文章编号:1000-0887(2017)09-1061-11

双荷子系统运动的经典解*

许雪艳[1], 陈海波[1], 张宏彬[1], 丁光涛[2]

(1. 巢湖学院 数理工程研究中心, 合肥 238000;
2. 安徽师范大学 物理与电子信息学院, 安徽 芜湖 241000)

摘要: 根据力学理论和经典电磁理论研究双荷子系统的运动.列出双荷子系统的运动微分方程,导出运动积分,说明系统的对称性,包括 SO(4)对称性;利用变分法逆问题方法,构造双荷子系统的 Lagrange(拉格朗日)函数和 Hamilton(哈密顿)函数;解出双荷子系统的运动规律.

关 键 词: 双荷子; Lagrange 函数; Hamilton 函数; 运动积分; 经典电磁理论

中图分类号: O302;O441 **文献标志码:** A doi:10.21656/1000-0887.380046

引 言

经典电磁理论的 Maxwell(麦克斯韦)方程,在无源情况下存在对偶性;由于只考虑电荷存在,故在有源情况下对偶性破坏;而引入磁荷后,有源情况下对偶性得以保持;同时具有电荷和磁荷的粒子称为双荷子(dyon),双荷子产生电磁场,也受到电磁场作用,根据存在电荷和磁荷的经典电磁理论,两个双荷子之间的相互作用,不同于两个带电粒子之间的相互作用;在若干关于双荷子系统量子化的研究中,系统 Hamilton 函数是直接引入的,或通过假设对称性条件加以修正的[1-4].

本文利用力学理论和方法,根据引入磁荷的经典电磁理论[5-11],研究两个双荷子组成系统的运动.首先,建立矢量形式、直角坐标形式和球坐标形式的双荷子系统运动微分方程,导出 3 种运动积分:能量积分、角动量积分和类似于平方反比有心力场的 Lenz 矢量的积分,表明该系统存在的 3 种对称性,包括 SO(4)对称性[12-13];其次,根据变分法逆问题理论和方法,证明双荷子系统两种坐标形式运动方程都能够表示成 Lagrange 方程形式,并构造出对应的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数[14-16];最后,利用运动积分求得系统运动的经典解,说明双荷子系统是完全可积的,并简要讨论其轨道分类和闭合性等问题.

1 双荷子系统运动微分方程和运动积分

1.1 3 种形式的双荷子系统运动微分方程

根据同时存在电荷和磁荷的经典电磁理论,Maxwell 方程为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_{\mathrm{e}},\ \nabla\times B=\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}+\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_{\mathrm{m}},\ \nabla\times E=-\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期:** 2017-02-28;**修订日期:** 2017-07-03

基金项目: 国家自然科学基金(11472063);高校优秀青年人才支持计划重点项目(gxyqZD2016286)

作者简介: 许雪艳(1976—),女,副教授,硕士(通讯作者. E-mail:xuxueyan2002@163.com).

式中 ρ_{e}, ρ_{m}, $\boldsymbol{j}_{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}$ 分别表示电荷密度、磁荷密度、电流密度和磁流密度.为了表述简单,本文选择适当单位制,使 $c=\hbar=1$, $\mu_0=\varepsilon_0=1$.双荷子的电荷为 e,磁荷为 g,在电磁场中所受的 Lorentz(洛仑兹)力为

$$\boldsymbol{F}=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+g(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}). \tag{2}$$

研究两个双荷子组成的系统,第一个双荷子电荷磁荷分别为 e_1, g_1,第二个双荷子电荷磁荷分别为 e_2, g_2,质量为 m.设第一个双荷子质量远大于 m,研究中可视为保持静止的中心双荷子,这样两个双荷子组成的系统与类氢离子相似.中心双荷子产生的电磁场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{e_1\boldsymbol{r}}{4\pi r^3},\ \boldsymbol{B}=\frac{g_1\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}, \tag{3}$$

第二个双荷子在上述场中运动,矢量形式的运动微分方程为

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{q_{\mathrm{e}}\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}+\frac{q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{r}}{4\pi}\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为第二个双荷子对中心双荷子的位置矢径,$\boldsymbol{v}$ 为其速度,且

$$\begin{cases} q_{\mathrm{e}}=e_1e_2+g_1g_2, \\ q_{\mathrm{m}}=e_2g_1-e_1g_2. \end{cases} \tag{5}$$

由方程(4)可知,在一般情况下,两个双荷子之间的作用力不再沿二者连线,即系统运动不再是有心运动,应当指出,如果将 m 看作两个双荷子的折合质量,那么方程(4)也就是两个双荷子在质心系中的相对运动微分方程.

下面将方程(4)写成直角坐标形式和球坐标形式.取中心双荷子为直角坐标系原点,方程(4)的直角坐标形式为

$$\begin{cases} m\ddot{x}=\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi}\dfrac{x}{r^3}+\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dfrac{(\dot{y}z-y\dot{z})}{r^3}, \\ m\ddot{y}=\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi}\dfrac{y}{r^3}+\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dfrac{(\dot{z}x-z\dot{x})}{r^3}, \\ m\ddot{z}=\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi}\dfrac{z}{r^3}+\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dfrac{(\dot{x}y-x\dot{y})}{r^3}, \end{cases} \tag{6}$$

式中　$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

取球坐标系极点与直角坐标系原点重合,矢径与 z 轴之间夹角为 θ,则方程(4)的球坐标形式为

$$\begin{cases} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\phi}^2\sin\theta)=\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r^2}, \\ m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)=\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi r}\dot{\phi}\sin\theta, \\ m(r\ddot{\phi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta+2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta)=-\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi r}\dot{\theta}. \end{cases} \tag{7}$$

1.2　双荷子系统的运动积分和对称性

首先从矢量形式的运动微分方程(4)出发讨论运动积分.方程(4)两边与速度 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$ 作标积,得到能量积分,即系统能量守恒:

$$E=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2+\frac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r}. \tag{8}$$

这个积分的存在表明双荷子系统存在时间平移对称性.

其次,方程(4)两边与矢径 $\boldsymbol{r}$ 作矢积,得

$$m\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times\left(\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dot{\boldsymbol{r}}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right). \tag{9}$$

由此得到角动量积分,即系统总角动量守恒:

$$\boldsymbol{J}=m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{L}+\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 是守恒矢量,其大小方向均不变,右边前一项为系统的机械角动量

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}, \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{p}=m\dot{\boldsymbol{r}}$ 是系统的机械动量;右边后一项

$$\boldsymbol{L}'=\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{12}$$

是与系统电磁场相关的角动量.$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}'$ 是相互垂直的,由此可以得到

$$J^2=L^2+L'^2=L^2+\frac{q_{\mathrm{m}}^2}{16\pi^2}. \tag{13}$$

由于 $\boldsymbol{J}$ 大小不变,而 q_{m} 是一个常数,即电磁场角动量 $\boldsymbol{L}'$ 大小不变,故从式(13)可知机械角动量 $\boldsymbol{L}$ 的大小也是不变的.积分 $\boldsymbol{J}$ 的存在表明双荷子系统存在空间旋转对称性.

最后,由于 $\boldsymbol{J}$ 是守恒矢量,故由式(4)和(10)可得

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J}=\dot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{J}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J})=\frac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{L}=-\frac{mq_{\mathrm{e}}}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right),$$

由此得到另一个矢量积分

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{J}+\frac{mq_{\mathrm{e}}}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{14}$$

这个积分与平方反比有心力场中粒子运动(Kepler(开普勒)运动)的 Laplace-Runge-Lenz(偏心率)矢量积分类似[14-15].这个矢量积分表明双荷子系统与平方反比有心力场运动相似,具有与作用力特性相关的动力学对称性,即 SO(4)对称性.

引入直角坐标系和球坐标系,上述守恒量可以写成坐标形式.为了下面讨论的需要,这里写出两种坐标形式的双荷子系统的能量积分:

$$I=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r}=E, \tag{15}$$

$$I=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\frac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r}=E. \tag{16}$$

2 双荷子系统 Lagrange 函数

2.1 微分方程的自伴随性条件

如果利用分析力学理论和方法研究双荷子系统运动,或者讨论系统量子化,则首先要将方程(6)和(7)分析力学化,构造出系统的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数.为此,先讨论两组方程的自伴随性问题[8-9].

设一组满足一定连续性和规则性条件的二阶常微分方程:

$$A_{ij}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}^j + B_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (i,\ j = 1,2,\cdots,n). \tag{17}$$

这里式(17)以及下面式(18)和(19)中采用求和约定,即对同一项中两个相同指标求和.如果方程(17)满足下列全部自伴随性条件:

$$\begin{cases} A_{ij} = A_{ji}, \\ \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{q}^k} = \dfrac{\partial A_{jk}}{\partial \dot{q}^i}, \\ \dfrac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j} + \dfrac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i} = 2\left\{\dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \dfrac{\partial}{\partial q^k}\right\} A_{ij}, \\ \dfrac{\partial B_i}{\partial q^j} - \dfrac{\partial B_j}{\partial q^i} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \dfrac{\partial}{\partial q^k}\right\}\left(\dfrac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j} - \dfrac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right), \end{cases} \tag{18}$$

则方程(17)为自伴随的,这样的方程能够直接从变分原理导出,即存在对应的 Lagrange 函数,而将其表示成 Lagrange 方程形式.

如果方程(17)不能直接满足全部自伴随性条件,但是可以通过等价变换得到新的方程:

$$A'_{ij}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}^j + B'_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = h_i^k[A_{kj}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}^j + B_k(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})] = 0, \tag{19}$$

式中 $\det\|h_i^k\| \neq 0$.如果方程(19)是自伴随的,那么可以从方程(19)构造对应的 Lagrange 函数,将原方程(17)间接表示成为 Lagrange 方程形式.

2.2 方程(6)和(7)的自伴随性

直接计算能够验证方程(6)是自伴随的,方程(7)不能满足全部自伴随性条件,即不是自伴随方程.但是,将方程(7)第二式乘以 r, 第三式乘以 $r\sin\theta$, 得到新的方程:

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin\theta) - \dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r^2} = 0, \\ m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta) - \dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dot{\phi}\sin\theta = 0, \\ m(r^2\ddot{\phi}\sin^2\theta + 2r^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta + 2r\dot{r}\dot{\phi}\sin^2\theta) + \dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dot{\theta}\sin\theta = 0. \end{cases} \tag{20}$$

直接计算可以验证方程(20)是自伴随的.这就表明方程(6)和(7)都能构造对应的 Lagrange 函数,直接或间接地表示成 Lagrange 方程形式.

2.3 利用第一积分构造 Lagrange 函数的方法

文献[10]提出了一种比较普遍的从运动积分构造 Lagrange 函数的方法.将满足规则性条件的方程(17)改写成运动学形式的,即

$$\ddot{q}^i = Q^i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{21}$$

若方程存在第一积分

$$I = I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{22}$$

满足条件

$$\det\left\|\frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right\| \neq 0, \tag{23}$$

则方程(17)(或方程(21))存在如下形式的 Lagrange 函数:

$$L = A(t,\boldsymbol{q})I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + B_i(t,\boldsymbol{q})\dot{q}^i + B_0(t,\boldsymbol{q}), \tag{24}$$

其中系数 A, B_i 和 B_0 满足偏微分方程组

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\dot{q}^k\frac{\partial A}{\partial q^k}\right)\frac{\partial I}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial A}{\partial q^i}I-2A\frac{\partial I}{\partial q^i}-A\frac{\partial I}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial Q^j}{\partial \dot{q}^i}+\frac{\partial B_i}{\partial t}+$$
$$\left(\frac{\partial B_i}{\partial q^j}-\frac{\partial B_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^j-\frac{\partial B_0}{\partial q^i}=0\qquad(i,\ j,k=1,2,\cdots,n).\tag{25}$$

式(24)和(25)中也采用求和约定.

2.4 双荷子系统直角坐标形式的 Lagrange 函数

由方程(6)可以直接得到

$$\begin{cases}Q_x=\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi m}\dfrac{x}{r^3}+\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi m}\dfrac{(\dot{y}z-y\dot{z})}{r^3},\\ Q_y=\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi m}\dfrac{y}{r^3}+\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi m}\dfrac{(\dot{z}x-z\dot{x})}{r^3},\\ Q_z=\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi m}\dfrac{z}{r^3}+\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi m}\dfrac{(\dot{x}y-x\dot{y})}{r^3}.\end{cases}\tag{26}$$

以 x,y,z 为 q_1,q_2,q_3,将 Q_x,Q_y,Q_z 和式(15)代入方程(25),得到

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial A}{\partial t}+\dfrac{\partial A}{\partial x}\dot{x}+\dfrac{\partial A}{\partial y}\dot{y}+\dfrac{\partial A}{\partial z}\dot{z}\right)m\dot{x}-\dfrac{\partial A}{\partial x}\left[\dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r}\right]+2A\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi}\dfrac{x}{r^3}-\\ \qquad A\left[\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dfrac{(y\dot{z}-z\dot{y})}{r^3}\right]+\dfrac{\partial B_x}{\partial t}+\left(\dfrac{\partial B_x}{\partial y}-\dfrac{\partial B_y}{\partial x}\right)\dot{y}+\left(\dfrac{\partial B_x}{\partial z}-\dfrac{\partial B_z}{\partial x}\right)\dot{z}-\dfrac{\partial B_0}{\partial x}=0,\\ \left(\dfrac{\partial A}{\partial t}+\dfrac{\partial A}{\partial x}\dot{x}+\dfrac{\partial A}{\partial y}\dot{y}+\dfrac{\partial A}{\partial z}\dot{z}\right)m\dot{y}-\dfrac{\partial A}{\partial y}\left[\dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r}\right]+2A\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi}\dfrac{y}{r^3}-\\ \qquad A\left[\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dfrac{(z\dot{x}-x\dot{z})}{r^3}\right]+\dfrac{\partial B_y}{\partial t}+\left(\dfrac{\partial B_y}{\partial z}-\dfrac{\partial B_z}{\partial y}\right)\dot{z}+\left(\dfrac{\partial B_y}{\partial x}-\dfrac{\partial B_x}{\partial y}\right)\dot{x}-\dfrac{\partial B_0}{\partial y}=0,\\ \left(\dfrac{\partial A}{\partial t}+\dfrac{\partial A}{\partial x}\dot{x}+\dfrac{\partial A}{\partial y}\dot{y}+\dfrac{\partial A}{\partial z}\dot{z}\right)m\dot{z}-\dfrac{\partial A}{\partial z}\left[\dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r}\right]+2A\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi}\dfrac{z}{r^3}-\\ \qquad A\left[\dfrac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\dfrac{(x\dot{y}-y\dot{x})}{r^3}\right]+\dfrac{\partial B_z}{\partial t}+\left(\dfrac{\partial B_z}{\partial x}-\dfrac{\partial B_x}{\partial z}\right)\dot{x}+\left(\dfrac{\partial B_z}{\partial y}-\dfrac{\partial B_y}{\partial z}\right)\dot{y}-\dfrac{\partial B_0}{\partial z}=0.\end{cases}\tag{27}$$

上述方程有一组没有明显三维旋转对称特征但形式比较简单的解

$$A=1,\ B_x=\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{yz}{r(x^2+y^2)},\ B_y=-\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi}\frac{zx}{r(x^2+y^2)},\ B_z=0,\ B_0=-\frac{q_{\mathrm{e}}}{2\pi r}.\tag{28}$$

将式(15)和(28)代入式(24),得到双荷子系统的一个 Lagrange 函数:

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi r}\frac{z(x\dot{y}-y\dot{x})}{x^2+y^2}-\frac{q_{\mathrm{e}}}{4\pi r}.\tag{29}$$

应当指出,方程(27)存在多组解,式(28)只是其中一组.可以选取另外二组类似的解,以构成具有明显三维旋转对称特征的 Lagrange 函数:

$$\begin{cases}A=1,\ B_x=\dfrac{1}{3}\dfrac{q_{\mathrm{m}}yz}{4\pi r}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{z^2+x^2}\right),\ B_y=\dfrac{1}{3}\dfrac{q_{\mathrm{m}}zx}{4\pi r}\left(\dfrac{1}{y^2+z^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right),\\ B_z=\dfrac{1}{3}\dfrac{q_{\mathrm{m}}xy}{4\pi r}\left(\dfrac{1}{z^2+x^2}-\dfrac{1}{y^2+z^2}\right),\ B_0=-\dfrac{q_{\mathrm{e}}}{2\pi r},\end{cases}\tag{30}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q_m yz\dot{x}}{12\pi r}\left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{z^2 + x^2}\right) + \frac{q_m zx\dot{y}}{12\pi r}\left(\frac{1}{y^2 + z^2} - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) + \frac{q_m xy\dot{z}}{12\pi r}\left(\frac{1}{z^2 + x^2} - \frac{1}{y^2 + z^2}\right) - \frac{q_e}{4\pi r}. \tag{31}$$

顺便指出,从式(29)容易利用坐标变换得到柱坐标(ρ,φ,z)形式的 Lagrange 函数:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q_m z\dot{\varphi}}{4\pi r} - \frac{q_e}{4\pi r}, \tag{32}$$

式中 $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$.

2.5 双荷子系统球坐标形式的 Lagrange 函数

与直角坐标系类似,由方程(7)(或方程(12))得到

$$\begin{cases} Q_r = r\dot{\theta}^2 + r\dot{\phi}^2\sin\theta + \dfrac{q_e}{4\pi r^2 m}, \\ Q_\theta = -2\dfrac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + \dfrac{q_m}{4\pi r^2 m}\dot{\phi}\sin\theta, \\ Q_\phi = -2\dfrac{\dot{r}\dot{\phi}}{r\sin\theta} - 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cot\theta - \dfrac{q_m}{4\pi r^2 m}\dfrac{\dot{\theta}}{\sin\theta}. \end{cases} \tag{33}$$

以 r,θ,ϕ 为 q_1,q_2,q_3,将 Q_r,Q_θ,Q_ϕ 和式(16)代入方程(25),得到

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{\partial A}{\partial r}\dot{r} + \dfrac{\partial A}{\partial \theta}\dot{\theta} + \dfrac{\partial A}{\partial \phi}\dot{\phi}\right)m\dot{r} - \dfrac{\partial A}{\partial r}I + 2A\dfrac{q_e}{4\pi r^2} + \\ \qquad \dfrac{\partial B_r}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial B_r}{\partial \theta} - \dfrac{\partial B_\theta}{\partial r}\right)\dot{\theta} + \left(\dfrac{\partial B_r}{\partial \phi} - \dfrac{\partial B_\phi}{\partial r}\right)\dot{\phi} - \dfrac{\partial B_0}{\partial r} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{\partial A}{\partial r}\dot{r} + \dfrac{\partial A}{\partial \theta}\dot{\theta} + \dfrac{\partial A}{\partial \phi}\dot{\phi}\right)mr^2\dot{\theta} - \dfrac{\partial A}{\partial \theta}I + A\dfrac{q_m}{4\pi}\dot{\phi}\sin\theta + \\ \qquad \dfrac{\partial B_\theta}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial B_\theta}{\partial \phi} - \dfrac{\partial B_\phi}{\partial \theta}\right)\dot{\phi} + \left(\dfrac{\partial B_\theta}{\partial r} - \dfrac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\dot{r} - \dfrac{\partial B_0}{\partial \theta} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial A}{\partial t} + \dfrac{\partial A}{\partial r}\dot{r} + \dfrac{\partial A}{\partial \theta}\dot{\theta} + \dfrac{\partial A}{\partial \phi}\dot{\phi}\right)mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta - \dfrac{\partial A}{\partial \phi}I - A\dfrac{q_m}{4\pi}\dot{\theta}\sin\theta + \\ \qquad \dfrac{\partial B_\phi}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial B_\phi}{\partial r} - \dfrac{\partial B_r}{\partial \phi}\right)\dot{r} + \left(\dfrac{\partial B_\phi}{\partial \theta} - \dfrac{\partial B_\theta}{\partial \phi}\right)\dot{\theta} - \dfrac{\partial B_0}{\partial \phi} = 0. \end{cases} \tag{34}$$

上述方程一组解为

$$A = 1,\ B_r = B_\theta = 0,\ B_\phi = -\frac{q_m}{4\pi}\cos\theta,\ B_0 = -\frac{q_e}{2\pi r}. \tag{35}$$

将式(16)和(35)代入式(24),得球坐标形式双荷子系统 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - \frac{q_m}{4\pi}\dot{\phi}\cos\theta - \frac{q_e}{4\pi r}. \tag{36}$$

2.6 双荷子系统球坐标形式的 Hamilton 函数

从 Lagrange 函数可以通过 Legendre(勒让德)变换导出 Hamilton 函数.由于直角坐标系形式的 Lagrange 函数形式太繁琐,故下面只利用球坐标来讨论双荷子系统运动.由式(36)的 Lagrange 函数得到球坐标形式的广义动量和 Hamilton 函数为

$$\begin{cases} p_r = m\dot{r},\ p_\theta = mr^2\dot{\theta},\ p_\phi = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta - \dfrac{q_\mathrm{m}}{4\pi}\cos\theta, \\ H = \dfrac{1}{2m}\left[p_r^2 + \dfrac{p_\theta^2}{r^2} + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(p_\phi^2 + \dfrac{q_\mathrm{m}}{2\pi}p_\phi\cos\theta + \dfrac{q_\mathrm{m}^2}{16\pi^2}\cos^2\theta\right)\right] + \dfrac{q_\mathrm{e}}{4\pi r}. \end{cases} \tag{37}$$

由前面推导过程可见,导出式(37)的 Hamilton 函数程序如下:从双荷子场强出发列出运动微分方程,从运动微分方程得到能量积分,利用变分法逆问题方法构造 Lagrange 函数后,由 Legendre 变换得到 Hamilton 函数.显然,整个过程没有涉及存在磁荷的电磁场中的势,以及与势相关的奇异弦问题,没有预先附加 Hamilton 函数需满足 SO(4)对称性要求的假设.因此,利用这个 Hamilton 函数来讨论双荷子系统的量子化问题,是更为适合的.

3 双荷子系统的运动求解

3.1 双荷子运动的几何特征

根据前面矢量力学讨论,双荷子系统存在 3 个大小不变的矢量 $\boldsymbol{J}$,$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{L}'$, 这 3 个矢量组成一个直角三角形,绕着守恒矢量 $\boldsymbol{J}$ 转动,$\boldsymbol{L}'$ 沿着矢径方向,且与 $\boldsymbol{J}$ 之间的夹角 φ 大小不变:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{q_\mathrm{m}}{4\pi J}\right). \tag{38}$$

这就是说,第二个双荷子在以中心双荷子为顶点、守恒矢量 $\boldsymbol{J}$ 为对称轴、半顶角为 φ 的固定圆锥面上运动.双荷子系统还存在类似偏心率积分的守恒矢量 $\boldsymbol{A}$, 与 Kepler 运动不同,这里 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 不垂直,但是两者之间夹角 α 不变:

$$\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{A} = JA\cos\alpha = \frac{mq_\mathrm{e}q_\mathrm{m}}{16\pi^2}, \tag{39}$$

而且 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 张成的平面是固定平面,双荷子的运动轨道对这个平面是对称的.由此可见,双荷子系统运动与平方反比有心力场中 Kepler 运动在几何特征上相似,前者在以守恒的总角动量为对称轴的固定圆锥面上运动,后者在垂直于守恒的角动量的固定平面上运动,而且两种运动轨道都以 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 张成的平面为对称平面,在一定意义上,后者可以看成前者的特殊情况.

3.2 双荷子运动的解析解

进一步讨论第二个双荷子的运动,需要考虑具体的守恒量,如能量积分(16)和角动量积分(10).将式(10)写成球坐标形式:

$$\boldsymbol{J} = mr^2\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta + mr^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{q_\mathrm{m}}{4\pi}\boldsymbol{e}_r, \tag{40}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$,$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 为球坐标的 3 个基矢,从式(13)得到

$$L^2 = J^2 - \frac{q_\mathrm{m}^2}{16\pi^2} = m^2r^4(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2), \tag{41}$$

从而可以将能量积分改写成

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{q_\mathrm{e}}{4\pi r}, \tag{42}$$

由此可以得到

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{q_\mathrm{e}}{4\pi r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}, \tag{43}$$

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{q_e}{4\pi r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}. \tag{44}$$

积分上式并反解,则可得 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, 即得到了轨道变量与时间的关系.

3.3 双荷子运动的轨道

在前面讨论双荷子系统运动积分时已经给出能量积分 E ,以及两个矢量积分 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{A}$, 共有 7 个标量积分,但是,由于它们之间存在两个关系,例如,式(38)和(39),故只有 5 个独立积分,它们给出了固定圆锥面上的粒子轨道的大小、方位、形状,加上积分(44)确定的粒子在轨道上的位置与时间的第 6 个函数关系,就完全确定了双荷子的运动.下面将从得到的运动积分出发,恰当地选择球坐标,以简化求解.显然,取直角坐标系 z 轴与矢径 $\boldsymbol{r}$ 之间夹角为球坐标系的 θ 角,并取守恒矢量 $\boldsymbol{J}$ 与 z 轴重合时,则容易得到两个固定圆锥面的积分:

$$\theta = \varphi, \ \dot{\theta} = 0. \tag{45}$$

为了导出第二个双荷子在这个圆锥面上的运动轨迹,再引入一个运动积分.由于式(35)的 Lagrange 函数中, ϕ 为循环坐标,故存在循环积分

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi}\sin^2\theta - \frac{q_m}{4\pi}\cos\theta = mr^2\dot{\phi}\sin^2\varphi - \frac{q_m}{4\pi}\cos\varphi = h. \tag{46}$$

由此可得

$$\dot{\phi} = \frac{h + \frac{q_m}{4\pi}\cos\varphi}{mr^2\sin^2\varphi} = \frac{h'}{mr^2}, \tag{47}$$

式中

$$h' = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(h + \frac{q_m}{4\pi}\cos\varphi\right). \tag{48}$$

引入变量变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} = \frac{h'}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}, \tag{49}$$

则由式(42)得到第二个双荷子在圆锥面上运动轨迹的一种微分方程为

$$E = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\frac{h'^2}{2mr^4} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{q_e}{4\pi r}, \tag{50}$$

由上式积分得到

$$\phi - \phi_0 = \int_{r_0}^{r}\frac{h'\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} - \frac{mq_e}{2\pi r}}}. \tag{51}$$

式(51)给出了粒子在 $\theta = \varphi$ 的固定圆锥面上的运动轨迹.

与 Kepler 运动类似,还可以通过另一途径导出粒子在 $\theta = \varphi$ 固定圆锥面上的运动轨迹.从式(42)可以导出第二个双荷子径向运动微分方程为

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} - \frac{q_e}{4\pi mr^2} = 0. \tag{52}$$

利用式(49)和变量变换 $u = 1/r$, 则从式(52)得到第二个双荷子在圆锥面上运动轨迹的另一

种微分方程：

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+\frac{L^2}{h'^2}u+\frac{mq_e}{4\pi h'^2}=0. \tag{53}$$

式(51)和(53)类似于传统二体问题的轨道方程和 Binet(比耐)公式[14-15].积分式(53),得到第二个双荷子在圆锥面上的运动轨道方程：

$$u=B\cos\left[\frac{L}{h'}(\phi-\phi_0)\right]-\frac{mq_e}{4\pi L^2}, \tag{54}$$

式中 B 和 ϕ_0 为积分常数.将上式还原为球坐标变量,得到

$$r=\frac{\dfrac{4\pi L^2}{mq_e}}{\dfrac{4\pi L^2}{mq_e}B\cos\left[\dfrac{L}{h'}(\phi-\phi_0)\right]-1}=\frac{p}{\varepsilon\cos[\beta(\phi-\phi_0)]-1}. \tag{55}$$

这个轨道方程与平方反比有心运动的轨道方程相似,但又存在区别,通过这个方程,可以讨论轨道的有限性和无限性,可以讨论有限的轨道闭合与否.例如,如果两个双荷子的电荷和磁荷符号和大小使得 $q_e<0$, 也就是说,方程(4)右端第一项对应着引力,那么上式可以写成

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos[\beta(\phi-\phi_0)]}, \tag{56}$$

式中

$$p=\frac{4\pi L^2}{m|q_e|},\ \varepsilon=\frac{4\pi BL^2}{m|q_e|},\ \beta=\frac{L}{h'}. \tag{57}$$

轨道方程(56)中,如果 $\varepsilon<1$, 则轨道是有限的,但是,这个轨道是否为闭合的,还要由参数 β 决定,只有它是有理数,或者说是整数之比轨道才是闭合的.对 $q_e>0$, 或 $q_e<0$ 而 $\varepsilon\geqslant 1$ 的情况,轨道是无限的.

对于双荷子系统特殊情况,例如,两个粒子都是电荷,或都是磁单极子,即系统 $q_e\neq 0$ 而 $q_m=0$, 那么,系统的运动就是简单的二体运动;但是,如果一个粒子是电荷,而另一个是磁单极子,即系统 $q_e=0$ 而 $q_m\neq 0$, 那么,从方程(54)得到轨道方程为

$$r\cos\left[\frac{L}{h'}(\phi-\phi_0)\right]=\frac{1}{B}. \tag{58}$$

这种系统的运动与通常的二体运动区别很大.

综合上述双荷子系统经典解的导出过程,实质上是与反平方有心运动类似,利用运动积分逐次约化系统运动微分方程,将三维运动约化成二维运动、一维运动,最后求得系统运动的过程.上述求解说明双荷子系统是完全可积的.

4 结论与讨论

本文利用矢量力学和分析力学的理论和方法,根据引入磁荷的经典电磁理论,讨论由两个双荷子组成系统的运动,得到如下结果：

1) 列出双荷子系统矢量形式、直角坐标形式和球坐标形式的运动微分方程,并由矢量形式运动微分方程导出能量积分(8),总角动量积分(10)和类似 Laplace-Runge-Lenz(偏心率)积分的矢量积分(14),在经典力学理论基础上证明双荷子系统具有 3 种对称性,包括 SO(4)对称性.此外,还写出直角坐标和球坐标表示的能量积分(15)和(16),球坐标形式的总角动量积

分(40).

2) 根据变分法逆问题理论和方法,证明双荷子系统两种坐标形式的运动微分方程分别具有直接或间接的自伴随性,表明系统可以分析力学化,并从能量积分构造得到双荷子系统的直角坐标形式 Lagrange 函数(29)和(31),柱坐标形式 Lagrange 函数(32),以及球坐标形式的 Lagrange 函数(36)和 Hamilton 函数(37).在分析力学化的过程中,只涉及双荷子电磁场的场强,而没有涉及场的势和势的奇异性,也没有对系统引入附加的要求存在 SO(4)对称性的假设,因此更适合在上述分析力学化的基础上处理双荷子系统量子化.

3) 从运动积分出发,直接求解经典双荷子系统的运动.证明双荷子的运动在一个固定圆锥面上,确定了该圆锥面的几何特征,得到了圆锥面上的轨道微分方程(50)、(53)和轨道方程(51)、(54)~(56),以及矢径与时间的函数关系(44),讨论了双荷子系统的运动与经典平方反比力场有心运动的相似和区别,以及双荷子系统的运动轨道有限和无限、闭合和不闭合的条件,求解过程表明双荷子系统是完全可积的.

4) 导出上述经典理论结果,具有潜在的理论意义.例如,对有限运动可以讨论能量和角动量量子化,对锥面上的无限运动可以讨论散射问题,并在理论讨论基础上进行有关实验,检测双荷子的存在与否,以及验证不同的引入磁荷的电磁理论是否符合实际.

参考文献(References):

[1] Dirac P A M. Quantised singularities in the electromagnetic field[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 1931, **133**(821): 60-72.

[2] Schwinger J. A magnetic model of matter[J]. *Science*, 1969, **165**(3895): 757-761.

[3] XU Bo-wei. On SO(4) symmetry of dyons system[J]. *Physica Energiae Portis et Physica Nuclearis*, 1986, **10**(2): 249-253.

[4] Ter-Antonyan V M, Nersessian A. Quantum oscillator and a bound system of two dyons[J]. *Modern Physics Letters A*, 1995, **10**(34): 2633-2638.

[5] Jackson J D. *Classical Electrodynamics*[M]. 3rd ed. New York: John & Wiley, 1998.

[6] WANG Zhong-yue. Generalized momentum equation of quantum mechanics[J]. *Optical and Quantum Electronics*, 2016, **48**(2): 107.

[7] Jackson J D, Fox R F. Classical electrodynamics, 3rd ed[J]. *American Journal of Physics*, 1999, **67**(9): 841.

[8] Becker M, Caprez A, Batelaan H. On the classical coupling between gravity and electromagnetism[J]. *Atoms*, 2015, **3**(3): 320-338.

[9] LI Kang, CHEN Wen-jun, Naón C M. Classical electromagnetic field theory in the presence of magnetic sources[J]. *Chinese Physics Letters*, 2003, **20**(3): 321-324.

[10] Santilli R M. Birkhoffian generalization of Hamiltonian mechanics[J]. *Journal of Forensic Sciences*, 1983, **54**(54): 1034-1041.

[11] Arbab A I. Complex Maxwell's equations[J]. *Chinese Physics B*, 2013, **22**(3): 030301-030304.

[12] Goldstein H, Poole C, Safko J, et al. Classical mechanics, 3rd ed[J]. *American Journal of Physics*, 2002, **70**(7): 782-783.

[13] 丁光涛. 理论力学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013. (DING Guang-tao. *Theoretical Mechanics*[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2013. (in Chinese))

[14] Santilli R M. *Foundations of Theoretical Mechanics II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
[15] HE Jin-man, XU Yan-li, LUO Shao-kai. Stability for manifolds of the equilibrium state of fractional Birkhoffian systems[J]. *Acta Mechanica*, 2015, **226**(7): 2135-2146.
[16] 丁光涛. 从第一积分构造 Lagrange 函数的直接方法[J]. 动力学与控制学报, 2011, **9**(2): 102-106.(DING Guang-tao. A direct approach to construction of the Lagrangian from the first integral[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, **9**(2): 102-106.(in Chinese))

Classical Solutions of Motion for Dyon Systems

XU Xue-yan[1], CHEN Hai-bo[1], ZHANG Hong-bin[1], DING Guang-tao[2]
(1. *The Interdisciplinary Center for Study on Maths, Physics and Engineering, Chaohu University, Hefei* 238000, *P.R.China*;
2. *College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu, Anhui* 241000, *P.R.China*)

Abstract: According to the mechanics theories and the classical electromagnetism, the motion of 2-dyon systems was studied. Some integrals of motion, including the energy integral, the total angular momentum integral and the Runge-Lenz-like integral, were derived from the differential equations of motion for the system, then the SO(4) symmetry of the system was exposed. With the inverse problem method of variational calculus, the Lagrangian function and the Hamiltonian function for the 2-dyon system were constructed. The classical motion of the system is completely integrable, the equations of the orbit and the relation between radial distance r and time t are solvable.

Key words: dyon; Lagrangian function; Hamiltonian function; integral of motion; classical electromagnetism
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11472063)

引用本文/Cite this paper:
许雪艳, 陈海波, 张宏彬, 丁光涛. 双荷子系统运动的经典解[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(9): 1061-1071.
XU Xue-yan, CHEN Hai-bo, ZHANG Hong-bin, DING Guang-tao. Classical solutions of motion for dyon systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(9): 1061-1071.