

复杂固体并式微结构模型 及孤立波的存在性*

那仁满都拉

(内蒙古民族大学 物理与电子信息学院, 内蒙古 通辽 028000)

摘要: 把复杂固体看作具有两种不同性质的微结构,进而考虑两种微尺度非线性效应,建立了描述复杂固体运动的并式微结构非线性模型.利用动力系统的定性分析理论和分岔理论,证明了在一定条件下并式微结构固体中可以存在一类非对称孤立波并给出了其存在条件.分析表明两种微尺度非线性效应同时影响孤立波的对称特性,微尺度非线性效应越强,孤立波的非对称特性越明显.最后用数值方法进一步验证了定性分析结果.

关键词: 并式微结构模型; 非对称孤立波; 存在条件

中图分类号: O331; O347

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380074

引言

任何材料都有一定的微结构,如合金、多晶体材料、陶瓷复合材料、功能梯度材料以及颗粒材料等都具有不同特性的微结构.有些材料的微结构较为复杂,在不同尺度上表现出不同的微结构,或在同一尺度上表现出不同性质的微结构,这些复杂的微结构导致了固体材料宏观层面上的复杂动力学行为^[1].因此,对复杂微结构固体的运动与形变的描述,用单尺度或单内部变量是不够的,需要用多尺度或多内部变量来描述^[1].文献[2]基于多尺度建模思想,建立了复杂微结构固体的两种多尺度线性模型.文献[3]中建立了复杂微结构固体的两种非线性模型,但考虑的只是宏观尺度非线性效应.文献[4]同样建立了只考虑宏观尺度非线性效应的复杂固体的两种非线性模型并研究了固体中的孤立波.Casasso等^[5]基于矢量微结构理论,建立了一维和二维多尺度微结构模型.Engelbrecht等^[6]对弹性微结构固体中形变波的各种模型进行了综述性评述.在非线性波模型的研究领域,动力系统的定性分析方法是一种十分有效的研究方法,近几年广泛应用于各类非线性波方程行波解的研究中^[7-11].

波在介质中传播时不仅携带着能量,还携带着一些信息.也就是说,在一定初始和边界条件下激起的波,它不仅携带着这些条件相关的信息还携带着与波传播介质相关的信息,这些信息反映在波形变化或波谱变化上.因此,固体介质中孤立波存在和传播问题的研究,具有重要意义.因为孤立波在固体介质中传播时,其形状、幅度以及传播速度中携带着反映介质性质的重要信息,这对固体材料的无损检测与评价具有应用价值^[12-13].在文献[14-16]中对单尺度描

* 收稿日期: 2017-03-31; 修订日期: 2017-05-22

基金项目: 国家自然科学基金(11462019)

作者简介: 那仁满都拉(1963—),男,教授,博士,硕士生导师(E-mail: nrmdtl@126.com).

述下微结构固体中孤立波的存在问题进行了较深入的研究,但对多尺度或多内部变量描述下微结构固体中能否存在孤立波问题还未进行研究。

本文在前文工作基础上,考虑微尺度非线性效应,将建立描述复杂微结构固体运动的并式微结构非线性模型.利用动力系统的定性分析理论和分岔理论,将证明在一定条件下并式微结构固体中可以存在孤立波并给出其存在条件。

1 多尺度非线性模型的建立

设复杂固体具有两种微结构,且两种微结构互不耦合地并列共存(如图 1 所示),这种模型称为并式微结构模型^[2-4].文献[3-4]中虽建立了并式微结构模型,但只考虑了宏观尺度非线性效应,未考虑微尺度非线性效应.本文将考虑两种微尺度非线性效应,因此自由能函数可取为两种微形变 φ, ψ 及其导数的三次多项式形式:

$$W = \frac{1}{2} \alpha v_x^2 + \frac{1}{3} \beta v_x^3 - A_1 \varphi v_x + \frac{1}{2} B_1 \varphi^2 + \frac{1}{2} C_1 \varphi_x^2 + \frac{1}{6} D_1 \varphi_x^3 - A_2 \psi v_x + \frac{1}{2} B_2 \psi^2 + \frac{1}{2} C_2 \psi_x^2 + \frac{1}{6} D_2 \psi_x^3, \quad (1)$$

动能密度 K 取为 v_i, φ_i, ψ_i 的二次函数,即

$$K = \frac{1}{2} (\rho v_i^2 + I_1 \varphi_i^2 + I_2 \psi_i^2), \quad (2)$$

这里, v 表示宏观位移, I_1 和 I_2 表示两种微惯性, $\alpha, \beta, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2$ 和 D_2 是材料常数.根据式(1)和(2),计算出 Lagrange(拉格朗日)函数 $L = K - W$,并在忽略全部耗散效应的情况下,代入 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right)_t + \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} \right)_x - \frac{\partial L}{\partial v} = 0, \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \right)_t + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_x} \right)_x - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_i} \right)_t + \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_x} \right)_x - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

计算可得

$$\begin{cases} \rho v_{tt} = \alpha v_{xx} + (\beta v_x^2)_x - A_1 \varphi_x - A_2 \psi_x, \\ I_1 \varphi_{tt} = C_1 \varphi_{xx} + D_1 \varphi_x \varphi_{xx} + A_1 v_x - B_1 \varphi, \\ I_2 \psi_{tt} = C_2 \psi_{xx} + D_2 \psi_x \psi_{xx} + A_2 v_x - B_2 \psi. \end{cases} \quad (4)$$

引入几个无量纲变量和无量纲参数

$$\begin{cases} U = v/v_0, X = x/L, T = c_0 t/L \quad (c_0^2 = \alpha/\rho), \varepsilon = v_0/L, \\ C_1 = C_1^* l_1^2, I_1 = \rho l_1^2 I_1^*, A_1 = l_1 A_1^*, D_1 = D_1^* l_1^3, \delta_1 = (l_1/L)^2, \\ C_2 = C_2^* l_2^2, I_2 = \rho l_2^2 I_2^*, A_2 = l_2 A_2^*, D_2 = D_2^* l_2^3, \delta_2 = (l_2/L)^2, \end{cases} \quad (5)$$

这里 v_0 是初始波的波幅, L 是初始波的波长, l_1 和 l_2 表示材料两种特征长度.利用式(5),把方程(4)无量纲化可得

$$\begin{cases} U_{TT} = \frac{\alpha}{\rho c_0^2} U_{XX} + \frac{\beta \varepsilon}{\rho c_0^2} (U_X^2)_X - \frac{A_1}{\rho c_0^2 \varepsilon} \varphi_X - \frac{A_2}{\rho c_0^2 \varepsilon} \psi_X, \\ \varphi = \frac{A_1^* l_1 \varepsilon}{B_1} U_X + \frac{\delta_1}{B_1} (C_1^* \varphi_{XX} - \rho I_1^* c_0^2 \varphi_{TT}) + \frac{D_1^*}{B_1} \delta_1 \sqrt{\delta_1} \varphi_X \varphi_{XX}, \\ \psi = \frac{A_2^* l_2 \varepsilon}{B_2} U_X + \frac{\delta_2}{B_2} (C_2^* \psi_{XX} - \rho I_2^* c_0^2 \psi_{TT}) + \frac{D_2^*}{B_2} \delta_2 \sqrt{\delta_2} \psi_X \psi_{XX}. \end{cases} \quad (6)$$

把 φ, ψ 展开为 $\delta_1^{1/2}, \delta_2^{1/2}$ 的幂级数, 得

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \delta_1^{1/2} \varphi_1 + \delta_1 \varphi_2 + \delta_1^{3/2} \varphi_3 + \delta_1^2 \varphi_4 + \dots, \\ \psi = \psi_0 + \delta_2^{1/2} \psi_1 + \delta_2 \psi_2 + \delta_2^{3/2} \psi_3 + \delta_2^2 \psi_4 + \dots. \end{cases} \quad (7)$$

比较式(6)中的第二、三式和式(7), 可确定 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, 并利用从属原理可得

$$\begin{cases} \varphi = \frac{A_1 \varepsilon}{B_1} U_X + \frac{A_1 \varepsilon \delta_1}{B_1^2} (C_1^* U_{XXX} - \rho I_1^* c_0^2 U_{XTT}) + \frac{A_1^2 \varepsilon^2 D_1^*}{B_1^3} \delta_1 \sqrt{\delta_1} U_{XX} U_{XXX}, \\ \psi = \frac{A_2 \varepsilon}{B_2} U_X + \frac{A_2 \varepsilon \delta_2}{B_2^2} (C_2^* U_{XXX} - \rho I_2^* c_0^2 U_{XTT}) + \frac{A_2^2 \varepsilon^2 D_2^*}{B_2^3} \delta_2 \sqrt{\delta_2} U_{XX} U_{XXX}. \end{cases} \quad (8)$$

把式(8)代入式(6)中的第一式可得

$$U_{TT} - P_1 U_{XX} + P_2 U_{XX} + P_3 U_{XX} - P_4 (U_X^2)_X - P_5 U_{XXTT} - P_6 U_{XXTT} + P_7 U_{XXXX} + P_8 U_{XXXX} + P_9 (U_{XX}^2)_{XX} + P_{10} (U_{XX}^2)_{XX} = 0, \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha / (\rho c_0^2), \quad P_2 = A_1^2 / (B_1 \rho c_0^2), \quad P_3 = A_2^2 / (B_1 \rho c_0^2), \quad P_4 = \beta \varepsilon / (\rho c_0^2), \\ P_5 &= A_1^2 \delta_1 I_1^* / B_1^2, \quad P_6 = A_2^2 \delta_2 I_2^* / B_2^2, \quad P_7 = A_1^2 C_1^* \delta_1 / (B_1^2 \rho c_0^2), \\ P_8 &= A_2^2 C_2^* \delta_2 / (B_2^2 \rho c_0^2), \quad P_9 = A_1^3 \varepsilon D_1^* \delta_1 \sqrt{\delta_1} / (2 B_1^3 \rho c_0^2), \\ P_{10} &= A_2^3 \varepsilon D_2^* \delta_2 \sqrt{\delta_2} / (2 B_2^3 \rho c_0^2). \end{aligned}$$

方程(9)是本文建立的描述复杂固体的并式微结构非线性模型. 这里 P_2, P_5, P_7 和 P_9 是与第一微形变有关的各项系数; P_3, P_6, P_8 和 P_{10} 是与第二微形变有关的各项系数. 可以看出, 两种微结构所产生的各种效应并列出现在模型方程中, 表明它们对波的形成和传播有同等的影响.

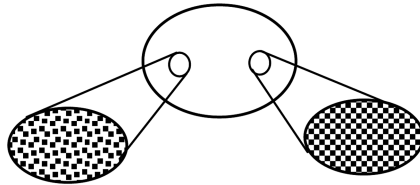


图1 复杂固体的并式微结构

Fig. 1 The concurrent microstructure of complex solids

2 非对称孤立波存在性的证明

借助应变 $u = U_X$, 把方程(9)改写为

$$u_{TT} - \alpha_1 u_{XX} - \alpha_2 (u^2)_{XX} - \alpha_3 u_{XXTT} + \alpha_4 u_{XXXX} + \alpha_5 (u_X^2)_{XX} = 0, \quad (10)$$

其中 $\alpha_1 = P_1 - P_2 - P_3, \alpha_2 = P_4, \alpha_3 = P_5 + P_6, \alpha_4 = P_7 + P_8, \alpha_5 = P_9 + P_{10}$. 进一步对方程(10)

做变换

$$u = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} u', \quad x' = \sqrt{\frac{1}{\alpha_3}} X, \quad t' = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} T, \quad (11)$$

可得(下式中已把 u', x', t' 改写为 u, x, t)

$$u_{uu} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - u_{xxx} + \beta_1 u_{xxxx} + \beta_2 (u_x^2)_{xxx} = 0, \quad (12)$$

这里
$$\beta_1 = \frac{\alpha_4}{\alpha_1 \alpha_3}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_5}{\alpha_2 \alpha_3 \sqrt{\alpha_3}}.$$

当忽略微尺度非线性项(即 $\beta_2 = 0$)时,容易求得方程(12)的一种精确孤立波解

$$u = A_0 + A \cdot \text{sech}^2[B(x - Vt)], \quad (13)$$

这里 $A = \frac{3}{2}(V^2 - 1) - 3A_0, B = \sqrt{\frac{V^2 - 1 - 2A_0}{4(V^2 - \beta_1)}}$, V 是任意波速, A_0 是任意常数.但由于方程(12)中微尺度非线性项 $\beta_2 (u_x^2)_{xxx}$ 的出现,很难求得精确孤立波解.下面用动力系统的定性分析方法来分析微结构固体中是否存在孤立波的问题.

为把方程(12)化为等效动力系统,对其进行行波约化,即 $\xi = x - Vt, u = u(\xi)$, 并进行两次积分得

$$(V^2 - 1)u - u^2 - (V^2 - \beta_1)u_{\xi\xi} + 2\beta_2 u_{\xi} u_{\xi\xi} = g, \quad (14)$$

其中 g 为积分常数.令 $u = x, u_{\xi} = y$, 可把式(14)改写为

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = y, \\ \frac{dy}{d\xi} = \frac{-g + (V^2 - 1)x - x^2}{(V^2 - \beta_1) - 2\beta_2 y}. \end{cases} \quad (15)$$

平面系统(15)有一条奇直线

$$y = \frac{V^2 - \beta_1}{2\beta_2}, \quad (16)$$

为取消此奇直线,可做变换

$$d\xi = [(V^2 - \beta_1) - 2\beta_2 y] d\tau, \quad (17)$$

则系统(15)变成平面 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (V^2 - \beta_1)y - 2\beta_2 y^2, \\ \frac{dy}{d\tau} = (V^2 - 1)x - x^2 - g. \end{cases} \quad (18)$$

由平面动力系统的定性分析理论^[9]可知,在拓扑意义下,除了奇直线外,系统(18)和(15)有相同的相图.因此,可通过对系统(18)的相图分析,得知系统(15)的相图分布.

分析可知系统(18)有首次积分:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(V^2 - \beta_1)y^2 - \frac{2}{3}\beta_2 y^3 - \frac{1}{2}(V^2 - 1)x^2 + \frac{1}{3}x^3 + gx = h, \quad (19)$$

这里 h 为任意常数, h 取不同值时方程(19)可表示不同的相轨线.当 $(V^2 - 1)^2 - 4g > 0$ 时,系统(18)在相平面上有4个平衡点:

$$a_1 \left(\frac{(V^2 - 1) - \sqrt{(V^2 - 1)^2 - 4g}}{2}, 0 \right), \quad a_2 \left(\frac{(V^2 - 1) + \sqrt{(V^2 - 1)^2 - 4g}}{2}, 0 \right),$$

$$b_1 \left(\frac{(V^2 - 1) - \sqrt{(V^2 - 1)^2 - 4g}}{2}, \frac{V^2 - \beta_1}{2\beta_2} \right),$$

$$b_2 \left(\frac{(V^2 - 1) + \sqrt{(V^2 - 1)^2 - 4g}}{2}, \frac{V^2 - \beta_1}{2\beta_2} \right),$$

各平衡点处的 Jacobi(雅可比)行列式为

$$\begin{cases} J(a_1) = -(V^2 - \beta_1) \sqrt{(V^2 - 1)^2 - 4g}, \\ J(a_2) = (V^2 - \beta_1) \sqrt{(V^2 - 1)^2 - 4g}, \\ J(b_1) = (V^2 - \beta_1) \sqrt{(V^2 - 1)^2 - 4g}, \\ J(b_2) = -(V^2 - \beta_1) \sqrt{(V^2 - 1)^2 - 4g}. \end{cases} \quad (20)$$

再根据分岔理论^[9-10]计算可知,在参数平面 (g, V) 上系统有一条分岔曲线 $L: g = (1/4)(V^2 - 1)^2$.此曲线把参数平面分为区域 I: $g < (1/4)(V^2 - 1)^2$; 区域 II: $g = (1/4)(V^2 - 1)^2$; 区域 III: $g > (1/4)(V^2 - 1)^2$ 这3个区域.下面的讨论仅限于正常频散(即 $\beta_1 < 1$)^[16]的情况,反常频散(即 $\beta_1 > 1$)^[16]的情况可类似讨论.

情况 1 当 $g < (1/4)(V^2 - 1)^2, V^2 < \beta_1$ 时,系统有4个平衡点,根据定性分析理论可知, a_2 和 b_1 是鞍点, a_1 和 b_2 是中心点.此时相平面上存在一个从鞍点 a_2 出发,围绕中心点 a_1 ,最终又回到鞍点 a_2 的同宿轨道(如图2).该同宿轨道不被奇直线分割,可无限接近于奇直线上的另一个鞍点 b_1 .为求得该同宿轨道存在时参数 β_2 的极限值,可假设该同宿轨道通过鞍点 b_1 ,则应有 $H(a_2) = H(b_1)$.利用此关系计算可得

$$\beta_2 = \mp \frac{1}{2} \frac{(\beta_1 - V^2)^{3/2}}{[(V^2 - 1)^2 - 4g]^{3/4}}. \quad (21)$$

由动力系统的同宿轨道与偏微分方程的孤立波解之间的对应关系可知,此同宿轨道对应于方程(12)的孤立波解.由此可得到定理1.

定理 1 当

$$g < \frac{1}{4}(V^2 - 1)^2, V^2 < \beta_1,$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(\beta_1 - V^2)^{3/2}}{[(V^2 - 1)^2 - 4g]^{3/4}} < \beta_2 < \frac{1}{2} \frac{(\beta_1 - V^2)^{3/2}}{[(V^2 - 1)^2 - 4g]^{3/4}}$$

时,在复杂微结构固体中可以存在一种非对称的反钟型孤立波.

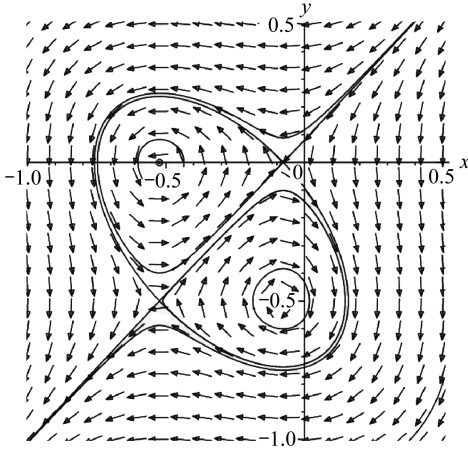
为验证此结果,用数值方法绘制方程(12)的孤立波解,并与无微尺度非线性效应时形成的孤立波解(13)进行了比较(如图3).可看出,在定理1的条件下,复杂微结构固体中确实能够存在一种非对称的反钟型孤立波,微尺度非线性效应越强,孤立波的非对称特性就越明显.

情况 2 当 $g < (1/4)(V^2 - 1)^2, V^2 > \beta_1$ 时,分析可知系统有4个平衡点,其中 a_1 和 b_2 是鞍点, a_2 和 b_1 是中心点.此时相平面上存在一个从鞍点 a_1 出发,围绕中心点 a_2 ,最终又回到鞍点 a_1 的同宿轨道(如图4).该同宿轨道不被奇直线分割,可无限接近于奇直线上的另一个鞍点 b_2 .假设在极限情况下可通过此鞍点,则应有 $H(a_1) = H(b_2)$,由此式计算可得

$$\beta_2 = \pm \frac{1}{2} \frac{(V^2 - \beta_1)^{3/2}}{[(V^2 - 1)^2 - 4g]^{3/4}}, \quad (22)$$

这是同宿轨道存在时参数 β_2 的极限值.因此,根据动力系统的同宿轨道与偏微分方程的孤立

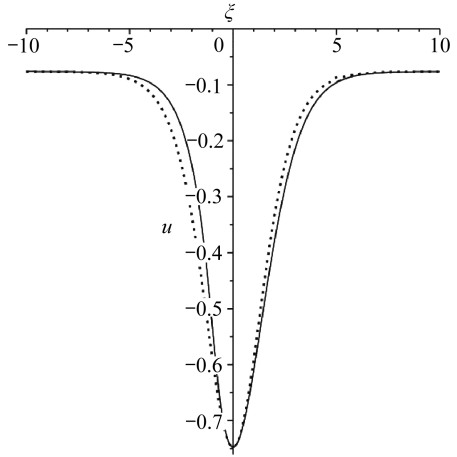
波解之间的对应关系,可得定理 2.



$\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.4, V = \sqrt{0.4}, g = 0.04$

图 2 系统(18)的相图

Fig. 2 The phase diagram of system (18)



$\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.4, V = \sqrt{0.4}, g = 0.04$

图 3 非对称孤立波(实线)

Fig. 3 The asymmetric solitary wave (solid line)

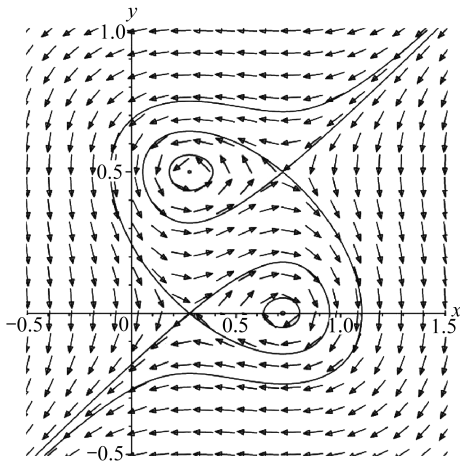
定理 2 当

$$g < \frac{1}{4}(V^2 - 1)^2, V^2 > \beta_1,$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(V^2 - \beta_1)^{3/2}}{[(V^2 - 1)^2 - 4g]^{3/4}} < \beta_2 < \frac{1}{2} \frac{(V^2 - \beta_1)^{3/2}}{[(V^2 - 1)^2 - 4g]^{3/4}}$$

时,在复杂微结构固体中可以存在一种非对称的钟型孤立波.

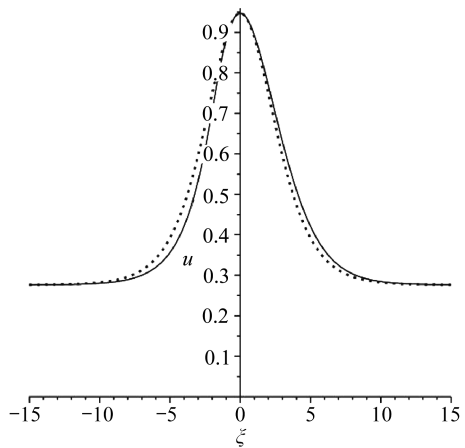
用数值方法绘制非对称孤立波并与孤立波解(13)进行了比较(如图 5).从图上可看出,在定理 2 的条件下复杂微结构固体中确实能够存在一种非对称的钟型孤立波,两种微尺度非线性效应同时影响着孤立波的对称特性.



$\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 1.2, V = \sqrt{2}, g = 0.2$

图 4 系统(18)的相图

Fig. 4 The phase diagram of system (18)

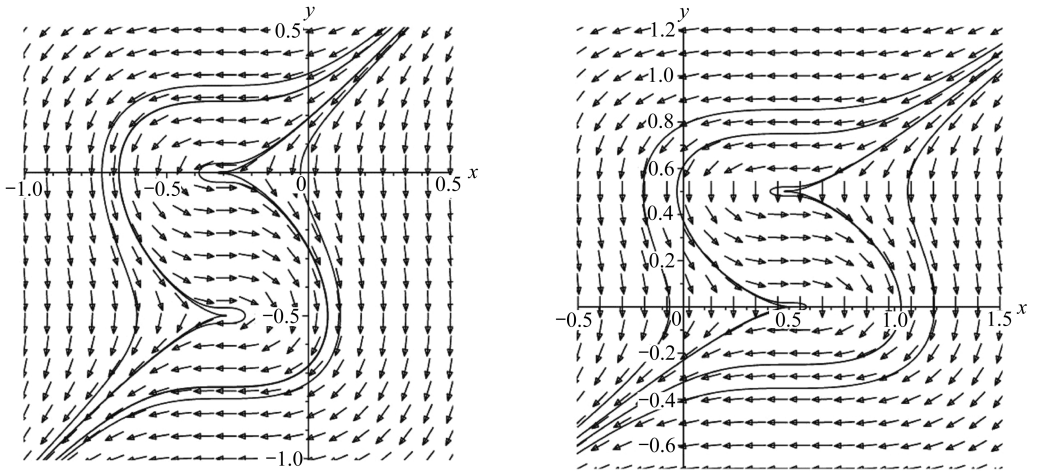


$\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 1.2, V = \sqrt{2}, g = 0.2$

图 5 非对称孤立波(实线)

Fig. 5 The asymmetric solitary wave (solid line)

情况 3 当 $g = (1/4)(V^2 - 1)^2$ 时,系统有两个平衡点 $a((V^2 - 1)/2, 0)$ 和 $b((V^2 - 1)/2, (V^2 - \beta_1)/(2\beta_2))$.因两个平衡点处的 Jacobi 行列式为 $J(a) = 0, J(b) = 0$, 由定性分析理论可知两个平衡点均为尖点(如图 6).此时在相平面内不存在同(异)宿轨道,故复杂固体中不可能存在孤立波.



(a) $\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.4, V = \sqrt{0.4}, g = 0.09$

(b) $\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 1.2, V = \sqrt{2}, g = 0.25$

图 6 系统 (18) 的相图

Fig. 6 The phase diagram of system (18)

情况 4 当 $g > (1/4)(V^2 - 1)^2$ 时,系统在实平面内无平衡点,故不做讨论.

情况 5 当 $g = 0$ 时,系统(18)变成与文献[16]中所讨论的系统相同,故可以完全类似的讨论,这里不再重复.

3 结 语

本文在前文工作基础上,把复杂固体看作具有两种不同性质的微结构并考虑两种微尺度非线性效应,建立了描述复杂微结构固体运动的并式微结构非线性模型.利用动力系统的定性分析理论和分岔理论,证明了在一定条件下复杂微结构固体中可以存在一类非对称孤立波,并给出了此孤立波的存在条件.分析表明两种微尺度非线性效应同时影响孤立波的对称特性,微尺度非线性效应越强,孤立波的非对称特性越明显.最后采用数值方法进一步验证了上述定性分析结果.通过对非对称孤立波存在性的论证,证实了复杂固体中在一定条件下可以存在一种非对称孤立波,这对固体材料性能的无损检测与评价提供了有一定价值的理论依据.

参考文献 (References):

[1] ENGELBRECHT J, BEREZOVSKI A. Internal structures and internal variables in solids[J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2012, 7(10): 983-996.

[2] BEREZOVSKI A, ENGELBRECHT J, PEETS T. Multiscale modeling of microstructured solids [J]. *Mechanics Research Communications*, 2010, 37(6): 531-534.

[3] BEREZOVSKI A, ENGELBRECHT J, SALUPERE A, et al. Dispersive waves in microstructured solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, 50(11/12): 1981-1990.

- [4] PASTRONE F, ENGELBRECHT J. Nonlinear waves and solitons in complex solids[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2016, **21**(1): 52-59.
- [5] CASASSO A, PASTRONE F. Wave propagation in solids with vectorial microstructures[J]. *Wave Motion*, 2010, **47**(6): 358-369.
- [6] ENGELBRECHT J, BEREZOVSKI A. Reflections on mathematical models of deformation waves in elastic microstructured solids[J]. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 2015, **3**: 43-82.
- [7] 张丽俊, 陈立群. 一类高阶非线性波方程的子方程与精确行波解[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(5): 548-554. (ZHANG Lijun, CHEN Liqun. Sub-equations and exact traveling wave solutions to a class of high-order nonlinear wave equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(5): 548-554. (in Chinese))
- [8] 王恒, 王汉权, 陈龙伟, 等. 耦合 Higgs 方程和 Maccari 系统的行波解分支[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 434-440. (WANG Heng, WANG Hanquan, CHEN Longwei, et al. Bifurcations of exact travelling wave solutions to coupled Higgs equations and Maccari systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 434-440. (in Chinese))
- [9] LI Jibin. *Singular Traveling Wave Equations: Bifurcations and Exact Solutions*[M]. Beijing: Science Press, 2013.
- [10] LI Jibin. Bifurcations of traveling wave solutions in a microstructured solid model[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, **23**(1): 1350009-1-1350009-18.
- [11] LI Jibin, DAI Huihui. *On the Study of Singular Traveling Wave Equations: Dynamical System Approach*[M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [12] 谢怡, 王砚. 高度非线性孤立波与弹性大板的耦合作用研究[J]. 固体力学学报, 2017, **38**(1): 65-73. (XIE Yi, WANG Yan. The coupling mechanism between highly nonlinear solitary waves with large plate[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2017, **38**(1): 65-73. (in Chinese))
- [13] YANG J, RESTUCCIA F, DARAIO C. Highly nonlinear granular crystal sensor and actuator for delamination detection in composite structures[J]. *Structure Health Monitoring*, 2013, **2**: 1424-1433.
- [14] JANNO J, ENGELBRECHT J. Solitary waves in nonlinear microstructured materials[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2005, **38**: 5159-5172.
- [15] SALUPERE A, TAMM K. On the influence of material properties on the wave propagation in Mindlin-type microstructured solids[J]. *Wave Motion*, 2013, **50**(7): 1127-1139.
- [16] 那仁满都拉. 微结构固体中的孤立波及其存在条件[J]. 物理学报, 2014, **63**(19): 194301-1-194301-8. (NARANMANDULA. Solitary waves and their existence conditions in microstructured solids[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, **63**(19): 194301-1-194301-8. (in Chinese))

A Concurrent Microstructured Model for Complex Solids and Existence of Solitary Waves

NARANMANDULA

(*College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao, Inner Mongolia 028000, P.R.China*)

Abstract: A concurrent microstructured nonlinear model involving 2 kinds of microscale nonlinear effects was established to describe the motion of complex solids with 2 microstructures of different properties. The existence of asymmetric solitary waves was proved according to the qualitative analysis theory and the bifurcation theory for dynamic systems under certain conditions in concurrent microstructured solids, and the existence conditions for the asymmetric solitary waves were given. The results indicate that the symmetry properties of solitary waves were influenced by the 2 kinds of microscale nonlinear effects simultaneously. The asymmetric properties of solitary waves are more obvious when the microscale nonlinear effects become stronger. Finally, the results of qualitative analysis were validated further through numerical simulation.

Key words: concurrent microstructured model; asymmetric solitary wave; existence condition

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11462019)

引用本文/Cite this paper:

那仁满都拉. 复杂固体并式微结构模型及孤立波的存在性[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 41-49.
NARANMANDULA. A concurrent microstructured model for complex solids and existence of solitary waves[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 41-49.