

磁流变弹性体的力-磁耦合模型*

李 旭, 万 强, 史平安

(中国工程物理研究院 总体工程研究所, 四川 绵阳 621999)

摘要: 以磁偶极子理论为基础,利用最小势能原理,从微观角度出发,研究了磁流变弹性体在单向载荷作用下的力-磁耦合行为,提出了可以描述该行为的数学模型,分析了磁致应力非线性变化的规律和机理.该模型从磁流变弹性体的微观结构出发,考虑了所有铁磁颗粒的磁化特性,以及颗粒之间、链结构之间的相互作用,推导了磁相互作用能的表达式,采用 Mooney-Rivlin 模型给出了弹性势能表达式.最后运用最小势能原理,建立了描述磁流变弹性体在均匀磁场中力-磁耦合行为的数学模型.该模型与实验结果吻合较好,并能从微观层面对磁流变弹性体的磁致应力变化规律做出解释.研究发现,磁流变弹性体的磁致应力在不同磁场下的变化规律不同,与材料内部的微结构紧密相关,铁磁颗粒之间及链结构之间的相互作用是导致磁致应力非线性变化的主要原因.

关键词: 磁流变弹性体; 理论模型; 力-磁耦合; 磁致应力

中图分类号: TB381; O343

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380021

引 言

磁流变弹性体(magnetorheological elastomers, MREs)是将微米级的铁磁颗粒分散到高分子聚合物中形成的一类智能复合材料,材料的模量、刚度、阻尼等物理性质能够随着外磁场的变化而快速可逆的变化^[1-3],这种独特的性质使其在传感器^[4]、振动控制^[5]、生物医药^[6]、智能器件^[7]等方面有着广泛的应用.根据内部微结构的不同,MREs 可以分为两类:一类为各向同性 MREs,铁磁颗粒在基体中随机分布;另一类为各向异性 MREs,由于固化时材料置于一定大小的磁场中,成型后基体内部的铁磁颗粒排列成链状,如图 1 所示^[8].

国内外学者对 MREs 进行了大量的实验和理论研究^[9-12],其中,MREs 的力-磁耦合机理是研究的热点之一.有关的理论工作主要分为两个方面,分别为以磁偶极子理论为基础或引入自由能函数以连续介质力学理论为基础的研究.铁磁流体动力学表明,当铁磁颗粒处在磁场中时,在磁场方向上,颗粒的两端会产生极(poles),也称为磁荷.当两个颗粒靠近时,会产生相互作用力^[13].基于此,Jolly 等^[1]根据 MREs 中铁磁颗粒的链状结构,假设铁磁颗粒为理想的偶极子,考虑相邻两个偶极子间的相互作用,建立了磁偶极子模型来表征 MREs 的剪切性能.Shen 等^[14]对 Jolly 模型进行了改进,考虑整条铁磁颗粒链的磁化及其相互作用,建立了更加准确的模型.磁偶极子模型在粒子间距较小时具有一定的局限性,为此,Liu 等^[15]基于传统磁偶极子

* 收稿日期: 2017-01-17; 修订日期: 2017-04-03

基金项目: 国家自然科学基金(11372295)

作者简介: 李旭(1990—),男,硕士生(E-mail: lixuchn@126.com);

万强(1979—),男,研究员,硕士生导师(通讯作者. E-mail: wanzhenyu@126.com).

模型,建立了近距铁磁颗粒间相互作用的力学模型.Ivaneyko 等^[16-17]根据铁磁颗粒在基体中的分布规律,详细分析了邻近粒子间的作用,建立了矩形晶格模型,用来表征 MREs 在均匀磁场下的力-磁耦合性能.Chen 等^[18]基于代表性体积单元方法,建立了多尺度模型,详细分析了 MREs 拉伸模量的变化规律.以磁偶极子理论为基础建立的各种模型,从微观上解释了磁流变机理,然而,此类模型仅考虑同一条链结构或相邻颗粒间的相互作用,忽略了链与链之间的影响,在铁磁颗粒含量较高时误差较大,也不能准确表征 MREs 的大变形特点.特别是对实验中观察到的磁致应力非线性变化的规律^[19-20],以上模型无法给出解释.除了以磁偶极子理论为基础的研究外,一些学者引入自由能函数,将磁场相关的控制方程和位移场方程直接耦合在一起,运用经典的连续介质力学理论来研究 MREs 的力-磁耦合特性^[21-25],但在分析推导过程中,对模型做了大量的简化,一定程度上忽略了力-磁耦合的微观机理.

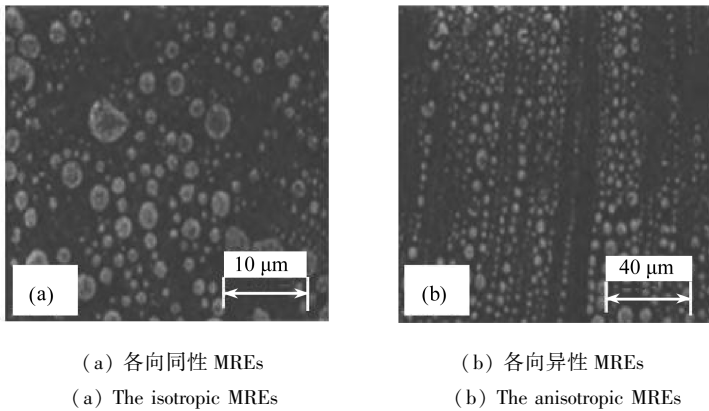


图 1 MREs 的微观结构^[8]

Fig. 1 Micro-structures of MREs^[8]

本文从 MREs 的微观结构出发,以磁偶极子理论为基础,运用最小势能原理建立了能够较准确地反映 MREs 在单向载荷作用下力-磁耦合特性的数学模型.模型充分考虑了每条链结构中所有铁磁颗粒的磁化特性和相互作用以及链结构之间的相互影响.首先,分析了铁磁颗粒的磁化过程,计算出耦合磁场的大小.然后,分别推导出 MREs 铁磁颗粒的磁相互作用能和弹性势能表达式,运用最小势能原理建立了力-磁耦合数学模型.最后,利用建立的模型详细分析了不同磁场下 MREs 的磁致应力变化规律以及非线性特点,通过与实验结果的对比,验证了该模型的准确性.

1 MREs 铁磁颗粒的磁化及耦合磁场的计算

MREs 的力-磁耦合性能与自身的磁学特性密切相关.MREs 处于磁场环境中,分散在基体内的铁磁颗粒被磁化后会形成磁偶极子,并产生相互作用力,使得材料的宏观力学特性发生变化.现代铁磁学理论表明,铁磁材料的磁化是一个复杂的过程,并与多种因素如外部温度、铁磁晶粒大小和取向、机械加工、热处理条件等有关^[26].要准确地描述 MREs 的力-磁耦合性能,首先就需要准确地建立磁化模型并得出耦合磁场.

1.1 铁磁颗粒的磁化

常用的磁化模型有 Frolich-Kennelly 经验模型、分段磁化模型和指数磁化模型^[3,6,27]等,这些磁化模型能够在一定范围内表征铁磁颗粒的磁化过程,但均有一定的局限性.

铁磁颗粒的磁化是内部多畴结构从无序状态变为有序状态的过程.在没有外磁场时,铁

磁颗粒内部的磁畴方向是随机的,使得颗粒的宏观磁矩为零.在外磁场作用下,磁畴结构发生畴转和壁移,方向逐步趋于外磁场方向并最终达到饱和磁化状态,在宏观表现出一定大小的磁矩.根据 Langevin 顺磁理论^[26],铁磁颗粒的磁化强度为

$$\mathbf{M} = Nm_0 \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right), \quad (1)$$

其中 $\alpha = (\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{H}) / (kT)$ 为 Langevin 参数, m_0 为原子的固有磁矩, H 为外磁场强度, k 为 Boltzmann 常数, T 为温度, N 为单位体积内的原子数目,铁磁颗粒的饱和磁化强度 $M_s = Nm_0$.对于同一种铁磁材料, m_0 的大小是一定的.令参数 $A = |m_0|/k$, 则式(1)可写为

$$\mathbf{M} = M_s \left(\coth \left(\frac{AH}{T} \right) - \frac{T}{AH} \right). \quad (2)$$

式(2)即为铁磁颗粒的磁化模型,式中 H 表示磁场强度 \mathbf{H} 的大小.模型中各参数均有其物理意义,可以通过实验或计算得到.从图 2 可以看出,模型能够准确地描述铁磁颗粒的磁化过程.

1.2 MREs 全耦合磁场分析

MREs 置于磁场环境中,铁磁颗粒被磁化后会产生一定大小的感应磁场,感应磁场会对原磁场产生一定的影响,因此磁场的计算是一个耦合迭代的过程.Jolly 等^[1]在研究 MREs 时,仅考虑了单一外磁场的影响,导致模型与实验结果有 20% 左右的误差.Shen 等^[14]在此基础上考虑了整条偶极子链中铁磁颗粒的影响,建立了耦合场模型.Liu 等^[15]采用颗粒动力学方法,通过多次迭代,计算出了耦合的磁场,结果比较精确,但计算效率不高.本文充分考虑同一条链结构中的铁磁颗粒以及链结构之间的影响,通过理论分析计算,推导出耦合磁场的计算表达式.

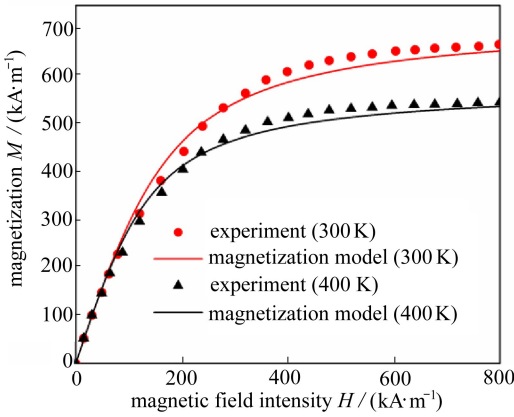


图 2 磁化模型与铁磁颗粒的磁化实验数据^[15]对比

Fig. 2 The magnetization model and the experimental data^[15]

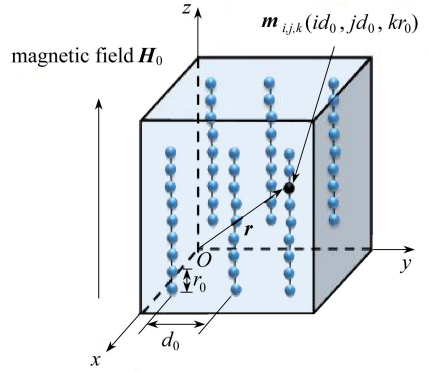


图 3 MREs 内部的铁磁颗粒分布

Fig. 3 Distribution of particles in MREs

如图 3 所示,在 MREs 材料中,同一条链结构中相邻两个颗粒间的距离为 r_0 , 相邻两条链的距离为 d_0 .位置矢量为 \mathbf{r} ,编号为 (i, j, k) 的颗粒在外磁场强度为 \mathbf{H}_0 的磁场中被磁化后磁矩为 $\mathbf{m}_{i,j,k}$.颗粒 (i, j, k) 的坐标为 (id_0, jd_0, kr_0) , 在 origin 处产生的感应磁场为

$$\mathbf{H}_{i,j,k} = -\frac{\mathbf{m}_{i,j,k}}{4\pi r^3} + \frac{3}{4\pi r^5}(\mathbf{m}_{i,j,k} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}, \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{r} = id_0\mathbf{e}_1 + jd_0\mathbf{e}_2 + kr_0\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{m}_{i,j,k} = m_0\mathbf{e}_3, \\ r = |\mathbf{r}|, \end{cases} \quad (4)$$

上式中, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 分别为坐标轴 x, y, z 方向的单位矢量, m_0 为每个颗粒的平均磁矩大小, 当颗粒的磁化强度为 M , 颗粒平均直径为 D , 磁矩 m_0 为

$$m_0 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 M. \quad (5)$$

将式(4)、(5)代入式(3)中, 得

$$\mathbf{H}_{i,j,k} = -\frac{m_0}{4\pi r^3} \mathbf{e}_3 + \frac{3}{4\pi r^5} m_0 kr_0 (id_0\mathbf{e}_1 + jd_0\mathbf{e}_2 + kr_0\mathbf{e}_3). \quad (6)$$

分析式(6)可知, \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 方向的磁场分量按 r^5 衰减, \mathbf{e}_3 方向的磁场分量按 r^3 衰减, 且 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 方向的感应磁场分量关于 \mathbf{e}_3 对称, 式(6)可进一步简化为

$$\mathbf{H}_{i,j,k} = -\frac{m_0}{4\pi r^3} \mathbf{e}_3 + \frac{3}{4\pi r^5} m_0 k^2 r_0^2 \mathbf{e}_3. \quad (7)$$

总的磁场为外磁场与所有颗粒产生的感应磁场的叠加, 即

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + 8 \sum_i \sum_j \sum_k \mathbf{H}_{i,j,k}. \quad (8)$$

将式(7)代入式(8)中, 得

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + 8 \sum_i \sum_j \sum_k \frac{2m_0}{\pi} [3k^2 r_0^2 (i^2 d_0^2 + j^2 d_0^2 + k^2 r_0^2)^{-5/2} - (i^2 d_0^2 + j^2 d_0^2 + k^2 r_0^2)^{-3/2}] \mathbf{e}_3. \quad (9)$$

由式(9)即可计算全耦合的磁场大小。

2 力-磁耦合数学模型的建立

2.1 磁相互作用能

当施加外磁场时, MREs 由于磁性颗粒之间作用, 会产生磁相互作用能. MREs 材料沿链结构方向表现出各向异性, 垂直于链方向为横观各向同性, 不失一般性, 选取如图 4 所示的代表性体积单元作为研究对象. 代表性体积单元的 x 和 y 方向的尺寸为 nd_0 , z 方向的尺寸为 nr_0 , 其中 n 为常数. 材料在外磁场 \mathbf{H}_0 和外力 \mathbf{F} 的共同作用下发生变形, 3 个主方向上的伸长率分别为 λ_1, λ_2 和 λ_3 .

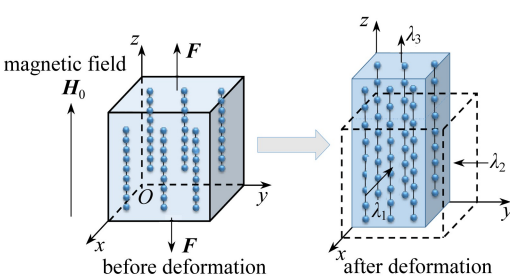


图 4 在磁场和外力共同作用下 MREs 的变形

Fig. 4 Deformation of MREs under field and external forces

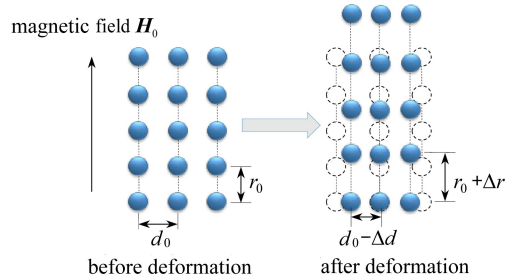


图 5 铁磁颗粒以及链结构之间的相互作用

Fig. 5 Interactions among particles and chains

MREs 为一种高分子基复合材料,与橡胶类似,具有不可压缩性.因此,3 个方向的主伸长率满足

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1. \quad (10)$$

令

$$\lambda_3 = \lambda, \quad (11)$$

则可得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (12)$$

材料的宏观变形会导致内部微观结构的变化,同一条链中的铁磁颗粒间的距离和相邻链间的距离都会发生改变.如图 5 所示,变形后,同一条链结构中,相邻两颗粒间的距离增加 Δr ,相邻两条链结构间的距离减少 Δd .铁磁颗粒在磁场中被磁化形成磁偶极子,由文献[13,28]可知,空间相对位置为 \mathbf{r} ,磁矩分别为 \mathbf{m}_1 和 \mathbf{m}_2 的偶极子磁相互作用能为

$$E = -\frac{\mu_0 \mu_1 \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \mu_1}{4\pi r^5} (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}), \quad (13)$$

其中 μ_0 为真空磁导率, μ_1 为基体的相对磁导率.对于橡胶基体,取 $\mu_1 = 1$.

在 z 轴方向上,总伸长量为 $nr_0(\lambda - 1)$,一条链中偶极子数目为 n ,则相邻两偶极子间的距离增量为

$$\Delta r = \frac{nr_0(\lambda - 1)}{n} = r_0(\lambda - 1). \quad (14)$$

当磁场和链结构的方向一致时,一条链中偶极子的磁矩方向均与 \mathbf{H}_0 同向,大小均为 m_0 ,可由式(5)求得.由式(13),整条链结构中,距离为 $r_k = k(r_0 + \Delta r)$ 的所有偶极子对的能量为

$$E_{r_k} = \frac{\mu_0 m_0^2}{2\pi r_k^3} (n - k + 1) = \frac{\mu_0 m_0^2}{2\pi (r_0 + \Delta r)^3} \frac{1}{k^3} (n - k + 1). \quad (15)$$

链的总数目为 n^2 ,所以总的磁相互作用能为

$$E_r = n^2 \sum_{k=1}^n E_{r_k} = \frac{n^2 \mu_0 m_0^2}{2\pi r_0^3 \lambda^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} (n - k + 1). \quad (16)$$

在 x 轴和 y 轴方向上,材料侧面收缩会引起链结构之间相对位置的变化,从而引起磁能的改变.材料侧面的收缩量为 $nd_0(1 - 1/\sqrt{\lambda})$,链结构垂直方向上的偶极子数为 n ,则水平相邻两偶极子间的距离变化量为

$$\Delta d = \frac{nd_0(1 - 1/\sqrt{\lambda})}{n} = \frac{\sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda}} d_0. \quad (17)$$

所有距离为 $d_i = i(d_0 - \Delta d)$ 的链间的磁能为

$$E_{d_i} = -\frac{\mu_0 m_0^2}{4\pi d_i^3} (n - i + 1) = -\frac{\mu_0 m_0^2 \lambda^{3/2}}{4\pi d_0^3} \frac{1}{i^3} (n - i + 1). \quad (18)$$

所以,由侧面收缩效应引起的总的磁相互作用能为

$$E_d = n^2 \sum_{i=1}^n E_{d_i} = -\frac{n^2 \mu_0 m_0^2 \lambda^{3/2}}{4\pi d_0^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^3} (n - i + 1). \quad (19)$$

需要注意的是,式(16)和式(19)能量的符号相反,这是因为沿 z 轴方向上的偶极子间表现出引力,磁相互作用能为正值;沿 x 轴或 y 轴方向上的偶极子间表现出斥力,磁相互作用能

为负值.则在磁场中,MREs 磁能密度(单位体积的磁能)为

$$E_m = \frac{E_r + 2E_d}{V}, \quad (20)$$

式中 $V = n^3 r_0 d_0^2$ 为代表性单元的体积.将式(16)、(19)代入式(20)中,得磁能密度为

$$E_m = \frac{n\mu_0 m_0^2}{2\pi d_0^2 r_0} \left(\frac{1}{r_0^3 \lambda^3} - \frac{1}{d_0^3} \lambda^{3/2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} (n - k + 1). \quad (21)$$

代表性体积单元的尺寸选取要合理,即常数 n 取值要合理,所求的磁能密度才能够满足精度要求.当 n 取足够大时,能量密度收敛于稳定值.简单说明如下,令

$$E_0 = \frac{\mu_0 m_0^2}{2\pi d_0^2 r_0} \left(\frac{1}{r_0^3 \lambda^3} - \frac{1}{d_0^3} \lambda^{3/2} \right). \quad (22)$$

将 E_m 以 E_0 为标准无量纲化,通过 MATLAB 数值计算,得到随 n 值变化的能量密度及相对误差,如图 6 和图 7 所示.可以看出,能量密度最后收敛于稳定值,且当代表性体积单元的尺寸为 MREs 微观结构尺寸的 200 倍以上时,能量密度的相对误差小于 0.5%,式(21)有足够的精确度.

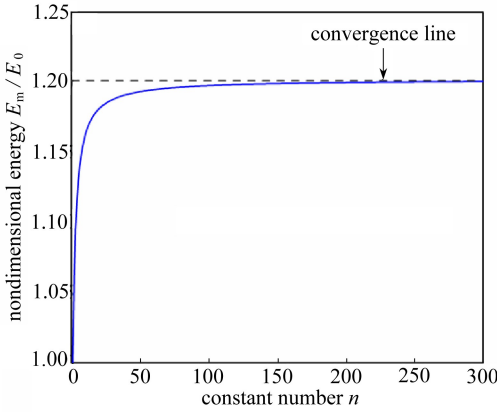


图 6 MREs 的能量密度随 n 的变化

Fig. 6 Energy density of MREs

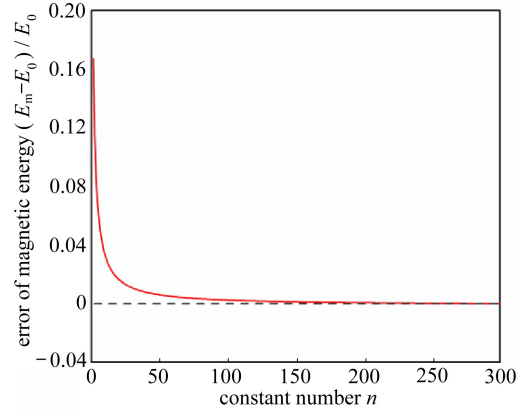


图 7 MREs 能量密度的误差

Fig. 7 The error of energy density

2.2 MREs 的弹性势能

MREs 内部铁磁颗粒看作是刚性的,颗粒与基体会产生拉、压等作用,引起 MREs 材料弹性势能的变化.在无磁场条件下,MREs 是一种颗粒增强的橡胶材料,可以用超弹性材料的势能函数来描述其在无磁场时的力学性能^[14].通常,弹性势能函数是应变张量的函数,即

$$E_e = E_e(I_1(\mathbf{b}), I_2(\mathbf{b}), I_3(\mathbf{b})), \quad (23)$$

或

$$E_e = E_e(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})), \quad (24)$$

其中, \mathbf{b} 为左 Cauchy-Green 变形张量, \mathbf{C} 为右 Cauchy-Green 变形张量, I_1, I_2, I_3 分别是变形张量的第一、第二、第三不变量,满足如下关系:

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 = (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 + (\lambda_3 \lambda_1)^2, \\ I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{cases} \quad (25)$$

通过对超弹性材料的大量实验和理论研究,国内外学者给出了多种不同形式的弹性势能

函数.本文采用两参数的 Mooney-Rivlin 模型来描述 MREs 的弹性势能,即

$$E_e = c_{10}(I_1 - 3) + c_{01}(I_2 - 3), \quad (26)$$

式中 c_{10} 和 c_{01} 为材料参数.

在简单拉压条件下,将式(25)代入式(26)中,得到弹性势能为

$$E_e = c_{10}(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3) + c_{01}(2\lambda + \lambda^{-2} - 3). \quad (27)$$

2.3 力-磁耦合数学模型

在磁场和外力共同作用下,MREs 的能量是无磁场时的弹性势能与磁相互作用能的叠加^[14,19,21],体系总的能量为磁相互作用能、弹性势能和外力功之和,即

$$\Pi = E_m + E_e + \int_1^\lambda \sigma d\lambda. \quad (28)$$

MREs 在磁场中处于能量平衡时,满足最小势能原理^[29],即

$$\delta\Pi = 0. \quad (29)$$

将式(20)、(27)代入式(29)中,可以得出 MREs 的应力与伸长率之间的关系:

$$\sigma = \frac{3n\mu_0 m_0^2}{2\pi d_0^2 r_0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} (n-k+1) \left(\frac{1}{r_0^3 \lambda^4} \right) + \frac{3n\mu_0 m_0^2}{2\pi d_0^2 r_0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} (n-k+1) \left(\frac{1}{2d_0^3} \lambda^{1/2} \right) + 2[c_{10}(\lambda - \lambda^{-2}) + c_{01}(1 - \lambda^{-3})]. \quad (30)$$

对于一维拉伸情况,应变与伸长率 λ 之间满足关系

$$\varepsilon = \lambda - 1. \quad (31)$$

式(30)即为表征 MREs 在单向载荷作用下力-磁耦合特性的数学模型.该等式右边包含三项之和,分别记为 σ_r 、 σ_d 和 σ_e ,这3部分应力产生的机理是不同的. σ_r 是由每条链结构中的铁磁颗粒相互作用引起的,而 σ_d 是由链结构之间的相互作用产生的, σ_e 是铁磁颗粒与基体相互作用产生的应力.有磁场与无磁场时应力的差值为磁致应力 σ_m ,即式(30)前两项之和

$$\sigma_m = \sigma_r + \sigma_d. \quad (32)$$

该模型中,MREs 的微观参数 r_0 可由文献[14]求得,铁磁颗粒的体积含量百分比为 ϕ ,颗粒的直径为 D ,单位体积内的颗粒总数为 n^3 ,参数之间满足关系式

$$(n^3 d_0^2 r_0) \phi = n^3 \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right], \quad (33)$$

进一步简化得

$$\phi = \frac{\pi D^3}{6d_0^2 r_0}. \quad (34)$$

3 模型的验证与讨论

3.1 模型的验证

从 MREs 的微观结构出发,考虑整条链结构中所有铁磁颗粒间的相互作用以及链结构之间的相互影响,提出了一种表征 MREs 力-磁耦合特性的数学模型.该模型建立了 MREs 的微观结构和宏观力学性能之间的联系,解释了 MREs 的力-磁耦合机理.

为了验证本文所提出的模型的合理性与准确性,将其与实验结果^[19]进行对比.图8给出了磁场分别为 0, 123 kA/m、铁磁颗粒体积含量为 15% 的 MREs 的应力-应变关系,可以看出,理论模型的预测结果与实验结果吻合较好,说明该模型能够准确描述 MREs 的拉伸性能.

图9给出了不同磁场下铁磁颗粒体积含量 25% 的 MREs 磁致应力与应变的关系.从图中

可以看出,在同一磁场下,随着应变的增加,磁致应力的变化并不是单调的;在不同磁场下,磁致应力的变化规律有所不同,这是由 MREs 内部的微结构决定的。可以看出,本构模型预测结果与实验数据吻合较好,说明本文所建立的模型能够准确反应磁致应力的变化规律。以图中点划线为分界线,分界线右下方区域的磁致应力规律都能用文中的模型来准确预测,但在分界线左上方的区域,模型与实验结果有一定的误差,这也是目前理论模型的共同问题,仍有待深入研究。

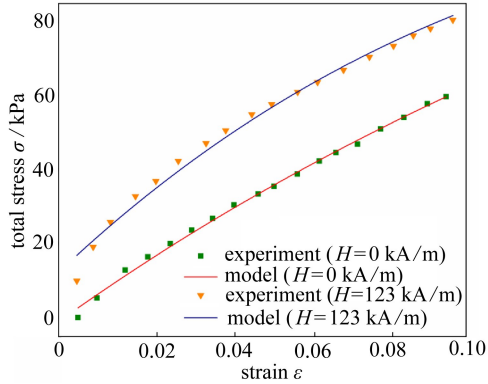


图 8 铁磁颗粒体积含量 15% 的 MREs 在不同磁场下的总体应力

Fig. 8 The total stress of MREs with 15% vol particles under different magnetic fields

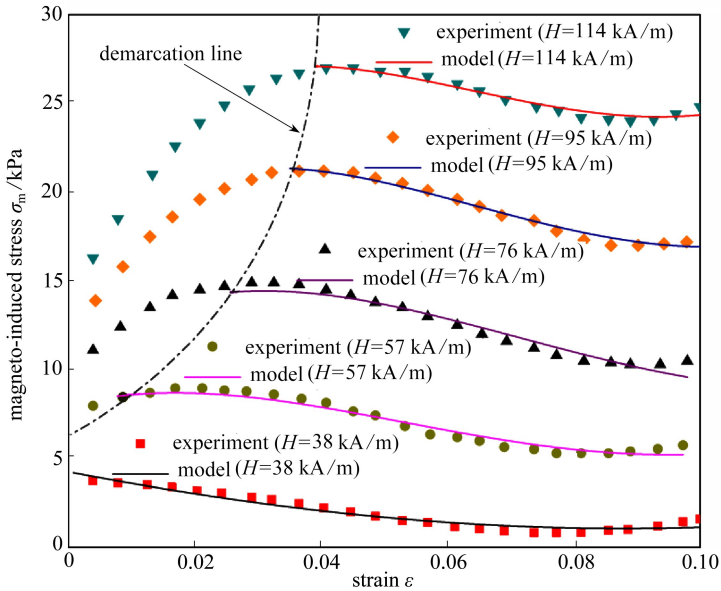


图 9 铁磁颗粒体积含量 25% 的 MREs 在不同磁场下的磁致应力

Fig. 9 The magneto-induced stress of MREs with 25% vol particles under different magnetic fields

3.2 MREs 磁致应力的理论预测和微观解释

从文献[19]的实验结果以及理论分析可知, MREs 磁致应力的大小和变化规律与外磁场有关,且呈现出一定的规律,这种规律在不同大小的磁场下有所不同。

图 10 给出了较小磁场下 MREs 的磁致应力随应变的变化曲线。可以看出,磁场较小时,实验和模型均表明磁致应力先缓慢减小,随后增大,分别对应图 10 的阶段 I 和阶段 II。在阶段 I 的开始位置,材料中的铁磁颗粒相互作用,在宏观上表现出一定大小的磁致应力,但此时磁致

应力的初始值不为零.随着材料进一步被拉伸,每条链结构中的铁磁颗粒之间的距离 r_0 逐渐增大,模型中的应力 σ_r 逐渐减小,导致磁致应力 σ_m 减小.当材料的变形足够大时,由于侧面收缩效应, d_0 逐渐减小,链与链之间的相互作用会显著增强,引起 σ_d 不断增大,且 σ_d 的增大幅度超过 σ_r 的减小幅度,导致磁致应力 σ_m 增大,曲线过渡到阶段 II.由此可见,磁致应力的变化规律与材料的微观结构变化紧密相连.

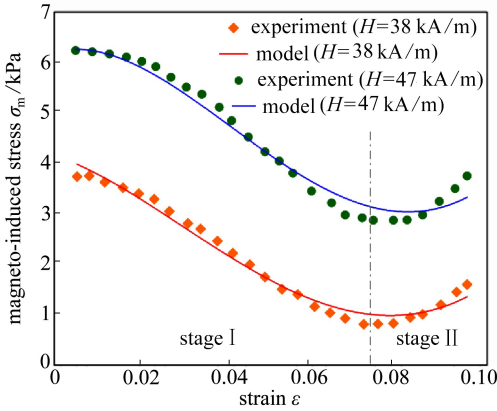


图 10 MREs 在较小磁场下的磁致应力

Fig. 10 The magneto-induced stress of MREs under smaller different magnetic fields

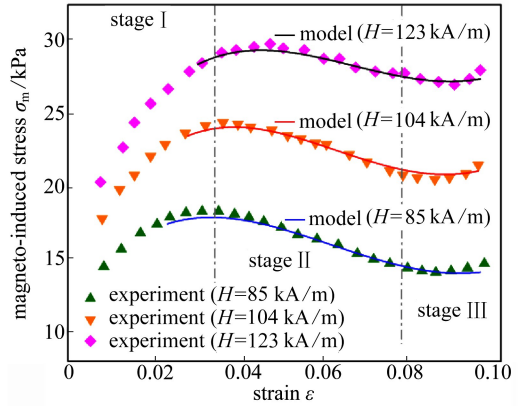


图 11 MREs 在较大磁场下的磁致应力

Fig. 11 The magneto-induced stress of MREs under larger different magnetic fields

磁场较大时,材料磁致应力的变化规律与磁场较小时有所不同,如图 11 所示,磁致应力的变化过程分为 3 个阶段.在第 I 阶段,磁致应力随应变的增大而增大,这是由于 MREs 在成型过程中铁磁颗粒在磁场环境中移动成链状结构,朝着系统能量最小的状态演化^[15].当材料发生变形时会导致整体磁能增加,因而磁致应力在开始阶段会出现上升趋势.当材料处在阶段 II 中时材料变形较小,每条链结构中的铁磁颗粒相互作用,应力 σ_r 的变化是导致磁致应力 σ_m 变化的主要因素.在阶段 III 中材料变形较大,此时链结构间的相互作用增强,应力 σ_d 不断增大,引起磁致应力 σ_m 增大.这两个区域的规律分别与小磁场下的第 I 和第 II 阶段类似,都与材料内部微结构的变化紧密相关.

4 结 论

本文基于磁偶极子假设,从 MREs 材料的微观结构出发,考虑了链结构中所有铁磁颗粒的相互作用以及链结构之间的相互影响,从能量的角度建立了描述 MREs 在单向载荷作用下力-磁耦合行为的数学模型,详细分析了 MREs 磁致应力的变化规律与材料微结构间的关系.结果表明:

1) 文中提出的数学模型能够准确表征 MREs 的力-磁耦合特性,在一定范围内能够准确描述和预测材料的总体应力和磁致应力.

2) MREs 的磁致应力是同一链结构中的铁磁颗粒以及相邻链结构之间的相互作用共同决定的,磁致应力的变化规律与材料微结构紧密相关.当变形较小时,磁致应力由同一条链结构中铁磁颗粒间的相互作用决定;当变形较大时,链结构之间的相互作用显著增强.这是导致磁致应力非线性变化的主要原因.

3) 磁场大小不同导致磁致应力的变化规律有所不同,磁场较小时磁致应力的变化可分为

两个阶段,磁场较大时磁致应力的变化可分为3个阶段.文中定性解释了这种现象,深层次机理仍有待进一步研究.

参考文献(References):

- [1] JOLLY M R, CARLSON J D, MUÑOZ B C. A model of the behaviour of magnetorheological materials[J]. *Smart Materials & Structures*, 1996, **5**(5): 607-614.
- [2] CHEN L, GONG X L, LI W H. Microstructures and viscoelastic properties of anisotropic magnetorheological elastomers[J]. *Smart Materials & Structures*, 2007, **16**(6): 2645-2650.
- [3] 许阳光, 龚兴龙, 万强, 等. 磁敏智能软材料及磁流变机理[J]. *力学进展*, 2015, **45**: 461-495. (XU Yangguang, GONG Xinglong, WAN Qiang, et al. Magneto-sensitive smart soft material and magnetorheological mechanism[J]. *Advances in Mechanics*, 2015, **45**: 461-495. (in Chinese))
- [4] LI W, KOSTIDIS K, ZHANG X, et al. Development of a force sensor working with MR elastomers[C]//*IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. Singapore, 2009: 233-238.
- [5] BEHROOZ M, WANG Xiaojie, GORDANINEJAD F. Performance of a new magnetorheological elastomer isolation system[J]. *Smart Materials & Structures*, 2014, **23**(4): 045014. DOI: 10.1088/0964-1726/23/4/045014.
- [6] LIU T Y, HU S H, LIU K H, et al. Preparation and characterization of smart magnetic hydrogels and its use for drug release[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2006, **304**(1): e397-e399.
- [7] OTTAVIANI R A, ULICNY J C, GOLDEN M A. Magnetorheological nanocomposite elastomer for releasable attachment applications; US 6877193 B2[P]. 2005-04-12.
- [8] ELKINS J. Oxidative stability in surface modified magnetorheological elastomers[D]. Master Thesis. Reno: University of Nevada, 2005.
- [9] SHIGA T, OKADA A, KURAUCHI T. Magnetorheological behavior of composite gels[J]. *Journal of Applied Polymer Science*, 1995, **58**(4): 787-792.
- [10] DAVIS L C. Model of magnetorheological elastomers[J]. *Journal of Applied Physics*, 1999, **85**(6): 3348-3351.
- [11] VARGA Z, FILIPCSEI G, ZRÍNYI M. Magnetic field sensitive functional elastomers with tunable elastic modulus[J]. *Polymer*, 2005, **47**(1): 227-233.
- [12] MIKHAILOV V P, BAZINENKOV A M. Active vibration isolation platform on base of magnetorheological elastomers[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2016, **431**: 266-268.
- [13] ROSENSWEIG B E. *Ferrohydrodynamics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [14] SHEN Y, GOLNARAGHI M F, HEPPLER G R. Experimental research and modeling of magnetorheological elastomers[J]. *Journal of Intelligent Material Systems & Structures*, 2004, **15**(1): 27-35.
- [15] LIU Taixiang, GONG Xinglong, XU Yangguang, et al. Simulation of magneto-induced rearrangeable microstructures of magnetorheological elastomers[J]. *Soft Matter*, 2013, **9**(42): 10069-10080.
- [16] IVANEYKO D, TOSHCHEVIKOV V P, SAPHIANNIKOVAM, et al. Magneto-sensitive elasto-

- mers in a homogeneous magnetic field: a regular rectangular lattice model[J]. *Macromolecular Theory & Simulations*, 2011, **20**(6): 411-424.
- [17] IVANEYKO D, TOSHCHEVIKOV V, BORIN D, et al. Mechanical properties of magneto-sensitive elastomers in a homogeneous magnetic field: theory and experiment[J]. *Macromolecular Symposia*, 2014, **338**(1): 96-107.
- [18] CHEN S W, LI R, ZHANG Z, et al. Micromechanical analysis on tensile modulus of structured magneto-rheological elastomer[J]. *Smart Structures & Systems*, 2016, **25**(3): 035001. DOI: 10.1088/0964-1726/25/3/035001.
- [19] BELLAN C, BOSSIS G. Field dependence of viscoelastic properties of MR elastomers[J]. *International Journal of Modern Physics B*, 2002, **16**(17/18): 2447-2453.
- [20] LI Yancheng, LI Jianchun. A highly adjustable base isolator utilizing magnetorheological elastomer: experimental testing and modeling[J]. *Journal of Vibration & Acoustics*, 2014, **137**(1): V001T03A010. DOI: 10.1115/1.4027626.
- [21] HAN Yi, HONG Wei, FAIDLEY L E. Coupled magnetic field and viscoelasticity of ferrogel[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2011, **3**(2): 259-278.
- [22] DANAS K, KANKANALA S V, TRIANTAFYLIDIS N. Experiments and modeling of iron-particle-filled magnetorheological elastomers[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2012, **60**(1): 120-138.
- [23] GALIPEAU E, CASTAÑEDA P P. A finite-strain constitutive model for magnetorheological elastomers: magnetic torques and fiber rotations[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 2013, **61**(4): 1065-1090.
- [24] NEDJAR B. A theory of finite strain magneto-poromechanics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, **84**: 293-312.
- [25] 孙书蕾, 毛建良, 彭雄奇. 考虑纤维弯曲刚度的橡胶-帘线复合材料各向异性超弹性本构模型[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(5): 471-477. (SUN Shulei, MAO Jianliang, PENG Xiongqi. An anisotropic hyperelastic constitutive model with fiber bending stiffness for cord-rubber composites[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(5): 471-477. (in Chinese))
- [26] 郭怡诚. 铁磁学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2014. (GUO Yicheng. *Ferromagnetism*[M]. Beijing: Peking University Press, 2014. (in Chinese))
- [27] VICENTE J, BOSSIS G, LACIS S, et al. Permeability measurements in cobalt ferrite and carbonyl iron powders and suspensions[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2002, **251**(1): 100-108.
- [28] 胡友秋, 程福臻, 叶邦角. 电磁学与电动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2013. (HU Youqiu, CHENG Fuzhen, YE Bangjiao. *Electromagnetics and Electrodynamics*[M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))
- [29] QIN Qinghua, YANG Qingsheng. *Macro-Micro Theory on Multi-Field Coupling Behavior of Heterogeneous Materials*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008.

A Theoretical Model for Magneto-Mechanical Coupling Behaviors of Magnetorheological Elastomers

LI Xu, WAN Qiang, SHI Ping'an

(*Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621999, P.R.China*)

Abstract: Based on the magnetic dipole interaction theory, a theoretical model was proposed to describe the magneto-mechanical coupling behaviors of magnetorheological elastomers with the principle of minimum potential energy. In this model, the fully coupled interaction among all particles and chains was considered according to the micro-structure of magnetorheological elastomers. The energy equations of magnetic interaction and the elastic potential energy equations based on the Mooney-Rivlin model were derived respectively. Then a theoretical model was developed to describe the stress-strain relationship of magnetorheological elastomers under uniaxial load. This model agrees well with existing experimental data and can be used to explain the micro-mechanism of magneto-induced stress. The results show that the mechanism of magneto-induced stress is closely related to the inner micro-structure, and the nonlinear property of magneto-induced stress mainly depends on the interaction among both particles and chains.

Key words: magnetorheological elastomer; theoretical model; magneto-mechanical coupling; magneto-induced stress

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11372295)

引用本文/Cite this paper:

李旭, 万强, 史平安. 磁流变弹性体的力-磁耦合模型[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 92-103.

LI Xu, WAN Qiang, SHI Ping'an. A theoretical model for magneto-mechanical coupling behaviors of magnetorheological elastomers[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 92-103.