

考虑媒体播报效应的双时滞传染病模型^{*}

廖书, 杨炜明

(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘要: 在疾病控制过程中,媒体的重要性举足轻重.该文旨在建立并分析一个含有媒体效应的多时滞传染病模型,研究模型的稳定性,并通过分析相应特征方程根,分别研究在时滞不同的5种情况下,系统的稳定性发生变化,以及产生Hopf分支的条件.再利用持续性理论,证明模型的持续生存性.最后将时滞模型研究结果应用于苏格兰小儿肺炎中,验证媒体效应对疫情控制起到的重要作用以及时滞大小对模型稳定性的影响.

关键词: 媒体效应; 传染病模型; 多时滞; 稳定性分析; Hopf分支; 持续性

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **doi:** 10.21656/1000-0887.380025

引 言

传染病模型是在理论上研究传染病的流行和传播规律,为建立传染病防控体系提供理论依据的重要工具之一.近年来国内外很多研究者已经运用数学模型对各类传染病,包括肺炎、肺结核、霍乱、麻疹、西尼罗河热、登革热等进行研究,并制定如预防接种、口服疫苗等有效的预防和控制措施.

近年来随着社会的不断进步,科学技术的不断发展完善,大众媒体如电视、广播、网络、手机、数字媒体等也随之蓬勃发展起来.一些研究者注意到媒体效应在传染病防控中起到举足轻重的作用.媒体传播以其独有的传播优势可以帮助人们不受时间空间的限制以最快的速度 and 最高的效率传递信息和知识,加速人与人之间的交流.当传染病暴发时,不管身处何地,人们都能迅速通过媒体途径了解传染病的相关信息,包括感染原因、传播方式、预防方法等,这些正确的信息可以引导人们积极防范疾病、规避风险、稳定情绪,从而控制传染病的流行.

例如H1N1流感自2009年从墨西哥爆发后,公共媒体对感染症状、感染者数量、死亡病例数量和预防措施等信息及时进行报道,人们的行为和习惯因此受到影响,自发地开始戴口罩、勤洗手、尽量少去人多的公众场合等,从而减少疾病传播的有效接触率,直接降低了感染者的数量.

所以研究媒体信息传播对传染病的预防控制具有重要意义.

通过建立数学模型来讨论媒体作用对传染病传播的影响是一个有效的方法.2007年Liu

* 收稿日期: 2017-01-19; 修订日期: 2017-04-23

基金项目: 国家自然科学基金(11401059);重庆市科委基金(cstc2015jcyjA00024; cstc2015jcyjAX0067);重庆市教委科学技术研究项目(KJ1600610;KJ1706163)

作者简介: 廖书(1980—),女,博士(通讯作者. E-mail: shuyang2011@yahoo.com); 杨炜明(1981—),男,博士(E-mail: ywmctbu@gmail.com).

等在文献[1]中首次引入媒体报道这一因素建立一个 EIH 模型,引入媒体影响因子函数 $f(E, I, H) = e^{-a_1 E - a_2 I - a_3 H}$,研究媒体报道对传染病多次爆发或持续周期震荡带来的影响.但该模型并没有考虑到总人口数量的变化.Misra 等在文献[2]中建立利用媒体效应来控制传染病的 SISM 模型,考虑到了易感者在媒体宣传作用下成为一类有防控意识的易感者,感染者人数先慢慢降低,但随着时间推移,一些采取自我保护措施的易感者预防意识会淡化并逐渐转化为无防范意识的易感者,因而感染者又会随之增加.Cui 等在文献[3]中改进了文献[1]的模型,也就媒体报道对传染病控制的影响进行了系统的研究,并考虑到当传染病爆发时,由于媒体获取信息需要一段时间,从而建立时滞模型.其研究结果表明媒体影响会导致疾病传播的震荡减弱,从而减少感染者人数.Collinson 等^[4]在 H1N1 模型中引入媒体报道因素,确认随着媒体的深入报道和正面引导会极大降低病毒的接触率.但当媒体宣传慢慢疲劳减弱的时候,又会抑制这些正面影响.Misra 等在文献[5]中也是考虑到了执行媒体宣传时的时滞影响,从而建立一个具有媒体效应的时滞模型.该文的研究结果表明媒体效应起到很重要的防控作用,且时滞会引起 Hopf 分支.刘玉英和肖燕妮在文献[6]中建立一个受媒体影响且具有分段感染率的传染病模型,用一个非光滑函数刻画媒体影响因子,当染病者人数低于函数临界值时,影响因子函数随着染病者人数的增加成指数递减的趋势;但当染病者数量达到或超过临界值时,影响因子始终为一固定值.最后该文还根据基本再生数的大小分析了各平衡态的局部和全局渐近稳定性.Sun 等的文献[7]讨论了尽管媒体宣传并不是控制传染病流行的决定性因素,但还是起着不可忽视的重要作用.张素霞和周义仓在文献[8]中研究了由于媒体影响而导致易感性不同的一个 SEI 传染病模型并分析了模型可能出现的后向分支及其平衡点的稳定性和持久性,以及讨论媒体的宣传作用对易感者人群进行影响的最优控制策略.最近,Greenhalgh 等在文献[9]中建立多时滞模型,分析其稳定性并采用肺炎为例进行数值模拟.其他类似的参考文献可参见[10-13].

我国根据《中华人民共和国传染病防治法》及相关文件《最新法定传染病分类》共划分了 39 种传染病,分为甲类、乙类和丙类.其中甲类传染病规定必须城镇于 6 小时内,农村于 12 小时内向发病地的疾病控制机构报告.乙类传染病规定必须城镇于 12 小时内,农村于 24 小时内向发病地的疾病控制机构报告.这首先就导致了媒体信息收集上产生滞后性.等到政府开始重视该疾病,媒体开始播报并产生积极影响也需要一段时间.而人们接受媒体信息,再做出相应反应也存在滞后性,不同的时滞产生的影响巨大.上述提到的文献中大部分都没有考虑到时滞产生的影响或者只考虑到了某种时滞的单一情况.为了研究媒体影响对传染病控制起到的重要作用,本文全面考量多时滞的不同影响,考虑媒体影响传染病传播的实际情况,建立并分析一类带有媒体引发的意识累积密度的多时滞传染病模型.

1 ODE 模型

在本文模型中,将易感者分为有防范意识的人群和无防范意识的人群,并只考虑个体与个体之间直接传播的传染方式.在传染病爆发初期,随着媒体越来越多的报道,原本无意识的易感者接受的正面预防疾病的信息越来越多,并逐渐变成有意识的易感者,从而避免和染病者进行直接接触,这样可以大大降低传染病的传播率.但随着时间的推移,加之对传染病的信息获取不是永久性的,部分有意识的个体在信息耗散之后又会转变回无意识者.另一方面,考虑媒体执行的现实情况,媒体获得信息再执行宣传需要一段时间,这会产生时滞,记为 τ_2 .同

时人们开始接受媒体信息并产生自我保护也需要一定的时间,也产生时滞,记为 τ_1 .故建立如下带有媒体引发的意识累积密度的双时滞模型:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta SI - \eta SM(t - \tau_1) - \mu S + \nu I + \alpha A, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\mu + u_1 + \nu)I, \quad (2)$$

$$\frac{dA}{dt} = \eta SM(t - \tau_1) - (\mu + \alpha)A, \quad (3)$$

$$\frac{dM}{dt} = \xi I(t - \tau_2) - \phi M, \quad (4)$$

其中 $S(t)$, $I(t)$ 和 $A(t)$ 分别表示在 t 时刻无意识的易感染者、染病者和有意识的易感染者, $M(t)$ 表示在 t 时刻该地区由媒体引发的意识程序的累积密度,总人口 $N(t)$ 随时间变化且 $N(t) = S(t) + I(t) + A(t)$, Λ 表示总人口潜入率, β 表示病菌传播率, μ 表示自然死亡率, u_1 为因病死亡率, ν 为感染者的康复率, α 为有意识个体到无意识个体的转移率, η 为意识的传播率, ξ 为媒体项目的贯彻率, ϕ 为媒体由于无效的耗散率,所有的参数均为正.

定义 Banach 空间中的连续函数 $\psi: [-\tau, 0] \rightarrow R_+^4$,且模为

$$\|\psi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{|\psi_1(\theta)|, |\psi_2(\theta)|, |\psi_3(\theta)|, |\psi_4(\theta)|\},$$

其中 $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ 且 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$.系统(1)~(4)的初始条件为

$$S(\theta) = \psi_1(\theta) \geq 0, I(\theta) = \psi_2(\theta) \geq 0, A(\theta) = \psi_3(\theta) \geq 0, M(\theta) = \psi_4(\theta) \geq 0, \theta \in [-\tau, 0]. \quad (5)$$

由文献[14]的泛函微分方程理论可知系统(1)~(4)存在唯一满足初始条件的解: $(S(t), I(t), A(t), M(t))$.

由 $N(t) = S(t) + I(t) + A(t)$,上述系统(1)~(4)可改写为

$$\frac{dI}{dt} = \beta(N - I - A)I - (\mu + u_1 + \nu)I, \quad (6)$$

$$\frac{dA}{dt} = \eta(N - I - A)M(t - \tau_1) - (\mu + \alpha)A, \quad (7)$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - u_1 I, \quad (8)$$

$$\frac{dM}{dt} = \xi I(t - \tau_2) - \phi M. \quad (9)$$

由方程(8)可得当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \Lambda/\mu$.又因为 $N(t) = S(t) + I(t) + A(t)$,则必有 $I(t) \leq \Lambda/\mu$, $A(t) \leq \Lambda/\mu$.再由方程(9)可解得 $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) \leq \xi\Lambda/(\mu\phi)$,则由文献[14]可得系统(6)~(9)的吸引域为

$$D = \left\{ (S, I, A, M) \in R_+^4 : 0 \leq I, A \leq \frac{\Lambda}{\mu}, 0 \leq M \leq \frac{\xi\Lambda}{\mu\phi} \right\}. \quad (10)$$

2 平衡点和分支分析

本节针对时滞的情况对时滞系统的地方病平衡点的稳定性以及分支进行讨论.首先系统在地方病平衡点 $E^*(I^*, A^*, N^*, M^*)$ 的 Jacobi(雅克比)矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I^* & -\beta I^* & -\beta I^* & 0 \\ -\eta M^* & -\eta M^* - (\mu + \alpha) & \eta M^* & \eta(N^* - I^* - A^*)e^{-\tau_1\lambda} \\ -u_1 & 0 & -\mu & 0 \\ \xi e^{-\tau_2\lambda} & 0 & 0 & -\phi \end{bmatrix}.$$

在地方病平衡点的特征方程为

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 + (b_1\lambda + b_2)e^{-(\tau_1+\tau_2)\lambda} = 0, \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\mu + \alpha + \phi + \eta M^* + \beta I^*, \\ a_2 &= \beta I^*(2\mu + \alpha + u_1 + \phi) + \mu(\eta M^* + \mu + \alpha + \phi) + \phi(\eta M^* + \mu + \alpha), \\ a_3 &= -\xi\eta\beta I^*(N^* - I^* - A^*) + u_1\beta I^*(\mu + \alpha + \phi) + \beta I^*(\mu + \alpha)(\mu + \phi), \\ a_4 &= -\xi\mu\eta\beta I^*(N^* - I^* - A^*) + \beta I^*\phi(\mu + \alpha)(\mu + u_1), \\ b_1 &= \xi\eta\beta I^*(N - I^* - A^*), \\ b_2 &= \mu\xi\eta\beta I^*(N - I^* - A^*). \end{aligned}$$

Case 1 $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

当双时滞都为 0 时, 原时滞系统变为如下 ODE 方程组:

$$\frac{dI}{dt} = \beta(N - I - A)I - (\mu + u_1 + v)I, \tag{12}$$

$$\frac{dA}{dt} = \eta(N - I - A)M - (\mu + \alpha)A, \tag{13}$$

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - u_1I, \tag{14}$$

$$\frac{dM}{dt} = \xi I - \phi M. \tag{15}$$

通过 Van den Driessche 和 Watmough^[15]的方法, 基本再生数 R_0 表示当总人口数量达到稳定的平衡态且均为已感染者时, 一个感染者在有效传染期内混入易感人群中所能产生的第二代传染病人数量, 可以通过计算求得 $R_0 = \beta\Lambda/(\mu(\mu + u_1 + v))$.

模型(12)~(15)的无病平衡点为 $E_0(0, 0, \Lambda/\mu, 0)$. 地方病平衡点 $E^* = (I^*, A^*, N^*, M^*)$ 可由下面的式子确定:

$$M^* = \frac{\xi I^*}{\phi}, N^* = \frac{\Lambda - u_1 I^*}{\mu}, A^* = \frac{\eta(N^* - I^*)M^*}{\eta M^* + \mu + \alpha}.$$

通过计算, 可以建立如下定理(计算可参考文献[2,5-6], 此处计算略).

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时, ODE 模型(12)~(15)的无病平衡点是局部渐近稳定以及全局渐近稳定的.

定理 2 当 $R_0 > 1$ 时, ODE 模型(12)~(15)的地方病平衡点是局部渐近稳定以及全局渐近稳定的.

Case 2 $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$.

设 $\lambda = i\omega$ 是方程(11)的一个根, 将 λ 代入方程(11)并分离实部和虚部后, 可得到下面的两个方程:

$$\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4 = -b_1\omega\sin(\omega\tau_2) - b_2\cos(\omega\tau_2), \tag{16}$$

$$a_1\omega^3 - a_3\omega = b_1\omega\cos(\omega\tau_2) - b_2\sin(\omega\tau_2). \quad (17)$$

将方程(16)和(17)平方相加后,再令 $\omega^2 = x_2$,得到

$$F(x_2) = x_2^4 + C_1x_2^3 + C_2x_2^2 + C_3x_2 + C_4 = 0, \quad (18)$$

其中 $C_1 = -2a_2 + a_1^2$, $C_2 = a_2^2 + 2a_4 - 2a_1a_3$, $C_3 = -2a_2a_4 + a_3^2 - b_1^2$, $C_4 = a_2^4 - b_2^2$.

如果系数 C_i 满足Routh-Hurwitz条件,则方程(18)不会有任何正根,因此也不会得到满足方程(16)和(17)的正 ω .在这种情况下有以下定理.

定理3 当 $R_0 > 1$,时滞 $\tau_2 > 0$ 时,如果Routh-Hurwitz条件满足,系统(6)~(9)的地方病平衡点是局部渐近稳定的.

另一方面,若系数 C_i 不满足Routh-Hurwitz条件,假设 $F(0) = C_4 < 0$ 成立,以及 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$ 可以确保方程(18)存在一个正的实根使得方程(11)必有一对纯虚根 $\pm i\omega$.

从方程(16)和(17)可解得时滞临界值 τ_{2_n} 的表达式如下:

$$\tau_{2_n} = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{b_2\omega(a_1\omega^2 - a_3) + b_1\omega(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4)}{b_2(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4) - b_1\omega^2(a_1\omega^2 - a_3)} + \frac{2n\pi}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

再对方程(11)左右两边同时求 λ 关于 τ_2 的导数并化简,可得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)^{-1} = \frac{(4\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3)e^{\lambda\tau_2}}{\lambda(\lambda b_1 + b_2)} + \frac{b_1}{\lambda(\lambda b_1 + b_2)} - \frac{\tau_2}{\lambda}. \quad (20)$$

令 $\tau_{2_0} = \min\{\tau_{2_n}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$,相应得到 ω_2 ,再计算求得

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left[\frac{d(\operatorname{Re}(\lambda))}{d\tau_2}\right]_{\lambda=i\omega_2}^{\tau_2=\tau_{2_0}} &= \operatorname{sgn}\left[\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2}\right)\right]_{\lambda=i\omega_2}^{\tau_2=\tau_{2_0}} = \\ \operatorname{sgn}\left[\frac{4\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3 + b_1e^{-\lambda\tau_2}}{\lambda(b_1\lambda + b_2)e^{-\lambda\tau_2}}\right]_{\lambda=i\omega_2}^{\tau_2=\tau_{2_0}} &= \\ \operatorname{sgn}\left[\frac{F'(\omega_2^2)}{b_1^2\omega_2^2 + b_2^2}\right]_{\lambda=i\omega_2}^{\tau_2=\tau_{2_0}}. \end{aligned} \quad (21)$$

由前面的假设条件 $C_4 < 0$ 可知, $F'(\omega_2^2) > 0$,则上述方程(21)一定大于0.即意味着当 $\tau_2 > \tau_{2_0}$ 时,至少存在一个根有一个正实部并且从左向右穿过虚轴.因此当 $\tau = \tau_{2_0}$ 时,Hopf分支产生,并在 $\tau = \tau_{2_0}$ 附近产生一簇周期解.由文献[16-17]的Hopf分支定理,可建立如下定理.

定理4 当 $R_0 > 1$,时滞 $\tau_2 \in [0, \tau_{2_0})$ 时,如果Routh-Hurwitz条件满足,系统(6)~(9)的地方病平衡点是局部渐近稳定的;当时滞 $\tau > \tau_{2_0}$ 时,系统(6)~(9)不稳定;当 $\tau = \tau_{2_0}$ 时,系统在地方病平衡点产生Hopf分支,并在 $\tau = \tau_{2_0}$ 附近产生一簇周期解.

Case 3 $\tau_1 > 0$, $\tau_2 = 0$.

采用和Case 2类似的方法,设 $\lambda = i\omega$ 是方程(11)的一个根,可求得时滞临界值 τ_{3_n} 的表达式如下:

$$\tau_{3_n} = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{b_2\omega(a_1\omega^2 - a_3) + b_1\omega(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4)}{b_2(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4) - b_1\omega^2(a_1\omega^2 - a_3)} + \frac{2n\pi}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

再对方程(11)左右两边同时求 λ 关于 τ_1 的导数并化简,可得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1}\right)^{-1} = \frac{(4\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3)e^{\lambda\tau_2}}{\lambda(\lambda b_1 + b_2)} + \frac{b_1}{\lambda(\lambda b_1 + b_2)} - \frac{\tau_1}{\lambda}. \quad (23)$$

令 $\tau_{3_0} = \min \{ \tau_{3_n} \}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 相应得到 ω_3 , 再计算求得

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left[\frac{d(\operatorname{Re}(\lambda))}{d\tau_1} \right]_{\lambda = i\omega_3}^{\tau_1 = \tau_{3_0}} &= \operatorname{sgn} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau_1} \right) \right]_{\lambda = i\omega_3}^{\tau_1 = \tau_{3_0}} = \\ \operatorname{sgn} \left[\frac{4\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3 + b_1 e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda(b_1\lambda + b_2) e^{-\lambda\tau_1}} \right]_{\lambda = i\omega_3}^{\tau_1 = \tau_{3_0}} &= \\ \operatorname{sgn} \left[\frac{F'(\omega_3^2)}{b_1^2\omega_3^2 + b_2^2} \right]_{\lambda = i\omega_3}^{\tau_1 = \tau_{3_0}}. \end{aligned} \tag{24}$$

同样, 由前面的假设条件 $C_4 < 0$ 可知, $F'(\omega_3^2) > 0$, 则上述方程(24)一定大于0.即意味着当 $\tau > \tau_{3_0}$ 时, 至少存在一个根有一个正实部并且从左向右穿过虚轴.因此当 $\tau = \tau_{3_0}$ 时, Hopf 分支产生, 并在 $\tau = \tau_{3_0}$ 附近产生一簇周期解.由文献[16-17]的 Hopf 分支定理, 可以建立如下的定理.

定理 5 当 $R_0 > 1$, 时滞 $\tau_1 \in [0, \tau_{3_0})$ 时, 如果 Routh-Hurwitz 条件满足, 系统(6)~(9)的地方病平衡点是局部渐近稳定的; 当时滞 $\tau > \tau_{3_0}$ 时, 系统(6)~(9)不稳定; 当 $\tau = \tau_{3_0}$ 时, 系统在地方病平衡点产生 Hopf 分支, 并在 $\tau = \tau_{3_0}$ 附近产生一簇周期解.

Case 4 $\tau_1 > 0$, τ_2 固定在稳定区间 $(0, \tau_{2_0})$ 中.

在此种情况中, 将 τ_1 作为参数, 设 $\lambda = i\omega$ 是方程(11)的一个根, 为先消去 τ_1 , 可得方程:

$$\begin{aligned} [b_1\omega \sin(\omega\tau_2) + b_2 \cos(\omega\tau_2)] \cos(\omega\tau_1) - \\ [-b_1\omega \cos(\omega\tau_2) + b_2 \sin(\omega\tau_2)] \sin(\omega\tau_1) + \omega^4 - a_2\omega^2 + a_4 = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} [-b_1\omega \cos(\omega\tau_2) + b_2 \sin(\omega\tau_2)] \cos(\omega\tau_1) + \\ [b_1\omega \sin(\omega\tau_2) + b_2 \cos(\omega\tau_2)] \sin(\omega\tau_1) + a_1\omega^3 - a_3\omega = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

将方程(25)和(26)平方相加后, 再令 $\omega^2 = x_4$, 得到

$$\begin{aligned} F(x_4) = x_4^4 + (-2a_2 + a_1^2)x_4^3 + (a_2^2 + 2a_4 - 2a_1a_3)x_4^2 + \\ (-2a_2a_4 + a_3^2 - B_1^2)x_4 + (a_4^2 - b_2) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

时滞临界值 τ_{4_n} 的表达式如下:

$$\tau_{4_n} = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{b_2\omega(a_1\omega^2 - a_3) + b_1\omega(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4)}{b_2(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4) - b_1\omega^2(a_1\omega^2 - a_3)} + \frac{2n\pi}{\omega}, \tag{28}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

再对方程(11)左右两边同时求 λ 关于 τ_1 的导数并化简, 可得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_1} \right)^{-1} = \frac{(4\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3) e^{\lambda(\tau_1 + \tau_2)}}{\lambda(\lambda b_1 + b_2)} + \frac{b_1}{\lambda(\lambda b_1 + b_2)} - \frac{\tau_1}{\lambda}. \tag{29}$$

令 $\tau_{4_0} = \min \{ \tau_{4_n} \}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 相应得到 ω_4 , 再计算求得

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left[\frac{d(\operatorname{Re}(\lambda))}{d\tau_1} \right]_{\lambda = i\omega_4}^{\tau_1 = \tau_{4_0}} &= \operatorname{sgn} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau_1} \right) \right]_{\lambda = i\omega_4}^{\tau_1 = \tau_{4_0}} = \\ \operatorname{sgn} \left[\frac{4\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3 + b_1 e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)}}{\lambda(b_1\lambda + b_2) e^{-\lambda\tau_2}} \right]_{\lambda = i\omega_4}^{\tau_1 = \tau_{4_0}} &= \\ \operatorname{sgn} \left[\frac{F'(\omega_4^2)}{b_1^2\omega_4^2 + b_2^2} \right]_{\lambda = i\omega_4}^{\tau_1 = \tau_{4_0}}. \end{aligned} \tag{30}$$

同样, 由前面的假设条件 $C_4 < 0$ 可知, $F'(\omega_4^2) > 0$, 则上述方程(33)一定大于0.即意味

着当 $\tau > \tau_{4_0}$ 时, 至少存在一个根有一个正实部并且从左向右穿过虚轴. 因此当 $\tau = \tau_{4_0}$ 时, Hopf 分支产生, 并在 $\tau = \tau_{4_0}$ 附近产生一簇周期解. 由文献[16-17]的 Hopf 分支定理, 可以得到下面的定理.

定理 6 当 $R_0 > 1$, 时滞 τ_1 固定在稳定区间 $[0, \tau_{2_0})$ 中, 时滞 $\tau_1 \in [0, \tau_{4_0})$ 时, 如果 Routh-Hurwitz 条件满足, 系统(6)~(9)的地方病平衡点是局部渐近稳定的; 当时滞 $\tau_1 > \tau_{4_0}$ 时, 系统(6)~(9)不稳定; 当 $\tau_1 = \tau_{4_0}$ 时, 系统在地方病平衡点产生 Hopf 分支, 并在 $\tau_1 = \tau_{4_0}$ 附近产生一簇周期解.

Case 5 $\tau_2 > 0$, τ_1 固定在稳定区间 $(0, \tau_{3_0})$ 中.

此例与 Case 4 类似, 可求得时滞临界值 τ_{5_n} 的表达式如下:

$$\tau_{5_n} = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{b_2 \omega (a_1 \omega^2 - a_3) + b_1 \omega (\omega^4 - a_2 \omega^2 + a_4)}{b_2 (\omega^4 - a_2 \omega^2 + a_4) - b_1 \omega^2 (a_1 \omega^2 - a_3)} + \frac{2n\pi}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

再对方程(11)左右两边同时求 λ 关于 τ_2 的导数并化简, 可得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau_2} \right)^{-1} = \frac{(4\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3) e^{\lambda(\tau_1 + \tau_2)}}{\lambda(\lambda b_1 + b_2)} + \frac{b_1}{\lambda(\lambda b_1 + b_2)} - \frac{\tau_2}{\lambda}. \quad (32)$$

令 $\tau_{5_0} = \min \{ \tau_{5_n} \}, n = 0, 1, 2, \dots$, 相应得到 ω_5 , 再计算求得

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \left[\frac{d(\operatorname{Re}(\lambda))}{d\tau_2} \right]_{\lambda = i\omega_5}^{\tau_2 = \tau_{5_0}} &= \operatorname{sgn} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau_2} \right) \right]_{\lambda = i\omega_5}^{\tau_2 = \tau_{5_0}} = \\ &= \operatorname{sgn} \left[\frac{4\lambda^3 + 3a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_3 + b_1 e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)}}{\lambda(b_1\lambda + b_2) e^{-\lambda\tau_2}} \right]_{\lambda = i\omega_5}^{\tau_2 = \tau_{5_0}} = \\ &= \operatorname{sgn} \left[\frac{F'(\omega_5^2)}{b_1^2 \omega_5^2 + b_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

同样, 由前面的假设条件 $C_4 < 0$ 可知, $F'(\omega_5^2) > 0$, 则上述方程(33)一定大于0. 即意味着当 $\tau_2 > \tau_{5_0}$ 时, 至少存在一个根有一个正实部并且从左向右穿过虚轴. 因此当 $\tau_2 = \tau_{5_0}$ 时, Hopf 分支产生, 并在 $\tau_2 = \tau_{5_0}$ 附近产生一簇周期解. 由文献[16-17]的 Hopf 分支定理, 可以得到下面的定理.

定理 7 当 $R_0 > 1$, 时滞 τ_1 固定在稳定区间 $[0, \tau_{3_0})$ 中, 时滞 $\tau_2 \in [0, \tau_{5_0})$ 时, 如果 Routh-Hurwitz 条件满足, 系统(6)~(9)的地方病平衡点是局部渐近稳定的; 当时滞 $\tau_2 > \tau_{5_0}$ 时, 系统(6)~(9)不稳定; 当 $\tau_2 = \tau_{5_0}$ 时, 系统在地方病平衡点产生 Hopf 分支, 并在 $\tau_2 = \tau_{5_0}$ 附近产生一簇周期解.

3 系统的持续生存性

本节介绍文献[18]的一致持续生存理论. 设 X 为度量空间, 假设 $X^0 \in X, X_0 \in X, X^0 \cap X_0 = \emptyset$. X 上的 C^0 半群 $T(t)$ 满足

$$T(t): X^0 \rightarrow X^0, T(t): X_0 \rightarrow X_0. \quad (34)$$

记 $T_b(t) = T(t) \mid_{X_0}$, A_b 是 $T_b(t)$ 的全局吸引子.

定义 1^[18] 若在 X 中存在一个有界非空集 B 使得对任意 $x \in X$, 存在一个 $t_0 = t_0(x, B)$ 使得 $T(t): x \in B$, 对所有 $t > t_0$ 成立, 则称 $T(t)$ 在 X 中是点耗散的.

引理 1^[18] 若 $T(t)$ 满足方程(34)且

- 1) 存在 $t_0 > 0$, 使得对所有 $t > t_0$, $T(t)$ 是紧的;
- 2) $T(t)$ 在 X 中是点耗散的;
- 3) $\bar{A}_b = (A_b)$ 是孤立的且有一非循环覆盖 M , $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$;
- 4) $W^s(M_i) \cap X^0 = \emptyset, i = 1, 2, \dots, n$.

则 X_0 是解关于 X^0 的一致排斥集, 即存在 $\varepsilon > 0$, 使得任意 $x \in X^0$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} d(T(t)x, X_0) \geq \varepsilon$, 其中 d 表示 $T(t)x$ 到 X_0 的距离.

接下来证明系统(6)~(9)满足引理 1 的全部条件. 记 $C([- \tau, 0], R_+^4)$ 是从 $[- \tau, 0]$ 到 R_+^4 的连续函数组成的 Banach 空间, 取

$$\tilde{C} = \{ (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \in C([- \tau, 0], R_+^4) : \psi_1(\theta) \neq 0, \psi_2(\theta) = 0, \psi_3(\theta) = 0, \psi_4(\theta) \neq 0, \theta \in [- \tau, 0] \}.$$

记 $X^0 = \text{int } C([- \tau, 0], R_+^4 \times [0, 1])$, 易知存在一个 ε_0 , 使得对系统的所有解 u_t , $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf \tilde{\alpha}(u_t, X_0) \geq \varepsilon_0$. 再由 X^0 和 X_0 的定义及解的有界性知, 系统(6)~(9) 满足引理 1 中的 1) 和 2), 且 X^0 和 X_0 是不变集.

接下来验证引理 1 中 3) 的情况. 记在 X_0 中有常数解 E_0 , 即 $S(t) = \Lambda/\mu, I(t) = A(t) = M(t) = 0$. 若 $(S(t), I(t), A(t), M(t))$ 是系统(6)~(9) 在 X_0 中的解, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $S(t) \rightarrow \Lambda/\mu, I(t) \rightarrow 0, A(t) \rightarrow 0, M(t) \rightarrow 0$. 即 \tilde{C} 中所有的点都趋向于 E_0 , 即 $\tilde{C} = W^s(E_0)$, 于是 $\tilde{A}_b = E_0$ 并且是孤立的. 因此系统的流是 \tilde{A}_b 的非循环覆盖, 从而引理 1 中的 3) 成立.

接下来用反证法证明 $W^s(E_0) \cap C^0 = \emptyset$. 假设 $W^s(E_0) \cap C^0 \neq \emptyset$, 则存在系统的一个正解 $(S(t), I(t), A(t), M(t))$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), A(t), M(t)) = (\Lambda/\mu, 0, 0, 0)$. 设 ε_0 为任意充分小的正数, 使得 $R_0 > 1 + \varepsilon_0$. 由式(6)可推得

$$\frac{dI}{dt} \geq \beta \left(\frac{\Lambda}{\mu} - \varepsilon_0 - I - A \right) I(t), \tag{35}$$

或者是

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dt} \geq \beta \left[\left(\frac{\Lambda}{\mu} - \varepsilon_0 \right) - I - A \right] I(t) - (\mu + u_1 + v). \tag{36}$$

I 和 A 若足够小并且

$$R_0 > 1 + \frac{\beta \varepsilon_0}{\mu + u_1 + v}, \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} \geq \varepsilon_1 > 0$$

对所有 $\varepsilon_1 > 0$ 成立. 因此存在 $t_1 \geq t_0$ 使得

$$\frac{1}{I} \frac{dI}{dt} \geq \varepsilon_1 > 0$$

成立. 所以对 $t \geq t_1$ 以及 $I(t_1) > 0$, 有 $I(t) \geq I(t_1) \exp \{ \varepsilon_1(t - t_1) \}$. 这与当 $t \rightarrow \infty$ 时, $I(t) \rightarrow 0$ 矛盾. 因此就有 $(S(t), I(t), A(t), M(t)) \not\rightarrow (\Lambda/\mu, 0, 0, 0)$, 这又与前面的假设矛盾. 所以 $W^s(E_0) \cap C^0 = \emptyset$. 则系统(6)~(9) 满足引理 1 的所有条件, 系统(6)~(9) 是一致持续生存的.

4 模型模拟

本节中采用苏格兰小儿肺炎^[9, 19-20] 的数据进行数值模拟. 小儿肺炎是婴幼儿时期的常见疾

病,是婴幼儿死亡的常见原因.肺炎是由病原体感染或吸入羊水及油类和过敏反应等所引起的肺部炎症,主要临床表现为发热、咳嗽、呼吸急促、呼吸困难以及肺部啰音等.由文献[9, 19-20]可得系统的参数如下:

$$N = 150\,000, A = 5, \phi = 0.05, \eta = 0.02, u_1 = 0.002, \mu = 0.000\,5, \\ \alpha = 0.001, \beta = 0.000\,024\,5, v = 0.002.$$

初始条件设为

$$S_0 = 9\,000, I_0 = 1\,000, A_0 = 4\,000, M_0 = 1\,000.$$

根据该组参数值可计算得 $R_0 = 6.953\,3$.

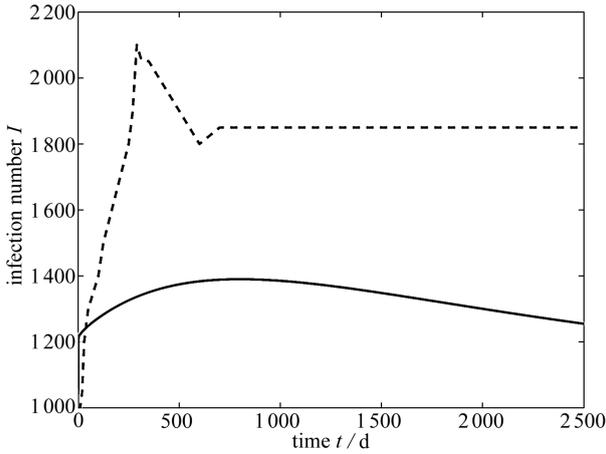


图 1 当时滞均为 0 时,随着时间的变化 I 的变化趋势(其中实线为数值模拟结果,虚线为苏格兰小儿肺炎的真实数据)

Fig. 1 The phase plane diagram of I vs. t (where the solid line represents the model prediction and the dashed line marks the real data of infantile pneumonia in Scotland)

首先令时滞均为 0,研究媒体宣传的重要性.图 1 中实线为数值模拟结果,虚线为苏格兰小儿肺炎的真实数据.从图 1 中可以清楚看出在模型中引入媒体宣传后,染病者人数明显减少.图 2(a)表示意识个体到无意识个体的转化率 α 变小,即染病者成为有意识的易感者越多,染病者人数越小.这说明媒体持续长期传播的重要性,有关政府部门要持续宣扬疾病的防控工作,这会大大降低感染者被再次感染的可能.图 2(b)表示当意识的传播率 η 值增大时,染病者人数反而减小.这说明当传染病爆发时,媒体应当大力报道宣传,使得更多的易感者接收到有用的防控信息.图 2(c)表示媒体项目的贯彻率 ξ 越大时,感染者人数越小.这仍然是强调媒体宣传作用的重要性,宣传贯彻力度越大,接受到信息的人越多,自然感染人数就会越低.图 2(d)表示媒体由于无效的耗散率 ϕ 降低时,染病者的人数也越小.这说明政府不能停止或者减少媒体的报道宣传,必须对该种传染病持续宣传,才能控制传染病的流行.

为了验证时滞的作用,首先令 $\tau_1 = 0$,由式(19)可计算出 $\tau_2 = 71$.在图 3 的数值模拟中令 $\tau_2 = 100$ 时,可以看出 S , I , A 和 M 都发生不稳定的变化.

接下来再令 $\tau_2 = 0$,由式(22)可计算出 $\tau_3 = 90$.在图 4 的数值模拟中令 $\tau_1 = 100$ 时,可以看出 S , I , A 和 M 也都发生不稳定的变化.说明对传染病进行模拟和预测时,在时滞变大的情况下,对未来的预测会变得更加困难.因此当疾病爆发时,为了更好地帮助控制流行病的传

播,媒体应该尽量减小报道的时间滞后性;而易感人群也应该长期保持对媒体报道的敏感意识,一旦接受到传染病的相关信息,就要在最短时间内采取相应的预防保护措施。

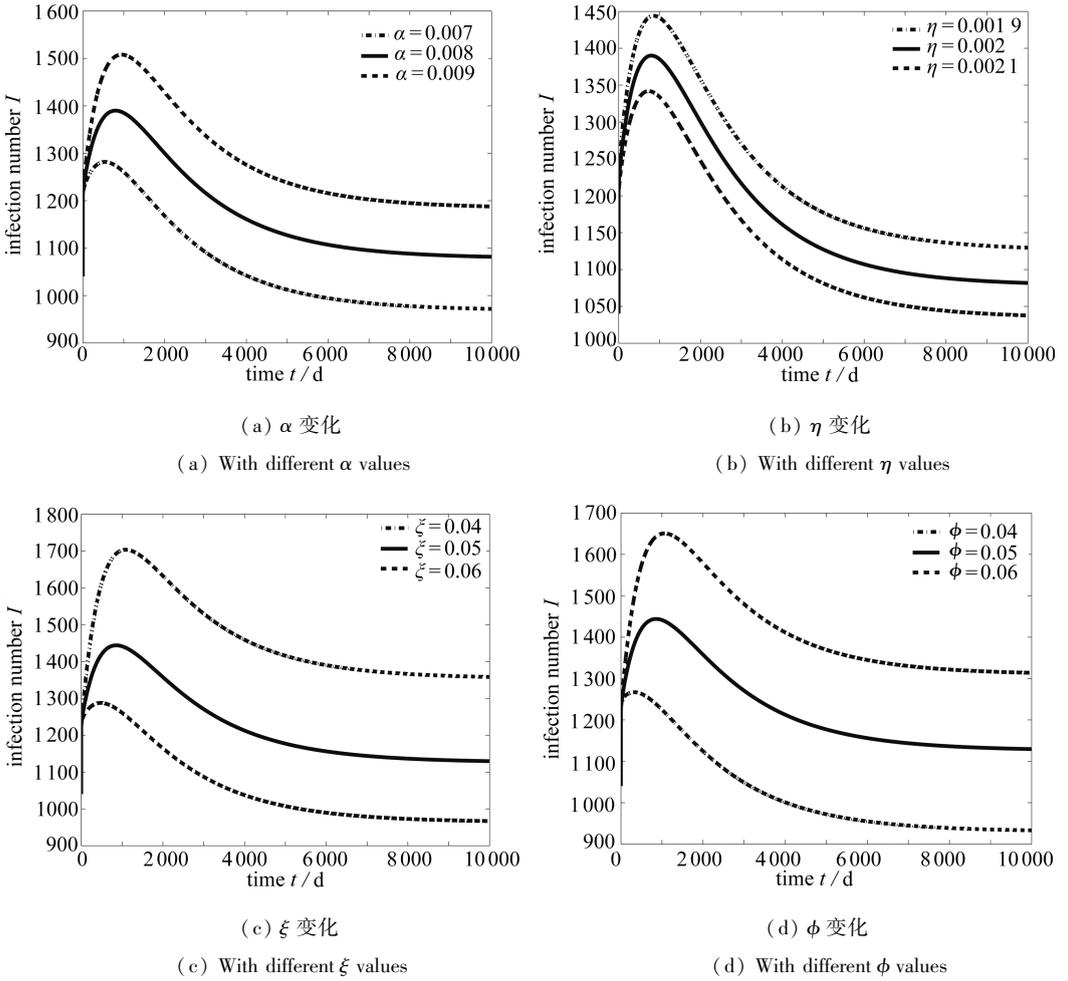
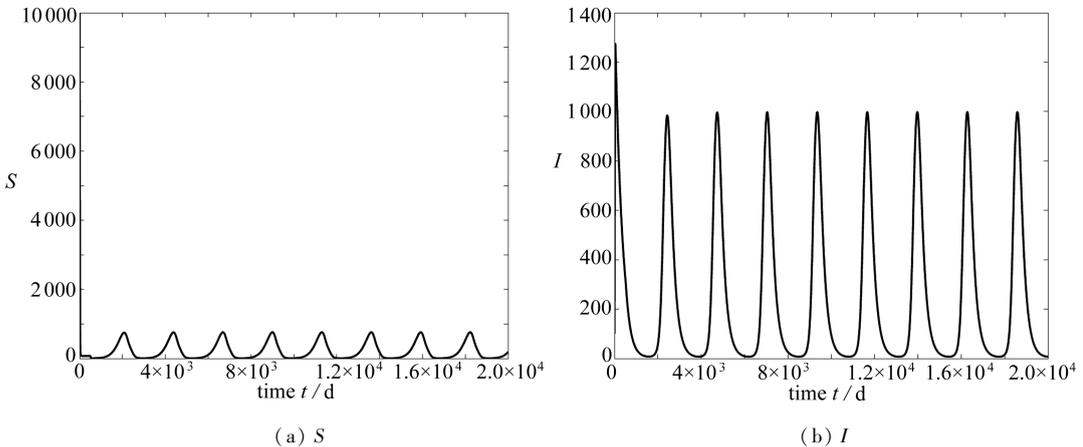


图 2 随着时间的变化 I 的变化趋势

Fig. 2 Infected population I vs. time t



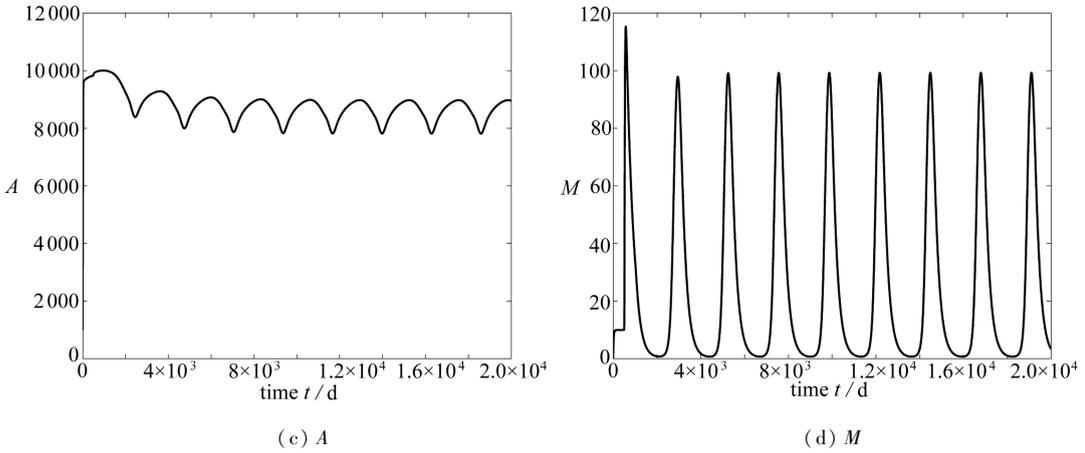


图 3 当 $\tau_2 = 100$ 时, 随着时间的变化 S, I, A 和 M 的变化趋势

Fig. 3 The phase plane diagram of S, I, A and M vs. t for $\tau_2 = 100$

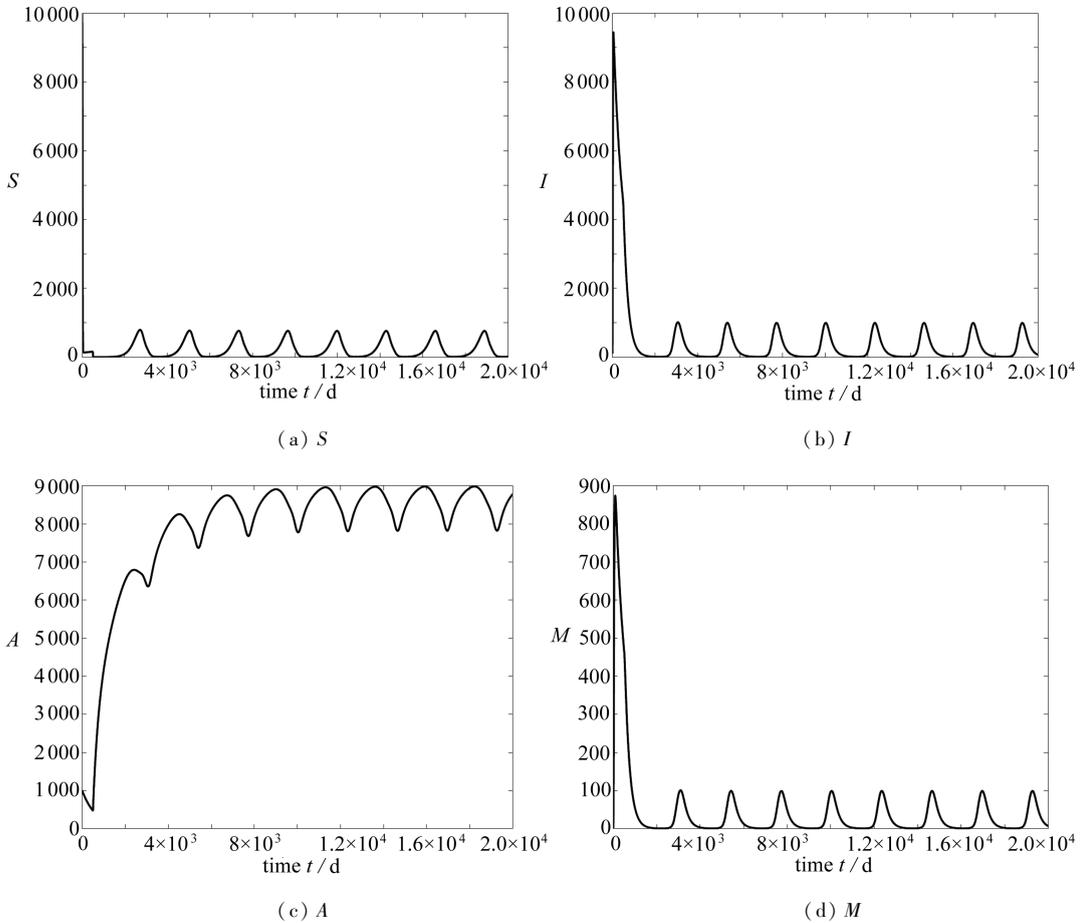


图 4 当 $\tau_1 = 100$ 时, 随着时间的变化 S, I, A 和 M 的变化趋势

Fig. 3 The phase plane diagram of S, I, A and M vs. t for $\tau_1 = 100$

5 结 论

本文建立并分析了一个关于媒体信息对传染病控制产生作用的数学模型,且考虑了两种时滞因素.通过分析相应的特征方程根,分别研究在时滞不同的5种情况下,系统稳定性发生变化,产生Hopf分支.在数值模拟部分,采用苏格兰小儿肺炎的例子验证媒体信息传播虽然不能治疗疾病,但可以有效减少染病者的数量,帮助流行病的控制.同时时滞对传染病的模拟和预测也有重要作用,媒体应当尽量减小报道的时间滞后性;而易感人群也应该长期保持对媒体报道的敏感意识,在最短时间内采取相应的预防保护措施.要注意的是本文的传染病模型只考虑到了个人与个人之间的直接传播方式,对于包含更多传播方式的传染病的研究将是后续研究工作.

参考文献(References):

- [1] Liu R S, Wu J H, Zhu H P. Media/psychological impact on multiple outbreaks of emerging infectious diseases[J]. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2007, **8**(3): 153-164.
- [2] Misra A K, Sharma A, Shukla J B. Modeling and analysis of effects of awareness programs by media on the spread of infectious diseases[J]. *Mathematical and Computer Modeling*, 2011, **53**(5/6): 1221-1228.
- [3] Cui J A, Sun Y H, Zhu H P. The impact of media on the control of infectious diseases[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2007, **20**(1): 31-53.
- [4] Collinson S, Khan K, Heffernan J M. The effects of media reports on disease spread and important public health measurements[J]. *PLoS ONE*, 2015, **10**(11): 1-21.
- [5] Misra A K, Sharma A, Singh V. Effect of awareness programs in controlling the prevalence of an epidemic with time delay[J]. *Journal of Biological Systems*, 2011, **19**(2): 389-402.
- [6] 刘玉英,肖燕妮.一类受媒体影响的传染病模型的研究[J].应用数学和力学,2013,**34**(4): 399-407.(LIU Yu-ying, XIAO Yan-ni. An epidemic model with saturated media/psychological impact[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(4): 399-407. (in Chinese))
- [7] Sun C, Yang W, Arino J, et al. Effect of media induced social distancing on disease transmission in a two patch setting[J]. *Mathematical Biosciences*, 2011, **230**(2): 87-95.
- [8] 张素霞,周义仓.考虑媒体作用的传染病模型的分析与控制[J].工程数学学报,2013,**30**(3): 416-426.(ZHANG Su-xia, ZHOU Yi-cang. Analysis and control of an epidemic model with media influence[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2013, **30**(3): 416-426. (in Chinese))
- [9] Greenhalgh D, Rana S, Samanta S, et al. Awareness programs control infectious disease-multiple delay induced mathematical model[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **251**: 539-563.
- [10] Olowokure B, Odedere O, Elliot A J, et al. Volume of print media coverage and diagnostic testing for influenza A(H1N1)pdm09 virus during the early phase of the pandemic[J]. *Journal of Clinical Virology*, 2012, **55**(1): 75-78.
- [11] Tchuente J M, Bauch C T. Dynamics of an infectious disease where media coverage influences transmission[J]. *ISRN Biomath*, 2012, **2012**(1). doi: 10.5402/2012/581274.
- [12] Funk S, Jansen V A. The talk of the town: modelling the spread of information and changes in behaviour[M]// Manfredi P, D'Onofrio A, ed. *Modeling the Interplay Between Human Behavior and the Spread of Infectious Diseases*. New York: Springer, 2012: 93-102.

- [13] Liu W. A SIRS epidemic model incorporating media coverage with random perturbation[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, **2013**(2): 764-787.
- [14] Freedman H I, So J W H. Global stability and persistence of simple food chains[J]. *Mathematical Biosciences*, 1985, **76**(1): 69-86.
- [15] Van den Driessche P, Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, **180**(1/2): 29-48.
- [16] Gopalsamy K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*[M]. *Mathematics and Its Applications*. Vol **74**. Dordrecht: Springer, 1992.
- [17] Hale J K. *Theory of Functional Differential Equations*[M]. *Applied Mathematical Sciences*. Vol **3**. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [18] Hale J K, Waltman P. Persistence in infinite-dimensional system[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1989, **20**(2): 388-396.
- [19] Lamb K E, Greenhalgh D, Robertson C. A simple mathematical model for genetic effects in pneumococcal carriage and transmission[J]. *Journal of Computational & Applied Mathematics*, 2011, **235**(7): 1812-1818.
- [20] Zhang Q, Arnaoutakis K, Murdoch C, et al. Mucosal immune responses to capsular pneumococcal polysaccharides in immunized preschool children and controls with similar nasal pneumococcal colonization rates[J]. *Pediatric Infectious Disease Journal*, 2004, **23**(4): 307-313.

An Epidemic Model With Dual Delays in View of Media Coverage

LIAO Shu, YANG Wei-ming

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and
Business University, Chongqing 400067, P.R. China)

Abstract: A multi-delay epidemic model in view of media coverage was established and analyzed. By means of the corresponding characteristic equation roots, the stability of the system was studied under 5 different time delay conditions, and the existence of the Hopf bifurcation was discussed. Furthermore, for a basic reproduction number greater than 1, the system's uniform persistence was proved based on the persistence theory. At last, numerical simulations were conducted to verify the analytical predictions and evaluate the effects of media coverage and time delays on the control of emerging infectious diseases.

Key words: media coverage; epidemic model; multiple delays; stability analysis; Hopf bifurcation; persistence

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11401059)

引用本文/Cite this paper:

廖书, 杨伟明. 考虑媒体播报效应的双时滞传染病模型[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(12): 1412-1424.

LIAO Shu, YANG Wei-ming. An epidemic model with dual delays in view of media coverage[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(12): 1412-1424.