (1. 西华大学 流体及动力机械教育部重点实验室, 成都 610039;
2. 西华大学 汽车测控与安全四川省重点实验室, 成都 610039;
3. 重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074;
4. 牵引动力国家重点实验室(西南交通大学), 成都 610031;
5. 浙江师范大学 工学院, 浙江 金华 321004)

(本刊编委宋乾坤来稿)

**摘要:** 研究了一类具有变时滞的复数域 Cohen-Grossberg 神经网络平衡点的动态行为.在假定激活函数满足 Lipschitz 条件并且放大函数只满足具有下界的情况下,利用 M 矩阵和同胚映射原理,得到了确保该系统平衡点的存在性和唯一性的充分条件.基于矢量 Lyapunov 函数法和不等式技术,得到了确保该系统平衡点的模指数稳定性的判据.该判据形式简单,在实际应用时便于检验.该文所取得的研究成果推广了现有结论.最后通过给出一个数值算例和仿真结果验证了所得结论的正确性和可行性.

**关键词:** Cohen-Grossberg 神经网络; 复数域; 模稳定性; 指数稳定性; 变时滞; 矢量 Lyapunov 函数法

**中图分类号:** O175      **文献标志码:** A      **doi:** 10.21656/1000-0887.380015

## 引 言

复数域神经网络在自适应信号处理、医学影像、通信工程、优化计算等应用领域具有实数域神经网络不可取代的优势<sup>[1-2]</sup>,因此对定义在复数域下的神经网络的动态行为分析成为近年的一个研究热点.文献[3]在假设复数域激活函数分别满足有界性和解析性的情况下,利用加权 Lyapunov 函数法和 LMI 技术研究了一类复数域递归神经网络的平衡点的存在性、唯一性

\* 收稿日期: 2017-01-11; 修订日期: 2017-11-02

**基金项目:** 国家自然科学基金(11402214; 51375402; 11572264; 61773004); 四川省青年科技创新研究团队(2017TD0035; 2017TD0026; 2015TD0021; 2016HH0010); 四川省教育厅自然科学重点项目(17ZA0364); 浙江省自然科学基金(LY14E08006); 教育部“春晖计划”合作科研项目(Z2014075); 重庆创新团队项目(CXTDX201601022)

**作者简介:** 徐晓惠(1982—),女,副教授,博士(E-mail: xhxu@163.com);  
宋乾坤(1963—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: qiankunsong@163.com);  
张继业(1965—),男,教授,博士(E-mail: jy Zhang@home.swjtu.edu.cn);  
施继忠(1977—),男,讲师,博士(E-mail: shijizhong@zjnu.cn);  
赵玲(1973—),女,副教授,硕士(E-mail: zll1705@163.com).

以及全局渐进稳定性和全局指数稳定性,并得到了相应的判定定理.Zhang 等<sup>[4]</sup>采用类似于文献[3]的研究方法,得到了确保一类具有固定时滞的复数域 Hopfield 神经网络的平衡点全局渐进稳定性的充分条件.考虑到神经网络的硬件电路在运行过程中,由于信号的传输速度及放大电路切换速度的有限性,导致时间滞后现象不可避免.文献[3-4]所研究的复数域神经网络模型中均考虑了固定时滞.固定时滞在神经元个数较少的网络模型中是一种合理的近似模型,但不适用于高阶神经网络系统.文献[5-6]在一类复数域神经网络模型中考虑了变时滞,基于矢量 Lyapunov 函数法对系统平衡点的动态行为进行了研究.关于复数域神经网络系统动态行为研究的其他成果见文献[7-10].Cohen-Grossberg 神经网络在模型上包含 Hopfield 神经网络、细胞神经网络、递归神经网络等,并且该类型神经网络在联想记忆、并行计算、非线性优化等领域具有特定的优势.文献[11-15]分析了几类定义在实数域下 Cohen-Grossberg 神经网络平衡点的动态行为,并取得了重要的稳定性结论.Hu 等<sup>[16]</sup>利用自适应同步控制策略,基于加权 Lyapunov 函数法对一类具有固定时滞的混沌复数域 Cohen-Grossberg 神经网络进行了指数同步分析,文献[16]所取得的研究成果无法直接应用于判定具有可变时滞的复数域 Cohen-Grossberg 神经网络平衡点的动态行为.

基于以上分析,本文在假设自反馈函数、激活函数以及关联矩阵定义在复数域的情况下,采用矢量 Lyapunov 函数法并结合 M 矩阵原理,对一类具有变时滞的复数域 Cohen-Grossberg 神经网络的平衡点的存在性、唯一性和模指数稳定性进行分析,并得到相应的判定定理.

## 1 模型描述和基本引理、假设

一类具有变时滞的复数域 Cohen-Grossberg 神经网络模型由如下方程描述:

$$\frac{dz_k(t)}{dt} = h_k(z_k(t)) \left\{ -d_k(z_k(t)) + \sum_{j=1}^n [a_{kj}f_j(z_j(t)) + b_{kj}f_j(z_j(t - \tau_{kj}(t)))] + J_k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

其中  $n$  表示神经元个数,  $z_k = x_k + y_k i \in \mathbf{C}$  为第  $k$  个神经元状态,这里  $x_k, y_k \in \mathbf{R}$ ,  $i$  为虚数单位,  $\mathbf{C}$  表示复数域,  $\mathbf{R}$  表示实数域,  $h_k(z_k(t))$  为该系统的放大函数.  $\mathbf{A} = (a_{kj})_{n \times n} \in \mathbf{C}^{n \times n}$  和  $\mathbf{B} = (b_{kj})_{n \times n} \in \mathbf{C}^{n \times n}$  分别表示系统关联矩阵.  $\mathbf{f}(z(t)) = [f_1(z_1(t)), f_2(z_2(t)), \dots, f_n(z_n(t))]^T$  表示神经网络(1)的激活函数,  $\mathbf{T}$  表示转置.  $d_k(z_k(t))$  为自激活函数, 时延  $\tau_{kj}(t)$  为有界函数, 且  $\tau = \max_{1 \leq k, j \leq n} \sup_{t \geq 0} \tau_{kj}(t)$ .  $\mathbf{J} = [J_1, J_2, \dots, J_n]^T \in \mathbf{C}^n$  为系统外部常输入.

假设系统(1)的初始条件是  $z_k(s) = \varphi_k(s)$ , 其中  $\varphi_k(s)$  为  $[-\tau, 0]$  上的有界连续函数,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

记  $z^\# = (z_1^\#, z_2^\#, \dots, z_n^\#)^T$  为系统(1)的平衡点, 其中  $z_k^\# = x_k^\# + i y_k^\#, k = 1, 2, \dots, n$ .

**定义 1** 若存在常数  $\Gamma > 0$  和  $\lambda > 0$ , 对于所有的  $J \in \mathbf{C}^n$ , 有  $\|z(t) - z^\#\| \leq \sup_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s) - z^\#\| \Gamma \exp(-\lambda t)$  成立,  $t \geq 0$ , 则称系统(1)的平衡点  $z^\#$  是模指数稳定的, 其中

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}, \quad |z_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

**引理 1**<sup>[5]</sup> 如果  $\mathbf{H}(z)$  是定义在复数空间  $\mathbf{C}^n$  上的连续函数, 并满足如下条件:

(i)  $\mathbf{H}(z)$  在  $\mathbf{C}^n$  上是单叶映射;

(ii)  $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \|H(z)\| \rightarrow \infty$ , 则  $H(z)$  是  $C^n$  上的同胚映射.

定义  $H(z) = [H_1(z), H_2(z), \dots, H_n(z)]^T$  是与系统(1)相关的一个映射, 其中

$$H_k(z) = -d_k(z_k(t)) + \sum_{j=1}^n [a_{kj}f_j(z_j(t)) + b_{kj}f_j(z_j(t - \tau_{kj}(t)))] + J_k, \\ k = 1, 2, \dots, n.$$

若  $H(z)$  是  $C^n$  上的同胚映射, 则显然系统(1)存在唯一平衡点  $z^\#$ .

**假设 1** 假设对所有  $u_k(t), v_k(t) \in \mathbf{C}$ , 存在正数  $\omega_k > 0$ , 使得复数域自反馈函数  $d_k(\cdot)$  满足以下条件:

$$\frac{d_k(u_k(t)) - d_k(v_k(t))}{u_k(t) - v_k(t)} \geq \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

**假设 2** 假设复数域激活函数  $f_k(\cdot)$  满足 Lipschitz 条件, 即存在 Lipschitz 常数  $l_k > 0$ , 使得对所有  $u_k(t), v_k(t) \in \mathbf{C}$ , 不等式  $|f_k(u_k(t)) - f_k(v_k(t))| \leq l_k |u_k(t) - v_k(t)|$  成立,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**假设 3** 假设放大函数  $h_k(z_k(t))$  具有下界, 即假设存在正实数  $\sigma_k$ , 使得放大函数  $h_k(z_k(t))$  满足  $h_k(z_k(t)) \geq \sigma_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$ .

## 2 平衡点的存在性和唯一性

下面采用类似文献[5]中的研究方法, 利用 M 矩阵和同胚映射原理得到确保系统(1)平衡点  $z^\#$  的存在性和唯一性的充分条件.

**定理 1** 若假设 1 和假设 2 是成立的, 且矩阵  $P = (p_{kj})_{n \times n}$  是 M 矩阵, 那么对于任意输入  $J \in C^n$ , 系统(1)存在唯一平衡点  $z^\#$ , 其中

$$\begin{cases} p_{kj} = -0.5 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j, \\ p_{kk} = \omega_k - 0.5 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j, \end{cases} \quad k, j = 1, 2, \dots, n, k \neq j.$$

**证明** 由于矩阵  $P = (p_{kj})_{n \times n}$  是 M 矩阵, 根据引理 1 可知, 存在正向量  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ , 使得

$$\xi_k \left[ \omega_k - 0.5 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j \right] - 0.5 \sum_{j=1}^n \xi_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j > 0, \quad (2)$$

那么存在一个充分小的正数  $\delta > 0$ , 使得下面不等式成立:

$$\xi_k \left[ \omega_k - 0.5 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j \right] - 0.5 \sum_{j=1}^n \xi_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j \geq \delta > 0. \quad (3)$$

下面将证明映射  $H(z)$  是一个同胚映射.

(Step 1) 首先证明  $H_k(z)$  是单叶映射.

若存在  $u, v \in C^n$ , 且  $u \neq v$ , 使得  $H_k(u) = H_k(v)$ , 即

$$-d_k(u_k) + \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj})f_j(u_j) = -d_k(v_k) + \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj})f_j(v_j). \quad (4)$$

将式(4)两边同时乘以  $(u_k - v_k)$ , 并取模, 有

$$|d_k(u_k) - d_k(v_k)| |u_k - v_k| = |u_k - v_k| \left| \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj}) [f_j(u_j) - f_j(v_j)] \right|.$$

考虑到假设 1 和假设 2, 有

$$\begin{aligned} \omega_k |u_k - v_k|^2 &\leq 0.5 |u_k - v_k|^2 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j + \\ &0.5 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j |u_j - v_j|^2. \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)进一步整理, 有

$$\begin{aligned} \left[ \omega_k - 0.5 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j \right] |u_k - v_k|^2 - \\ 0.5 \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j |u_j - v_j|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

即  $\mathbf{P} | \mathbf{u} - \mathbf{v} | \leq 0$ . 由于  $\mathbf{P}$  是  $M$  矩阵, 因此  $\det \mathbf{P} > 0$  且  $\mathbf{P}^{-1}$  存在, 故而有  $| \mathbf{u} - \mathbf{v} |^2 = 0$ , 即  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ . 也就是说  $H_k(z)$  是单叶映射.

(Step 2) 下面证明  $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \| \mathbf{H}(z) \| \rightarrow \infty$ .

令  $\tilde{H}_k(z) = H_k(z) - H_k(0)$ , 其中  $H_k(0) = -d_k(0) + \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj})f_j(0) + J_k$ , 即

$$\tilde{H}_k(z) = H_k(z) - H_k(0) = -[d_k(z_k) - d_k(0)] + \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj})[f_j(z_j) - f_j(0)]. \quad (6)$$

将式(6)两边同时乘以  $z_k^*$ , 有

$$\tilde{H}_k(z) z_k^* = -[d_k(z_k) - d_k(0)] z_k^* + z_k^* \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj}) [f_j(z_j) - f_j(0)]. \quad (7)$$

将式(7)取共轭, 有

$$\tilde{H}_k^*(z) z_k = -[d_k(z_k) - d_k(0)]^* z_k + z_k \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj})^* [f_j(z_j) - f_j(0)]^*. \quad (8)$$

进一步将式(7)和式(8)相加, 并考虑到假设 1 和假设 2, 有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\tilde{H}_k(z) z_k^*] &= \\ &-\operatorname{Re}\{[d_k(z_k) - d_k(0)] z_k^*\} + \operatorname{Re}\left\{z_k^* \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj}) [f_j(z_j) - f_j(0)]\right\} \leq \\ &-\omega_k |z_k|^2 + \left| \operatorname{Re}\left\{z_k^* \sum_{j=1}^n (a_{kj} + b_{kj}) [f_j(z_j) - f_j(0)]\right\} \right| \leq \\ &\left[ -\omega_k + 0.5 \sum_{j=1}^n l_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \right] |z_k|^2 + \\ &0.5 \sum_{j=1}^n l_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) |z_j|^2, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)两边同时乘以  $\xi_k, k = 1, 2, \dots, n$ , 并求和, 得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \xi_k \operatorname{Re}[\tilde{H}_k(z) z_k^*] &\leq \\ &\sum_{k=1}^n \xi_k \left\{ \left[ -\omega_k + 0.5 \sum_{j=1}^n l_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \right] |z_k|^2 + \right. \\ &0.5 \sum_{j=1}^n l_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) |z_j|^2 \left. \right\} \leq \\ &-\delta \sum_{k=1}^n |z_k|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

利用 Hölder 不等式, 进一步整理式(10), 有

$$\begin{aligned} \delta \sum_{k=1}^n |z_k|^2 &\leq \\ &- \sum_{k=1}^n \xi_k \operatorname{Re}[\tilde{H}_k(z)z_k^*] \leq \\ &\max_{1 \leq k \leq n} \{\xi_k\} \sum_{k=1}^n |\tilde{H}_k(z)| \times |z_k^*| \leq \\ &\max_{1 \leq k \leq n} \{\xi_k\} \|\tilde{H}(z)\| \times \|z\|, \end{aligned}$$

即  $\|z\| \leq \delta^{-1} \max_{1 \leq k \leq n} \{\xi_k\} \|\tilde{H}(z)\|$ . 显然当  $\|z\| \rightarrow \infty$  时,  $\|\tilde{H}(z)\| \rightarrow \infty$ , 即  $\|z\| \rightarrow \infty$  时,  $\|H(z)\| \rightarrow \infty$ .

综合(Step 1)和(Step 2)可知: 映射  $H(z)$  是  $C^n$  上的一个同胚映射, 因此系统(1)存在唯一平衡点. □

### 3 平衡点的模指数稳定性条件

接下来将给出判定系统(1)的平衡点  $z^\#$  模指数稳定的充分条件.

**定理 2** 若假设 1~假设 3 是成立的, 且矩阵  $P = (p_{kj})_{n \times n}$  是 M 矩阵, 那么任意外部常输入  $J \in C^n$ , 系统(1)的平衡点  $z^\#$  是模指数稳定的.

**证明** 令  $\tilde{z} = z - z^\#$ , 则系统(1)可改写为

$$\frac{d\tilde{z}_k(t)}{dt} = \tilde{h}_k(\tilde{z}_k(t)) \left\{ -r_k(\tilde{z}_k(t)) + \sum_{j=1}^n [a_{kj}g_j(\tilde{z}_j(t)) + b_{kj}g_j(\tilde{z}_j(t - \tau_{kj}(t)))] \right\}, \quad (11)$$

其中,  $\tilde{h}_k(\tilde{z}_k(t)) = h_k(\tilde{z}_k(t) + z_k^\#)$ ,  $r_k(\tilde{z}_k(t)) = d_k(z_k(t)) - d_k(z_k^\#)$ ,  $g_j(\tilde{z}_j(t)) = f_j(z_j(t)) - f_j(z_j^\#)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . 系统(11)的初始条件为  $\psi_k(s) = \varphi_k(s) - z_k^\#$ ,  $-\tau \leq s \leq 0$ . 由定理 2 的条件可知系统(1)的平衡点  $z^\#$  存在且唯一, 故系统(11)存在唯一平衡点  $\tilde{z} = 0$ .

构造函数

$$\begin{aligned} F_k(\beta) &= \xi_k \left[ -2\omega_k + \frac{\beta}{\sigma_k} + \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j \right] + \\ &\sum_{j=1}^n \xi_j [|a_{kj}| + \exp(\beta\tau) |b_{kj}|] \cdot l_j, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

根据式(2)可知

$$\begin{aligned} F_k(0) &= \xi_k \left[ -2\omega_k + \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j \right] + \\ &\sum_{j=1}^n [\xi_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j] < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

由于  $F_k(\beta)$  是关于  $\beta$  的连续函数, 必然存在常数  $\lambda > 0$ , 使得  $F_k(\lambda) < 0, k = 1, 2, \dots, n$ , 即

$$\begin{aligned} F_k(\lambda) &= \xi_k \left[ -2\omega_k + \frac{\lambda}{\sigma_k} + \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \cdot l_j \right] + \\ &\sum_{j=1}^n \xi_j [|a_{kj}| + \exp(\lambda\tau) |b_{kj}|] \cdot l_j < 0. \end{aligned} \quad (12)$$

选择如下向量 Lyapunov 函数:

$$V_k(\tilde{z}_k(t), t) = \frac{1}{2} \exp(\lambda t) |\tilde{z}_k(t)|^2 = \frac{1}{2} \exp(\lambda t) \bar{\tilde{z}}_k(t) \tilde{z}_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

在不引起混淆的情况下, 将  $V_k(\tilde{z}_k, t)$  记作  $V_k(t), k = 1, 2, \dots, n$ .

计算  $V_k(t)$  沿方程(11)的导数, 并考虑到假设 1~假设 3, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(t) &= \frac{1}{2} \exp(\lambda t) [\lambda |\tilde{z}_k(t)|^2 + \dot{\tilde{z}}_k(t) \tilde{z}_k(t) + \bar{\tilde{z}}_k(t) \dot{\tilde{z}}_k(t)] = \\ &\exp(\lambda t) \tilde{h}_k(\tilde{z}_k(t)) \left\{ \frac{1}{2} \lambda |\tilde{z}_k(t)|^2 + \bar{\tilde{z}}_k(t) \left\{ -r_k(\tilde{z}_k(t)) + \sum_{j=1}^n [a_{kj} g_j(\tilde{z}_j(t)) + \right. \right. \\ &\left. \left. b_{kj} g_j(\tilde{z}_j(t - \tau_{kj}(t))) \right] \right\} \right\} \leq \\ &\tilde{h}_k(\tilde{z}_k(t)) \exp(\lambda t) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\sigma_k} |\tilde{z}_k(t)|^2 - \omega_k |\tilde{z}_k(t)|^2 + \right. \\ &\left. |\tilde{z}_k(t)| \sum_{j=1}^n l_j [ |a_{kj}| |\tilde{z}_j(t)| + |b_{kj}| |\tilde{z}_j(t - \tau_{kj}(t))| ] \right\} \leq \\ &\tilde{h}_k(\tilde{z}_k(t)) \exp(\lambda t) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\sigma_k} |\tilde{z}_k(t)|^2 - \omega_k |\tilde{z}_k(t)|^2 + \right. \\ &0.5 \sum_{j=1}^n l_j [ |a_{kj}| (|\tilde{z}_k(t)|^2 + |\tilde{z}_j(t)|^2) + \\ &\left. |b_{kj}| (|\tilde{z}_k(t)|^2 + |\tilde{z}_j(t - \tau_{kj}(t))|^2) ] \right\} \leq \\ &\tilde{h}_k(\tilde{z}_k(t)) \left\{ \left[ -2\omega_k + \frac{\lambda}{\sigma_k} + \sum_{j=1}^n l_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \right] V_k(t) + \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^n l_j [ |a_{kj}| V_j(t) + \exp(\lambda \tau) |b_{kj}| V_j(t - \tau_{kj}(t))] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

定义曲线  $\zeta = \{ \boldsymbol{\eta}(\chi) : \eta_k = \xi_k \chi, \chi > 0, k = 1, 2, \dots, n \}$  和集合  $\Omega(\boldsymbol{\eta}) = \{ \boldsymbol{q} : \mathbf{0} \leq \boldsymbol{q} \leq \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \in \zeta \}$ . 显然当  $\chi > \chi', \Omega(\boldsymbol{\eta}(\chi)) \supset \Omega(\boldsymbol{\eta}(\chi'))$ .

下面将证明系统(11)的零解是模指数稳定的. 令

$$\xi_{\max} = \max_{1 \leq k \leq n} \{ \xi_k \}, \quad \xi_{\min} = \min_{1 \leq k \leq n} \{ \xi_k \}, \quad \chi_0 = \varepsilon \|\boldsymbol{\psi}\|^2 / \xi_{\min},$$

其中  $\varepsilon > 1$  是一个常数, 则

$$\left\{ \boldsymbol{V} : V_k(s) = \frac{1}{2} \exp(\lambda s) |\boldsymbol{\psi}_k(s)|^2, -\tau \leq s \leq 0 \right\} \subset \Omega(\boldsymbol{\eta}_0(\chi_0)),$$

即

$$V_k(s) = \frac{1}{2} \exp(\lambda s) |\boldsymbol{\psi}_k(s)|^2 < \xi_k \chi_0, \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

进一步, 可得  $V_k(t) < \xi_k \chi_0, t \geq 0$ . 若该不等式不成立, 那么存在某个  $k$  和时刻  $t_1 > 0$ , 使得  $V_k(t_1) = \xi_k \chi_0, \dot{V}_k(t_1) \geq 0, V_j(t_1) \leq \xi_j \chi_0, j = 1, 2, \dots, n$ . 将其代入到不等式(13)中, 并考虑到不等式(12), 有

$$\dot{V}_k(t_1) \leq \tilde{h}_k(\tilde{z}_k(t_1)) \left\{ \left[ -2\omega_k + \frac{\lambda}{\sigma_k} + \sum_{j=1}^n l_j (|a_{kj}| + |b_{kj}|) \right] \xi_k \chi_0 + \right.$$

$$\sum_{j=1}^n l_j [ | a_{kj} | + \exp(\lambda \tau) | b_{kj} | ] \xi_j \chi_0 \} < 0,$$

这与假设  $\dot{V}_k(t_1) \geq 0$  是矛盾的, 因此有  $V_k(t) < \xi_k \chi_0, t \geq 0$ , 即

$$| z_k(t) | < [ 2\xi_k \chi_0 \exp(-\lambda t) ]^{0.5}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

进而有

$$\| z(t) \| < ( 2\varepsilon \| \psi \| ^2 \xi_{\max} / \xi_{\min} )^{0.5} \exp(-0.5\lambda t) = \Gamma \| \psi \| \exp(-0.5\lambda t),$$

$$\Gamma = ( 2\varepsilon \xi_{\max} / \xi_{\min} )^{0.5}.$$

根据定义 1 知, 系统(11)的零解  $\tilde{z} = \mathbf{0}$  是模指数稳定的, 即系统(1)的平衡点  $z^\#$  是模指数稳定的. □

**注 1** 文献[15]和[17]分别对具有变时滞的实数域 Cohen-Grossberg 神经网络和实数域 Hopfield 进行了研究. 复数域 Cohen-Grossberg 神经网络系统(1)在模型上包含文献[15,17]所研究的模型, 故本文所研究的模型更具有一般性. 此时, 本文的研究方法和所建立的判据仍然适用于相应的实值神经网络.

**注 2** 文献[18]研究了一类具有变时滞的复数域 Cohen-Grossberg 神经网络的指数稳定性. Zhao 等<sup>[18]</sup>所研究的模型中的自反馈函数是线性函数, 即  $d_k(z_k(t)) = m_k z_k(t), m_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$ . 本文所研究的自反馈函数是非线性函数, 因此复数域 Cohen-Grossberg 神经网络系统(1)包含文献[18]中的数学模型(1). 此外, 当系统(1)中放大函数  $h_k = 1$  且自反馈函数为线性函数时, 系统(1)与文献[5]中所研究的复数域神经网络系统(19)是相同的. 容易验证本文所得结论包含文献[5]中的推论 1.

### 4 数值算例

考虑如下 2 维复数域 Cohen-Grossberg 神经网络系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = 3 \left\{ -6z_1(t) + \sum_{j=1}^2 [ a_{1j} f_j(z_j(t)) + b_{1j} f_j(z_j(t - \tau_{1j}(t))) ] + J_1 \right\}, \\ \dot{z}_2(t) = 4 \left\{ -5z_2(t) + \sum_{j=1}^2 [ a_{2j} f_j(z_j(t)) + b_{2j} f_j(z_j(t - \tau_{2j}(t))) ] + J_2 \right\}, \end{cases} \quad (14)$$

其中  $z_1(t) = x_1(t) + y_1(t)i, z_2(t) = x_2(t) + y_2(t)i$ .

令系统(14)中的时延为

$$\tau_{11} = 0.025 - 0.015\sin t, \quad \tau_{12} = 0.025 + 0.015\sin t,$$

$$\tau_{21} = 0.03 - 0.01\cos t, \quad \tau_{22} = 0.02 + 0.01\cos t.$$

激活函数为

$$f_1(z_1(t)) = 2 \frac{1 - e^{-\bar{z}_1(t)}}{1 + e^{-\bar{z}_1(t)}}, \quad f_2(z_2(t)) = \frac{0.6}{1 + e^{-\bar{z}_2(t)}}.$$

假设系统(14)中的关联矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.0 + 0.5i & 1.0 + 2.0i \\ 0.5 + 1.5i & -1.0 + 0.8i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.0 + 0.5i & 1.0 - 1.5i \\ 0.6 + 1.3i & -0.9 + 1.2i \end{bmatrix}.$$

假设该系统的初始条件为

$$\varphi_1(s) = 0.5 - 0.6i, \quad \varphi_2(s) = -1 + 0.9i, \quad s \in [-0.04, 0].$$

经计算有  $\omega_1 = 6, \omega_2 = 5, l_1 = 1, l_2 = 0.15$ . 进而可知矩阵  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3.579 & -0.313 \\ -1.507 & 2.285 \end{bmatrix}$ . 显然矩阵  $\mathbf{P}$  是 M 矩阵. 根据定理 1 和定理 2 可以得出结论: 系统(14)存在唯一平衡点, 且该平衡点

是模指数稳定的.利用 MATLAB 软件对系统(14)的平衡点的动态行为进行了数值仿真.仿真结果显示:该系统存在唯一平衡点(即零解),并且该平衡点在 0.5 s 之内便可实现收敛(图 1).仿真结果进一步验证了定理 1 和定理 2 的正确性.

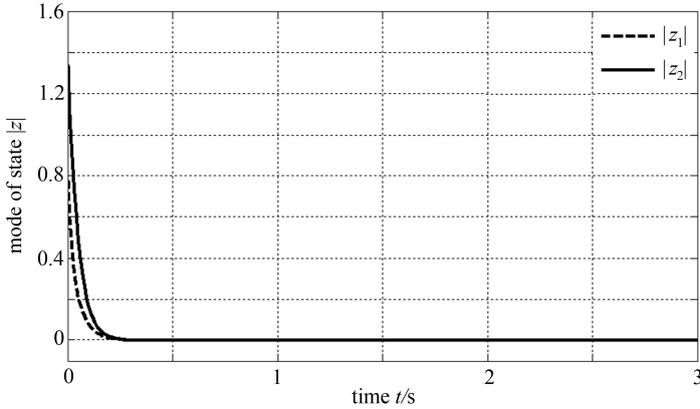


图 1 系统(14)神经元模的变化曲线

Fig. 1 Amplitude curves of neuro states in eq. (14)

## 5 结 论

本文对一类具有变时滞的复数域 Cohen-Grossberg 神经网络平衡点的存在性、唯一性和模指数稳定性进行了分析.激活函数在满足 Lipschitz 条件下,利用 M 矩阵和同胚映射相关原理,得到了确保该神经网络系统平衡点的存在性和唯一性的充分条件.然后,通过构造适当的微分-积分不等式,利用矢量 Lyapunov 函数法和 M 矩阵理论,得到了确保该系统平衡点模指数稳定的充分条件.本文所得到的判据是显式的,在实际应用时便于检验.最后,通过一个数值仿真算例验证了本文结论的正确性和可行性.

**致谢** 本文作者衷心感谢汽车测控与安全四川省重点实验室研究基金(szjj2017-074);流体及动力机械教育部重点实验室研究基金(szjj2016-007)对本文的资助.

## 参考文献(References):

- [1] Nitta T. *Complex-Valued Neural Networks; Utilizing High-Dimensional Parameters* [M]. New York: Information Science Reference, 2009: 15-32.
- [2] JIANG Dan-chi. Complex-valued recurrent neural networks for global optimization of beam-forming in multi-symbol MIMO communication systems [C]//*Proceedings of International Conference on Conceptual Structurtion*. Shanghai: Springer, 2008: 1-8.
- [3] HU Jin, WANG Jun. Global stability of complex-valued recurrent neural networks with time-delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, **23**(6): 853-864.
- [4] ZHANG Zi-ye, LIN Chong, CHEN Bing. Global stability criterion for delayed complex-valued recurrent neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, **25**(9): 1704-1708.
- [5] 徐晓惠, 张继业, 赵玲. 一类混合时滞复数域神经网络的动态行为分析[J]. *西南交通大学学报*, 2014, **49**(3): 470-476. (XU Xiao-hui, ZHANG Ji-ye, ZHAO Ling. Dynamic behaviors analysis

- of a class of complex-valued neural networks with mixed delays[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2014, **49**(3): 470-476.(in Chinese)
- [6] XU Xiao-hui, ZHANG Ji-ye, SHI Ji-zhong. Dynamical behavior analysis of delayed complex-valued neural networks with impulsive effect[J]. *International Journal of Systems Science*, 2017, **48**(4): 686-694.
- [7] 闫欢, 宋乾坤, 赵振江. 时间标度上时滞脉冲复数域神经网络的全局稳定性[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(11): 1191-1203.(YAN Huan, SONG Qian-kun, ZHAO Zhen-jiang. Global stability of impulsive complex-valued neural networks with time delay on scales[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(11): 1191-1203.(in Chinese))
- [8] HUANG Yu-jiao, ZHANG Hua-guang, WANG Zhan-shan. Multistability of complex-valued recurrent neural networks with real-imaginary-type activation functions[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **229**: 187-200.
- [9] LIU Xi-wei. Synchronization of delayed complex-valued networks via aperiodically intermittent pinning control[C]//*Proceeding of the 2015 IEEE International Conference on Information and Automation*. Lijiang, China, 2015: 1246-1251.
- [10] LI Xiao-di, Rakkiyappan R, Velmurugan G. Dissipativity analysis of memristor-based complex-valued neural networks with time-varying delays[J]. *Information Sciences*, 2015, **294**: 645-665.
- [11] SONG Qian-kun, ZHANG Ji-ye. Global exponential stability of impulsive Cohen-Grossberg neural network with time-varying delays[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, **9**(2): 500-510.
- [12] LI Liang-liang, JIAN Ji-gui. Exponential convergence and Lagrange stability for impulsive Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, **277**(C): 23-35.
- [13] Tojtovska B, Janković S. On some stability problems of impulsive stochastic Cohen-Grossberg neural networks with mixed time delays[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **239**: 211-226.
- [14] YANG Zhi-guo, HUANG Yu-mei. Exponential dissipativity of impulsive Cohen-Grossberg neural networks with mixed delays[J]. *Journal of Sichuan University(Natural Science Edition)*, 2010, **47**(3): 464-468.
- [15] ZHANG Ji-ye, Suda Y, Komine H. Global exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks with variable delays[J]. *Physics Letters*, 2005, **338**(1): 44-50.
- [16] HU Jin, ZENG Chun-nan. Adaptive exponential synchronization of complex-valued Cohen-Grossberg neural networks with known and unknown parameters[J]. *Neural Networks*, 2017, **86**: 90-101.
- [17] ZHANG Ji-ye. Global exponential stability of interval neural networks with variable delays[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2006, **19**(11): 1222-1227.
- [18] ZHAO Zhen-jiang, SONG Qian-kun. Stability of complex-valued Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays[C]//*13th International Symposium on Neural Networks*. Russia; Springer, 2016: 168-176.

# Dynamical Behavior Analysis of a Class of Complex-Valued Neural Networks With Time-Varying Delays

XU Xiao-hui<sup>1,2</sup>, SONG Qian-kun<sup>3</sup>, ZHANG Ji-ye<sup>4</sup>, SHI Ji-zhong<sup>5</sup>, ZHAO Ling<sup>2</sup>

(1. *Key Laboratory of Fluid and Power Machinery, Ministry of Education, Xihua University, Chengdu 610039, P.R.China;*

2. *Key Laboratory of Automobile Measurement and Control & Safety, Xihua University, Chengdu 610039, P.R.China;*

3. *College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China;*

4. *State Key Laboratory of Traction Power(Southwest Jiaotong University), Chengdu 610031, P.R.China;*

5. *College of Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua, Zhejiang 321004, P.R.China)*

(Contributed by SONG Qian-kun, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The dynamical behavior of a class of complex-valued Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays was studied. It was supposed that the activation functions satisfied the Lipschitz condition and the amplification functions had only the lower bounds. The sufficient conditions ensuring the existence and the uniqueness of the equilibrium point of the system were acquired by means of the M matrix and the homeomorphic mapping. Furthermore, based on the vector Lyapunov function method and the inequality technique the criteria were obtained to judge the mode exponential stability of the equilibrium point of the system. The form of the obtained sufficient conditions is simple, and is easy to be verified in practice. The presented results generalize the existing ones. Finally a numerical example through simulation was given to verify the correctness and feasibility of the obtained results.

**Key words:** Cohen-Grossberg neural network; complex-valued domain; mode stability; exponential stability; time-varying delay; vector Lyapunov function method

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (11402214; 51375402; 11572264; 61773004)

引用本文/Cite this paper:

徐晓惠, 宋乾坤, 张继业, 施继忠, 赵玲. 一类变时滞复数 Cohen-Grossberg 神经网络的动态行为分析 [J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(12): 1389-1398.

XU Xiao-hui, SONG Qian-kun, ZHANG Ji-ye, SHI Ji-zhong, ZHAO Ling. Dynamical behavior analysis of a class of complex-valued neural networks with time-varying delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(12): 1389-1398.