

汽车电磁悬架系统的 Noether 对称性及其应用*

崔新斌¹, 傅景礼²

(1. 浙江理工大学 机械与自动控制学院, 杭州 310018;

2. 浙江理工大学 理学院, 杭州 310018)

摘要: 研究了含有电磁悬架汽车振动系统的 Noether 对称性,给出了系统的守恒量,并通过守恒量求得系统的对称性解.以能量形式,建立汽车不同振动形式下的 Lagrange(拉格朗日)方程.选取位移坐标为广义坐标,研究了各种振动形式下系统的 Noether 对称性,并给出相应的 Noether 恒等式、Killing 方程和广义 Noether 定理.研究系统守恒量,运用存在的守恒量,给出一种新的求解汽车振动系统响应的方法;并应用到具体的车体振动系统计算中,给出了系统在转弯、制动或加速等情况下的位移响应和速度响应曲线.

关键词: 电磁悬架; Lagrange 方程; Noether 对称性; 守恒量

中图分类号: O316

文献标志码: A

doi: 10.21656/1000-0887.380060

引言

现今,汽车的稳定性和乘客安全受到汽车设计师的高度关注,越来越多的先进机械设备和电子系统被应用到汽车上.汽车悬架就是一个重要的被考虑对象.汽车悬架按照控制方式不同可分为被动减振、半主动减振和主动减振三大类^[1-3].现在,随着电磁材料和电控技术的飞速发展,主动悬架的研究和应用已得到了广泛的关注^[4-7].

分析力学是从能量的角度阐述力学的基本原理,简化了系统的分析过程,并依据这些原理推导出了系统运动微分方程,在系统建模方面得到了广泛的应用^[8-9].Noether 对称性揭示了力学系统的守恒量与其内在的动力学对称性之间的关系.随着多年的发展, Noether 对称性与守恒量理论和 Lie 对称性与守恒量理论被推广到非保守系统、非完整系统、Birkhoff 系统等各类约束力学系统中^[10-12].在实际应用过程中,无论是机械系统^[13]、电路系统^[14-16]、压电系统^[17]和机电系统^[9,18-19],分析力学的理论,对称性理论都得到了广泛的应用.利用对称性研究系统,只要求得到足够守恒量,就能得到系统运动微分方程的精确定解.

汽车振动系统是一种比较常见的机械系统.对于整车,需要每个轮胎处达到减振效果,且每处具有相同的性能,因此研究 1/4 汽车的振动.可将其振动形式分为两种形式,一种为汽车

* 收稿日期: 2017-03-15; 修订日期: 2017-04-12

基金项目: 国家自然科学基金(11472247;11272287)

作者简介: 崔新斌(1990—),男,硕士(E-mail: hzcuixinbin@163.com);

傅景礼(1955—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: sqfujingli@163.com).

直线行驶,由于路面不平引起的汽车振动;另一种为汽车在转弯、制动或加速时,引起的汽车车身的倾斜和振动.利用分析力学的方法对两种振动形式进行建模,建立 Lagrange 运动微分方程,并在一定条件下对系统进行简化.再分别研究不同振动形式的对称性,主要研究 Noether 对称性,并求得在相应对称性下的守恒量.利用守恒量可以对系统进行降阶,进而求得其精确解,绘制动态响应.电磁悬架采用反馈控制,可以通过控制反馈系数,比较响应曲线,从而找到比较合适的反馈方式和反馈系数.

1 汽车电磁悬架系统的振动模型及其动力学方程

电磁作动器可以将机械能与电能相互转化,它是电磁悬架的重要元件.电磁作动器可以不用旋转电机驱动而直接产生轴向直线运动,为电磁悬架提供外力以达到减震效果.对于理想的作动器,输入电流或电压与输出力呈线性关系.通过控制输入电流或电压可以控制输出力的大小,且输出具有作用力大、响应快、无接触等优点.

1.1 汽车直线行驶时的系统建模

图 1(a)为含有电磁悬架的 1/4 车辆模型.

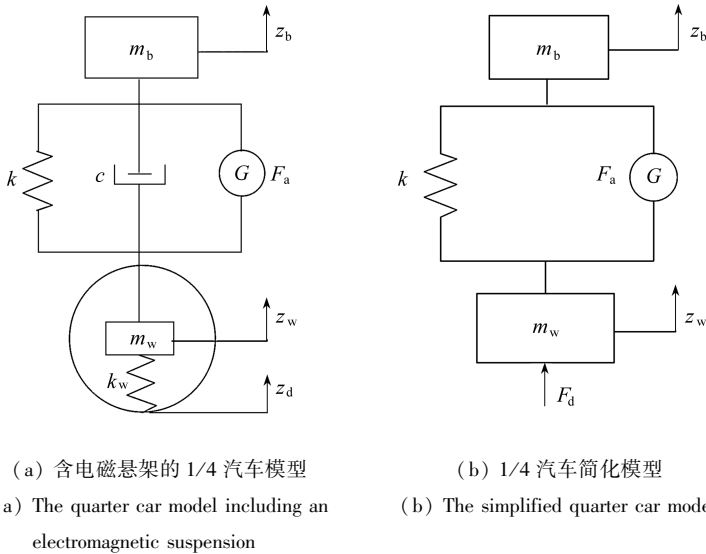


图 1 汽车直线行驶时 1/4 汽车电磁悬架系统模型

Fig. 1 Electromagnetic suspension system model of 1/4 vehicle during linear driving

在图 1 中,质量块 m_b , m_w 分别代表车身与车轮的等效质量, k_w 代表车轮的等效弹性系数, k 为悬架弹簧的弹性系数, c 为车振动时的机械阻尼,装置 G 为电磁作动器,通过反馈系统为悬架系统提供双向的轴向力, z_b 为车身在竖直方向的位移, z_w 为车轮质心在竖直方向的位移, z_d 为来自地面的扰动, z_b , z_w , z_d 分别为其对应物体偏离静止平衡位置的位移. F_a 为汽车电磁悬架产生的主动力, F_a 的大小通过传感器反馈数据得到,规定向上为正方向.

当汽车直线行驶时,汽车车身的振动主要来源于地面的扰动,即位移 z_d .为便于计算,将系统进行简化,车轮弹性变形较小,可以忽略不计,地面扰动力 F_d 代替.该计算主要处理理想电磁悬架的隔振效果,因此,忽略机械阻尼,只考虑主动减震,系统简化模型如图 1(b).

一般系统 Lagrange 方程为^[19]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_s} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{z}_s} - \frac{\partial L}{\partial z_s} = Q_s, & s = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = E_k, & k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (1)$$

式中, z_s, q_k 为系统相互独立的机械与电路广义坐标, $L = T + W_m^* - V - W_e$ 为系统 Lagrange 函数, T 为系统动能, W_m^* 为系统磁余能, V 为系统势能, W_e 为系统电能, Q_s 和 E_k 为对应广义坐标的广义力和电源电压, 广义力即为系统所受的非势场力。

对于图 1(b) 所示系统, 系统动能为

$$T = \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2 + \frac{1}{2} m_w \dot{z}_w^2. \quad (2)$$

势能为

$$V = \frac{1}{2} k (z_b - z_w)^2. \quad (3)$$

电磁作动器采用电流源控制, 因此电流 i 不再是广义坐标, 系统磁余能函数为

$$W_m^* = Ki (z_b - z_w - z_0), \quad (4)$$

式中, K 为作动器换能常量, z_0 为任意参考位置, 取汽车静止平衡位置为参考位置, 且在平衡位置 $z_0 = 0$. 因此式(4)可以转化为

$$W_m^* = Ki (z_b - z_w). \quad (5)$$

因此, 系统 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m_w \dot{z}_w^2 + \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2 + Ki (z_b - z_w) - \frac{1}{2} k (z_b - z_w)^2. \quad (6)$$

系统广义坐标对应的广义力为

$$Q_b = 0, \quad Q_w = F_d. \quad (7)$$

系统无耗散, 将式(6)和(7)代入式(1)可以得到系统 Lagrange 方程, 即系统运动微分方程为

$$\begin{cases} m_b \ddot{z}_b + k (z_b - z_w) - Ki = 0, \\ m_w \ddot{z}_w - k (z_b - z_w) + Ki = F_d. \end{cases} \quad (8)$$

1.2 汽车转弯、制动或加速行驶时的系统建模

考虑汽车在转弯、制动或加速的情况, 影响汽车驾驶舒适性能的主要是车身倾斜的变化, 即由于扭转力的存在而导致汽车 4 个车轮处的高度变化. 忽略路面扰动情况, 将每个轮处的扭转力等效为车身受外力, 建立模型. 图 2(a) 为不含电磁作动器的被动减震 1/4 汽车模型, 图 2(b) 为含有电磁作动器的主动减震 1/4 汽车模型.

图中 m_b 为 1/4 汽车车身等效质量, F_b 为车身所受等效力, k 为悬架弹簧弹性系数, c 为被动阻尼的阻尼系数, z_b 为车身偏离平衡位置的位移, 装置 G 为电磁作动器, 作动器为车身提供双向的轴向力, 其大小通过检测 m_b 振动位移决定, 反馈控制系统品质要求更为稳定、快速和准确.

对于图 2(b) 所示系统, 系统减少了阻尼耗散. 系统动能函数为

$$T = \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2. \quad (9)$$

取 m_b 在平衡位置的系统势能为 0. 系统势能函数为

$$V = \frac{1}{2} k z_b^2. \quad (10)$$

系统磁余能函数为

$$W_m^* = K i z_b. \quad (11)$$

系统广义坐标对应的广义力为

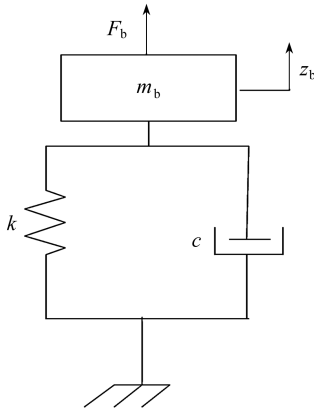
$$Q_b = F_b, \quad Q_w = 0. \quad (12)$$

系统 Lagrange 函数为

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2 + K i z_b - \frac{1}{2} k z_b^2. \quad (13)$$

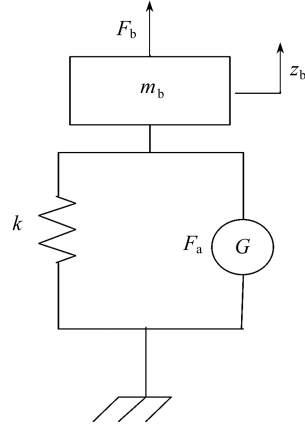
将式(12)与(13)代入式(1)可得到图 2(b) 系统的 Lagrange 方程为

$$m_b \ddot{z}_b + k z_b - K i = F_b. \quad (14)$$



(a) 含有被动阻尼的 1/4 汽车模型

(a) The quarter car model including passive damping



(b) 含有电磁作动器的 1/4 汽车模型

(b) The quarter car model including an electromagnetic actuator

图 2 不同形式的 1/4 汽车模型

Fig. 2 Different forms of the quarter car model

2 电磁悬架系统的 Noether 对称性及其守恒量

2.1 汽车直线行驶时 1/4 汽车振动系统 Noether 对称性及其守恒量

对于图 1(b) 所示系统,取时间和坐标的微小变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t = t + \varepsilon \xi_0(t, z_w, z_b, \dot{z}_w, \dot{z}_b), \\ z_b^*(t^*) = z_b(t) + \Delta z_b = z_b(t) + \varepsilon \xi_b(t, z_w, z_b, \dot{z}_w, \dot{z}_b), \\ z_w^*(t^*) = z_w(t) + \Delta z_w = z_w(t) + \varepsilon \xi_w(t, z_w, z_b, \dot{z}_w, \dot{z}_b), \end{cases} \quad (15)$$

其中 ε 为一无限小参数, ξ_0, ξ_w, ξ_b 为无限小生成元。

对于该系统,如果存在规范函数 $G = G(t, z_w, z_b, \dot{z}_w, \dot{z}_b)$, 那么系统的 Noether 恒等式为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial L}{\partial z_w} \xi_w + \frac{\partial L}{\partial z_b} \xi_b + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_w} \dot{\xi}_w + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_b} \dot{\xi}_b + \\ & \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_w} \dot{z}_w - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_b} \dot{z}_b \right) \dot{\xi}_0 + F_d(\xi_w - \dot{z}_w \xi_0) = -\dot{G}. \end{aligned} \quad (16)$$

即

$$[k(z_b - z_w) - Ki]\xi_w + [Ki - k(z_b - z_w)]\xi_b + m_w \dot{z}_w \dot{\xi}_w + m_b \dot{z}_b \dot{\xi}_b - \frac{1}{2}[m_b \dot{z}_b^2 + m_w \dot{z}_w^2 - 2Ki(z_b - z_w) + k(z_b - z_w)^2]\dot{\xi}_0 + F_d(\xi_w - \dot{z}_w \xi_0) = -\dot{G}. \quad (17)$$

在无限小变换下,解 Noether 等式(16),可得到无限小生成元 ξ_0, ξ_w, ξ_b . 通过将恒等式(17)展开,分解对 ξ_0, ξ_w, ξ_b, G 的一阶偏微分方程组,即图 2 的系统广义 Killing 方程为

$$[k(z_b - z_w) - Ki]\xi_w - [k(z_b - z_w) - Ki]\xi_b - \frac{1}{2}[m_b \dot{z}_b^2 + m_w \dot{z}_w^2 - 2Ki(z_b - z_w) + k(z_b - z_w)^2] \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial z_b} \dot{z}_b + \frac{\partial \xi_0}{\partial z_w} \dot{z}_w \right) + m_b \dot{z}_b \left(\frac{\partial \xi_b}{\partial t} + \frac{\partial \xi_b}{\partial z_b} \dot{z}_b + \frac{\partial \xi_b}{\partial z_w} \dot{z}_w \right) + m_w \dot{z}_w \left(\frac{\partial \xi_w}{\partial t} + \frac{\partial \xi_w}{\partial z_b} \dot{z}_b + \frac{\partial \xi_w}{\partial z_w} \dot{z}_w \right) + F_d(\xi_w - \dot{z}_w \xi_0) = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial z_b} \dot{z}_b - \frac{\partial G}{\partial z_w} \dot{z}_w, \quad (18a)$$

$$-\frac{1}{2}[m_b \dot{z}_b^2 + m_w \dot{z}_w^2 - 2Ki(z_b - z_w) + k(z_b - z_w)^2] \frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{z}_b} + m_b \dot{z}_b \frac{\partial \xi_b}{\partial \dot{z}_b} + m_w \dot{z}_w \frac{\partial \xi_w}{\partial \dot{z}_b} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{z}_b}, \quad (18b)$$

$$-\frac{1}{2}[m_b \dot{z}_b^2 + m_w \dot{z}_w^2 - 2Ki(z_b - z_w) + k(z_b - z_w)^2] \frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{z}_w} + m_b \dot{z}_b \frac{\partial \xi_b}{\partial \dot{z}_w} + m_w \dot{z}_w \frac{\partial \xi_w}{\partial \dot{z}_w} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{z}_w}. \quad (18c)$$

通过解方程(17)和方程组(18)可以求得生成元 ξ_0, ξ_w, ξ_b 和对应的规范函数 G .

取在一段短时间内来自地面的激振力为常数,即 $F_d = C$, 作动器反馈力的大小由电流的大小决定,而电流的大小可由位移、速度等反馈决定.在这种情况下考虑系统的对称性及守恒量,通过计算可以得到生成元如下:

$$\begin{cases} \xi_b = \xi_w = 1, \xi_0 = 0, G = -Ct; \\ \xi_b = \xi_w = 0, \xi_0 = 1, G = Cz_w; \\ \xi_b = \dot{z}_b, \xi_w = \dot{z}_w, \xi_0 = 0, \\ G = -\frac{1}{2} m_w \dot{z}_w^2 - \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2 + Ki(z_b - z_w) - \frac{1}{2} k(z_b - z_w)^2 + Cz_w. \end{cases} \quad (19)$$

定理 1 假定给定的有限群 G 的无限小变换(15)是汽车直线行驶时 1/4 汽车振动系统的广义准对称变换,那么系统存在第一积分,形如

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_w}(\xi_w - \dot{z}_w \xi_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_b}(\xi_b - \dot{z}_b \xi_0) + G = \text{const}. \quad (20)$$

因此,生成元(19)对应的守恒量分别为

$$\begin{cases} I_1 = m_w \dot{z}_w + m_b \dot{z}_b - Ct = \text{const}, \\ I_2 = -\frac{1}{2} m_w \dot{z}_w^2 - \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2 + Ki(z_b - z_w) - \frac{1}{2} k(z_b - z_w)^2 + Cz_w = \text{const}, \\ I_3 = \frac{1}{2} m_w \dot{z}_w^2 + \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2 - Ki(z_b - z_w) + \frac{1}{2} k(z_b - z_w)^2 - Cz_w = \text{const}. \end{cases} \quad (21)$$

如果有足够的守恒量,守恒量就可以用于求运动方程的精确解,同时可以用于对方程求数值解.但这些守恒量并不是相对独立的,且

$$I_2 = -I_3. \quad (22)$$

2.2 汽车转弯、制动或加速行驶时 1/4 汽车振动系统的 Noether 对称性及其守恒量

对于汽车转弯、加速或制动行驶时,汽车电磁悬架系统即图 2(b) 系统,取时间和坐标的微小变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t = t + \varepsilon \xi_0(t, z_b, \dot{z}_b), \\ z_b^*(t^*) = z_b(t) + \Delta z_b = z_b(t) + \varepsilon \xi_b(t, z_b, \dot{z}_b), \end{cases} \quad (23)$$

其中 ε 为一无限小参数, ξ_0, ξ_b 为无限小生成元.

对于该系统,如果存在规范函数 $G = G(t, z_b, \dot{z}_b)$, 那么系统的 Noether 恒等式为

$$(Ki - kz_b)\xi_b + m_b \dot{z}_b \dot{\xi}_b - \frac{1}{2} [m_b \dot{z}_b^2 - 2Kiz_b + kz_b^2] \dot{\xi}_0 + F_b(\xi_b - \dot{z}_b \xi_0) = -\dot{G}. \quad (24)$$

在无限小变换下,解 Noether 恒等式(24),可得到无限小生成元 ξ_0, ξ_b . 通过将恒等式(24)展开,分解对 ξ_0, ξ_b, G 的一阶偏微分方程组,即图 2(b) 系统广义 Killing 方程为

$$\begin{aligned} (Ki - kz_b)\xi_b - \frac{1}{2}(m_b \dot{z}_b^2 - 2Kiz_b + kz_b^2) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial z_b} \dot{z}_b \right) + \\ m_b \dot{z}_b \left(\frac{\partial \xi_b}{\partial t} + \frac{\partial \xi_b}{\partial z_b} \dot{z}_b \right) + F_b(\xi_b - \dot{z}_b \xi_0) = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial z_b} \dot{z}_b, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$-\frac{1}{2}(m_b \dot{z}_b^2 - 2Kiz_b + kz_b^2) \frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{z}_b} + m_b \dot{z}_b \frac{\partial \xi_b}{\partial \dot{z}_b} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{z}_b}. \quad (25b)$$

通过解方程(24)和方程组(25)可以求得生成元 ξ_0, ξ_b 和对应的规范函数 G . 车身在扭转力下发生倾斜时,在极短时间内车身受力可考虑为恒定值,因此,取 $F_b = C_0$ 为常数.通过计算式(24)和(25)可求得生成元:

$$\begin{cases} \xi_b = 0, \xi_0 = 1, G = C_0 z_b; \\ \xi_b = \dot{z}_b, \xi_0 = 0, G = \frac{1}{2} kz_b^2 - (Ki + C_0) z_b - \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2; \\ \xi_b = e^{j\sqrt{k/m_b} t}, \xi_0 = 0, G = -m_b z_b j \sqrt{\frac{k}{m_b}} e^{j\sqrt{k/m_b} t} + (C_0 + Ki) j e^{j\sqrt{k/m_b} t}; \\ \xi_b = e^{-j\sqrt{k/m_b} t}, \xi_0 = 0, G = m_b z_b j \sqrt{\frac{k}{m_b}} e^{-j\sqrt{k/m_b} t} - (C_0 + Ki) j e^{-j\sqrt{k/m_b} t}, \end{cases} \quad (26)$$

其中 j 为虚数单位, $j^2 = -1$.

定理 2 假定给定的有限群 G 的无限小变换(23)是转弯、制动或加速行驶时 1/4 汽车振动系统的广义准对称变换,那么系统存在第一积分,形如

$$I' = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_b}(\xi_b - \dot{z}_b \xi_0) + G = \text{const}. \quad (27)$$

因此,生成元(26)对应的守恒量为

$$\begin{cases} I'_1 = -\frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2 + Kiz_b - \frac{1}{2} kz_b^2 + C_0 z_b = \text{const}, \\ I'_2 = \frac{1}{2} kz_b^2 - (Ki + C_0) z_b + \frac{1}{2} m_b \dot{z}_b^2 = \text{const}, \end{cases} \quad (28a)$$

$$\begin{cases} I'_3 = m_b \dot{z}_b e^{j\sqrt{k/m_b}t} - m_b z_b j \sqrt{\frac{k}{m_b}} e^{j\sqrt{k/m_b}t} + (C_0 + Ki) j \sqrt{\frac{m_b}{k}} e^{j\sqrt{k/m_b}t}, \\ I'_4 = m_b \dot{z}_b e^{-j\sqrt{k/m_b}t} + m_b z_b j \sqrt{\frac{k}{m_b}} e^{-j\sqrt{k/m_b}t} - (C_0 + Ki) j \sqrt{\frac{m_b}{k}} e^{-j\sqrt{k/m_b}t}. \end{cases} \quad (28b)$$

3 汽车电磁悬架系统的动态响应

MATLAB 软件具有矩阵计算、绘制函数和数据、实现算法等功能,通过编写循环计算程序,可用于对汽车电磁悬架系统的守恒量 and 对称性解的计算.对于同一车辆,无论在直线行驶还是转弯、制动或加速行驶,其悬架的系统是一样的.因此,其反馈控制也是一样的.反馈控制系统主要通过反馈方式,反馈系数来控制,上述计算时,若主要采用速度反馈方式,则只要设置反馈系数的大小就能控制悬架的减震效果.同时,也可采用速度与位移复合反馈.在这里,计算转弯、制动或加速行驶时悬架的减振性能.由守恒量(28)可以求得

$$\begin{cases} z_b = \frac{I'_4}{2m_b j \sqrt{\frac{m_b}{k}}} e^{j\sqrt{k/m_b}t} - \frac{I'_3}{2m_b j \sqrt{\frac{m_b}{k}}} e^{-j\sqrt{k/m_b}t} + \frac{C_0 + Ki}{k}, \\ \dot{z}_b = \frac{I'_4}{2m_b} e^{j\sqrt{k/m_b}t} + \frac{I'_3}{2m_b} e^{-j\sqrt{k/m_b}t}, \end{cases} \quad (29)$$

式中, I'_3 和 I'_4 为守恒量,可以通过初始条件来确定其初始数值的大小,若

$$z_b|_{t=0} = z_b(0), \quad \dot{z}_b|_{t=0} = \dot{z}_b(0), \quad (30)$$

则

$$\begin{cases} I'_3 = m_b \dot{z}_b(0) - m_b z_b(0) j + (C_0 + Ki) j \sqrt{\frac{m_b}{k}}, \\ I'_4 = m_b \dot{z}_b(0) + m_b z_b(0) j \sqrt{\frac{k}{m_b}} - (C_0 + Ki) j \sqrt{\frac{m_b}{k}}. \end{cases} \quad (31)$$

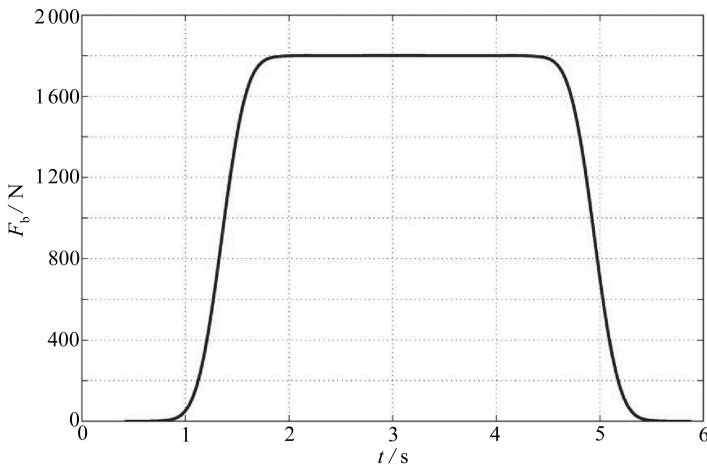


图3 适用于 1/4 汽车质量的车身载荷随时间变化的载荷分布

Fig. 3 The load time history applied on the quarter-car mass

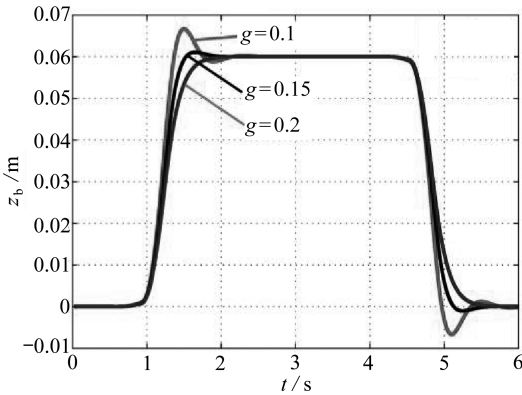
上述守恒量 and 对称性解可借助 MATLAB 进行逐步循环计算.由于该算法循环计算方式比

Runge-Kutta 法迭代计算简单,因此该方法在计算速度上较快.同时,在某时刻的对称性解更接近于精确解,因此解的精度也是足够高.为说明对称性解的用法,表 1 给定了 1/4 汽车相应的参数,图 3 给出了适用于 1/4 汽车质量的车身载荷随时间变化的载荷分布.

表 1 1/4 汽车等效参数

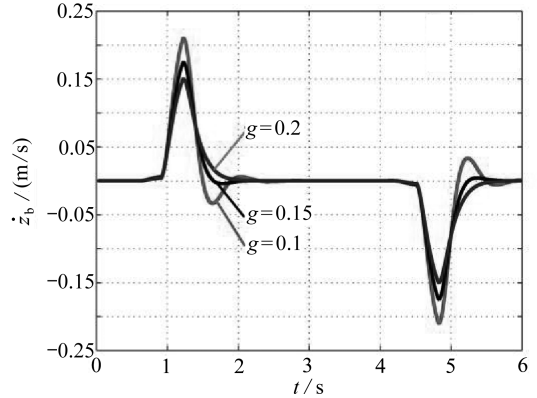
Table 1 Equivalent parameters of the quarter-car

parameter	value	description
$k / (\text{kN/m})$	30	spring constant of the passive suspension
$K / (\text{kN/A})$	32	electromechanical coefficient of the electromagnetic actuator
m_b / kg	400	quarter spring mass



(a) 位移响应

(a) The displacement response

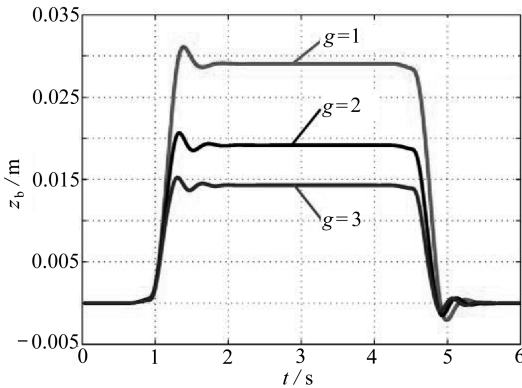


(b) 速度响应

(b) The velocity response

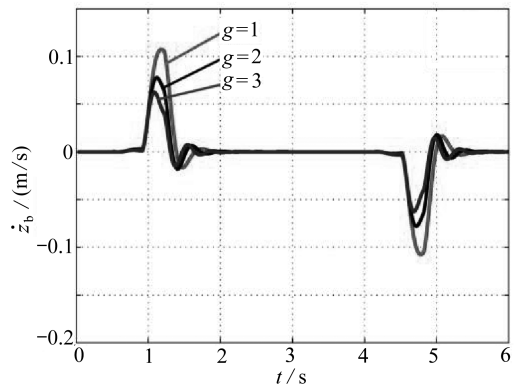
图 4 汽车悬架系统在速度反馈控制下的响应

Fig. 4 Responses of the automotive electromagnetic suspension system under velocity feedback control



(a) 位移响应

(a) The displacement response



(b) 速度响应

(b) The velocity response

图 5 汽车悬架系统在复合反馈控制下的响应

Fig. 5 Responses of the automotive electromagnetic suspension system under composite feedback control

首先考虑在速度反馈下的位移响应和速度响应,选取不同的反馈系数,可得到图 4(a) 的位移响应和图 4(b) 的速度响应.从图中可以看出,通过控制速度反馈只能调节系统达到平衡的时间,即响应时间,而不能改变在系统达到平衡位置时的位移.由图可得速度反馈系数为

0.15 左右时,响应时间较短,即达到平衡位置的时间较短,行车舒适性比较好。

然后,考虑复合反馈方式,选定速度反馈系数为 0.15,改变位移的反馈系数,可以得到图 5(a)的位移响应和图 5(b)的速度响应。由图可得,改变位移反馈系数可减小达到平衡位置时的位移,且反馈系数越大,位移越小。通过减小位移的大小,可以减小汽车车身的倾斜角度,从而防止汽车发生侧翻,提高安全性。因此可以根据需要和技术条件选取反馈系数,以便达到相应的平稳性和安全性。

4 结 论

本文将 Lie 群理论的对称性方法应用到含有电磁悬架的汽车振动系统中,研究了系统的 Noether 对称性,并找到相应的守恒量,进而求得其对称性精确解。利用其对称性解编写程序,给出在不同反馈下的动态响应。利用其对称性解在 MATLAB 下编写程序进行计算,给出在不同反馈下的动态响应。这种方法在计算过程中具有计算较快、输出精度较高等优点。进一步研究可将该方法扩展到其他机械系统和机电系统的分析计算过程中,同时可对该方法的计算速度和计算精度等优势做更深一步的比较研究。

参考文献(References):

- [1] Thompson A. Design of active suspensions[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1970, **185**(1): 553-563.
- [2] Sharp R S, Crolla D A. Road vehicle suspension system design-a review[J]. *Vehicle System Dynamics*, 1987, **16**(3): 167-192.
- [3] 喻凡, 张勇超. 馈能型车辆主动悬架技术[J]. 农业机械学报, 2010, **41**(1): 1-6. (YU Fan, ZHANG Yong-chao. Technology of regenerative vehicle active suspensions[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2010, **41**(1): 1-6. (in Chinese))
- [4] Gysen B L J, Paulides J J H, Janssen J L G, et al. Active electromagnetic suspension system for improved vehicle dynamics[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2010, **59**(3): 1156-1163.
- [5] Gysen B L J, Paulides J J H, Janssen J L G, et al. Design aspects of an active electromagnetic suspension system for automotive applications[J]. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2008, **45**(5): 1589-1597.
- [6] 黄昆, 张勇超, 喻凡. 电动式主动馈能悬架综合性能的协调性优化[J]. 上海交通大学学报, 2009, **43**(2): 226-230. (HUANG Kun, ZHANG Yong-chao, YU Fan. Coordinate optimization for synthetical performance of electrical energy-regenerative active suspension[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2009, **43**(2): 226-230. (in Chinese))
- [7] ZHANG Yong-chao, CAO Jian-yong, ZHANG Guo-guang, et al. Robust controller design for an electromagnetic active suspension subjected to mixed uncertainties[J]. *International Journal of Vehicle Design*, 2013, **63**(4): 423-449.
- [8] 梅凤翔. 分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2013. (MEI Feng-xiang. *Analytical Mechanics*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013. (in Chinese))
- [9] 邱家俊. 机电分析动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1992. (QIU Jia-jun. *Electromechanical Analytical Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 1992. (in Chinese))
- [10] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999. (MEI Feng-xiang.

- Application of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems*[M]. Beijing: Science Press, 1999.(in Chinese))
- [11] 方建会. 二阶非完整力学系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(9): 982-986.(FANG Jiang-hui. Lie symmetries and conserved quantities of second-order nonholonomic mechanical system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(9): 982-986.(in Chinese))
- [12] 梅凤翔. 具有可积微分约束的力学系统的 Lie 对称性[J]. 力学学报, 2000, **32**(4): 466-472.(MEI Feng-xiang. Lie symmetries of mechanical system with integral differential constraints [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, **32**(4): 466-472.(in Chinese))
- [13] 翟晓阳, 傅景礼. 汽车车体振动系统的对称性与守恒量研究[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(12): 1285-1293.(ZHAI Xiao-yang, FU Jing-li. Study on symmetries and conserved quantities of vehicle body vibration systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(12): 1285-1293.(in Chinese))
- [14] Scherpen J M A, Klaassens J B, Ballini L. Lagrangian modeling and control of DC-to-DC converters[C]//*Proceedings of the INTELEC' 99*. Copenhagen, 1999: 99CH37007, 31-14.
- [15] Scherpen J M A, Jeltsema D, Klaassens J B. Lagrangian modeling and control of switching networks with integrated coupled magnetics[C]//*Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol 4. 2000: 4054-4059.
- [16] Stramigioli S. *Modeling and IPC Control of Interactive Mechanical Systems—A Coordinate-Free Approach*[M]. London: Springer, 2001.
- [17] 谢煜, 傅景礼, 陈本永. 压电堆叠作动器的对称性求解[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(8): 778-790.(XIE Yu, FU Jing-li, CHEN Ben-yong. Solution of symmetries for piezoelectric stack actuators[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(8): 778-790.(in Chinese))
- [18] FU Jing-li, CHEN Li-qun. On Noether symmetries and form invariance of mechanico-electrical systems[J]. *Physics Letters A*, 2004, **331**(3/4): 138-152.
- [19] Preumont A. *Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems*[M]. Netherlands: Springer, 2006.

Noether Symmetry of Automotive Electromagnetic Suspension Systems and Its Application

CUI Xin-bin¹, FU Jing-li²

(1. *School of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, P.R.China;*

2. *School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, P.R.China*)

Abstract: The Noether symmetry of vehicle vibration systems with electromagnetic suspension was studied, and the conserved quantity of the system was given. Furthermore, with the conserved quantity, the symmetry solution of the system was obtained. In the form of energy, the Lagrangian equations under different vibration modes were built. With the chosen displacement coordinates as the generalized coordinates, the Noether symmetries of the system under different vibration modes were studied, the corresponding Noether identities, Killing equations and generalized Noether theorems were given. The conserved quantity of the system was applied so that a new method for solving vehicle vibration system responses was proposed. Then this method was used in the calculation of a specific vehicle vibration system, and the displacement response curves and velocity response curves of the system in the cases of swerving, braking, accelerating and so on can be obtained. The calculation results agree well with the empirical data.

Key words: electromagnetic suspension; Lagrangian equation; Noether symmetry; conserved quantity

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11472247;11272287)

引用本文/Cite this paper:

崔新斌, 傅景礼. 汽车电磁悬架系统的 Noether 对称性及其应用[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(12): 1331-1341.

CUI Xin-bin, FU Jing-li. Noether symmetry of automotive electromagnetic suspension systems and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(12): 1331-1341.