

# 并行间断有限元算法求解 Navier-Stokes 方程\*

马欣荣<sup>1</sup>, 段治健<sup>1</sup>, 谢公南<sup>2</sup>, 刘三阳<sup>3</sup>

(1. 咸阳师范学院 数学与信息科学学院, 陕西 咸阳 712000;

2. 西北工业大学 航海学院, 西安 710072;

3. 西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

(我刊编委谢公南来稿)

**摘要:** 间断 Galerkin 有限元方法非常适合在非结构网格上高精度求解 Navier-Stokes 方程,然而其十分耗费计算资源.为了提高计算效率,提出了高效的 MIMD 并行算法.采用隐式时间离散 GMRES+LU-SGS 格式,结合多重网格方法,当地时间步长加速算法收敛.为了保证各处理器间负载平衡,采用区域分解二级图方法划分网格,实现内存合理分配,数据只在相邻处理器间传递.数值模拟了 RAE2822 翼型和 M6 黏性绕流,加速比基本呈线性变化且接近理想值.结果表明了该算法能有效减少计算时间、合理分配内存,具有较高的加速比和并行效率,适合于 MIMD 粗粒度科学计算.

**关键词:** 间断 Galerkin 有限元方法; Navier-Stokes 方程; 并行算法; 区域分解算法

**中图分类号:** O246

**文献标志码:** A

**doi:** 10.21656/1000-0887.380077

## 引言

间断 Galerkin 有限元方法(DGFEM)克服了有限体积方法和有限元方法的缺点,且结合了二者的优点,将有限体积方法的数值通量和限制器构造思想融入到有限元方法中,非常适合于处理具有间断解的情形,易于处理复杂区域且有一致高阶精度,由此近年来得到了蓬勃发展. Bassi 等<sup>[1]</sup>用混合有限元方法求解黏性通量中的梯度,将 DGFEM 成功应用于采用  $k-\omega$  湍流模型的 Navier-Stokes 方程.贺立新等<sup>[2-3]</sup>采用 DG/FVM 混合算法计算了三维 Navier-Stokes 方程,表现出了在高超声速流场计算中具有优势.

非结构网格对复杂区域边界和约束情形有很强的适应性和几何灵活性,克服了直交网格不能适应在任意形状和任意区域进行剖分的缺点.基于 DGFEM 在非结构网格上实现高精度格式具有明显的优势,可以保持二阶以上的计算精度,维持较强的数值稳定性,可以满足数值计算的高分辨率需求.但非结构网格需要存储节点坐标以及标识单元间的相邻接的关系,需要过

\* 收稿日期: 2017-04-05; 修订日期: 2017-05-03

**基金项目:** 国家自然科学基金(61401383); 陕西省教育厅自然科学基金(17JK0831)

**作者简介:** 马欣荣(1980—),女,博士(通讯作者. E-mail: mxryx1021@163.com);

段治健(1980—),男,副教授,博士(E-mail: zhijian\_duan@126.com);

谢公南(1980—),男,教授,博士(E-mail: xgn@nwpu.edu.cn);

刘三阳(1959—),男,教授(E-mail: liusanyang@126.com).

多的存储量,高阶精度格式计算占用了很大的计算资源.为了提高计算效率,各种高效的数值计算方法不断发展,尤其是适合于线性和非线性系统方程的求解、不受控制方程时间和空间离散格式的限制,并且满足最优渐进性质的多重网格(multigrid, MG)方法<sup>[4]</sup>.多重网格方法串行的空间和时间复杂度  $O(n_m)$ , 不受离散格式的限制,适合求解线性/非线性问题.然而串行计算已经不能满足需求,随着计算机硬件的发展,大规模并行计算成了当前科学计算的主要途径.李宗哲等<sup>[5]</sup>综述了 AMG 和 GMG 方法研究动态,并总结了多种光滑算子的选取和优劣性,指出在非结构网格上,能够保持高精度和快速收敛的大规模并行计算为今后研究的方向.Carré 等<sup>[6]</sup>在 SPMD 模式下,实现了非结构网格上 V 循环 GMG 方法的并行计算,求解了二维层流绕流 NACA0012 翼型和湍流绕流 RAE2822 翼型问题.Lambropoulos 等<sup>[7]</sup>在非结构网格上进一步实现了二维、三维 RANS 方程的并行聚合 MG 有限体积方法,数值模拟了 ONERA M6 机翼跨声速流场.Dolean 等<sup>[8]</sup>在集群机系统下数值模拟了 NACA0012 翼型非定常可压缩黏性绕流问题,结果表明 DDM/MG 方法和 MG 方法二者均表现出了较高的并行效率,但是随着规模增大,DDM/MG 方法优于 MG 方法.Luo 等<sup>[9-10]</sup>通过提高单元多项式函数的阶数从而提高 DGFEM 的精度,在 SPMD 模式下,实现了 DDM 并行计算 Navier-Stokes 方程的重构 DGFEM, DGFEM 表现出了高效、精确而稳定的优点.Beck 等<sup>[11]</sup>在 HLRS 集群上,针对 HALO、STRUKTI、FLEXI 和 NoisSol 四种 MPI 代码分析比较了 DGFEM 高性能计算的并行效率.

由于 DGFEM 剖分单元的间断性质,为了求解单元内部的自由度仅仅需要相邻单元的自由度,这样处理器间的信息量传递将保持最小,自然适合于实施并行计算.结合区域分解算法可以有效缩小计算规模,无需采用整体一致网格,子区域间可以使用不同的离散方法,具有高度并行性.

此外,负载均衡问题也即任务调度问题,是并行与分布程序性能的关键研究内容,决定着计算效率及应用性能的高低<sup>[12-13]</sup>.本文考虑各处理器负载均衡问题,在并行求解双曲守恒率<sup>[14]</sup>的基础上,采用区域分解算法划分网格,最大限度保证数据信息传递最少,数据传递只在相邻处理间进行.基函数和自由度的选取虽然对于格式的有效性不会产生较大的影响,但可以减小计算量,因此文中选取正交基函数,结合多重网格、GMRES+LU-SGS 隐式时间离散算法提高推进效率,使用 SA 湍流模型方程,求解可压缩 Navier-Stokes 方程组.数值计算结果表明了本文算法的可行性和高效性.

## 1 间断 Galerkin 有限元方法

### 1.1 控制方程

不考虑体积力和外部热源,直角坐标系下的非定常可压缩 Reynolds(雷诺)平均 RANS 方程为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}), \quad (1)$$

其中  $\nabla \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x}$  是无黏矢通量的散度,定义如下:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ (\rho e + p)w \end{pmatrix},$$

式中,  $\rho$  为密度,  $u, v, w$  为  $x, y, z$  坐标方向的速度分量,  $e$  为单位质量气体的总能量,  $p$  为压强,  $\nabla \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{U}, \nabla \mathbf{U})$  是黏性项矢量通量  $\mathbf{F}_v = (\mathbf{F}_v^x, \mathbf{F}_v^y, \mathbf{F}_v^z)$  的散度, 定义如下:

$$\mathbf{F}_v^x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + q_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v^y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + q_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_v^z = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

定义  $\mathbf{V} = ui + vj + wk$  为速度矢量, 则黏性剪切应力项为

$$\tau_{xx} = \delta(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = \delta(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{zz} = \delta(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

这里  $\delta = (-2/3)\mu$ ,  $\nabla$  是 Hamilton(哈密顿)算子, 根据 Stokes 假设, 动力学黏性系数  $\mu$  满足  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ , 热流量与温度梯度遵循 Fourier 定律:

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2)$$

在 N-S 方程组中存在 6 个未知量, 为了封闭 N-S 方程组, 定义如下一些基本物理关系式:

完全气体状态方程为

$$\begin{cases} p = \rho RT, \\ h = c_p T. \end{cases} \quad (3)$$

单位质量气体的总能量为

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}. \quad (4)$$

动力学黏性系数  $\mu$  ( $\mu = \mu_L + \mu_t$ ) 是温度和压力的函数. 层流状态下的黏性系数  $\mu_L$  可以通过 Sutherland 公式求得, 即

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left( \frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \left( \frac{T_0 + T_s}{T + T_s} \right), \quad (5)$$

式中,  $T_0 = 273.16 \text{ K}$ , 对于理想气体, 有  $\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $T_s = 124 \text{ K}$ . 对于湍流流动, 其湍流黏性系数  $\mu_t$  通过求解湍流模型计算得到.

在各向同性气体中热传导系数  $\kappa$  无方向性, 仅随着温度和压力变化, 一般通过  $Pr$  数来计算, 即

$$\kappa = \frac{\mu c_p}{Pr} = \frac{\mu \gamma R}{(\gamma - 1) Pr}. \quad (6)$$

对于空气, 层流状态下  $Pr = 0.72$ , 其中  $c_p$  为比定压热容,  $R$  为气体常数.

对于 Navier-Stokes 方程,本文采用 DGFEM 进行空间离散,时间离散方法采用隐式 GMRES 格式。

## 1.2 间断 Galerkin 有限元空间离散

DGFEM 基于 FEM,具体离散方法如下。

对于间断 Galerkin 有限元方法求解 Navier-Stokes 方程,首先需要将计算区域划分成互不重叠的子区域。子区域可以选取为任意非结构网格形状。定义间断函数的有限元空间:

$$V_h^p = \{v_h \in [L^2(\Omega)]^m : v_h|_{\Omega_e} \in [V_p^m]; \forall \Omega_e \in \Omega\}, \quad (7)$$

其中  $\Omega_e$  为子域空间,  $V_p^m$  为局部函数空间,取作  $p(p=1,2,\dots)$  次多项式集合。

假设间断函数在有限元空间中的近似解为  $U_h$ , 用试探函数  $\Phi$  乘以方程两侧并采用分部积分公式可得弱解方程:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi_h U_h d\Omega - \int_{\Omega} F_i(U_h) \cdot \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma_e} F_i(U_h) \cdot n_i \Phi_h d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_e} F_v^i(U_h, \nabla U_h) \cdot n_i \Phi_h d\Gamma - \int_{\Omega} F_v^i(U_h, \nabla U_h) \cdot \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_i} d\Omega, \quad \forall \Phi_h \in V^p, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $U_h, \Phi_h$  分别为精确解  $U$  和试探函数  $\Phi$  的有限元近似解,  $n_i = (n_x, n_y, n_z)$  单元边界  $\Gamma_e$  的单位外法向量,  $U_h, \Phi_h$  可以用基函数表示为

$$U_h = \sum_{j=1}^N U_j(t) \varphi_j^p(x), \quad \Phi_h = \sum_{j=1}^N \Phi_j \varphi_j^p(x), \quad (9)$$

其中  $\varphi_j^p(x)$  是  $p$  阶多项式基函数,基函数同样满足式(8),可得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} B_j U_h d\Omega - \int_{\Omega} F_i(U_h) \cdot \frac{\partial B_j}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma_e} F_i(U_h) \cdot n_i B_j d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_e} F_v^i(U_h, \nabla U_h) \cdot n_i B_j d\Gamma - \int_{\Omega} F_v^i(U_h, \nabla U_h) \cdot \frac{\partial B_j}{\partial x_i} d\Omega, \quad 1 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (10)$$

$F_i(U_h) \cdot n_i$  采用 Riemann(黎曼)通量函数  $H(U_h^L, U_h^R, n)$  代替, 这里  $U_h^L, U_h^R$  分别为单元界面左右单元解,由上述推导过程最后可得如下方程组:

$$M \frac{dU}{dt} = R(U), \quad (11)$$

质量矩阵  $M$  是以  $M_{ij}$  为对角块的对角矩阵,  $R(U)$  为残差,对于变量  $\rho, \rho u, \rho v, \rho e$ , 对角矩阵  $M_{ij}$  有如下形式:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} \int_{e_m} \varphi_1^p \varphi_1^p dV & \int_{e_m} \varphi_1^p \varphi_2^p dV & \cdots & \int_{e_m} \varphi_1^p \varphi_N^p dV \\ \int_{e_m} \varphi_2^p \varphi_1^p dV & \int_{e_m} \varphi_2^p \varphi_2^p dV & \cdots & \int_{e_m} \varphi_2^p \varphi_N^p dV \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{e_m} \varphi_N^p \varphi_1^p dV & \int_{e_m} \varphi_N^p \varphi_2^p dV & \cdots & \int_{e_m} \varphi_N^p \varphi_N^p dV \end{pmatrix}. \quad (12)$$

采用标准正交基函数显然可以使得  $M_{ij}$  具有简单的形式,可以减少计算存储量,简化矩阵结构从而减小整体流场计算量。

通量函数采用 Roe 通量<sup>[15]</sup>

$$F^{\text{Roe}} = \frac{1}{2} [F_L + F_R - |\tilde{A}|(U_R - U_L)], \quad (13)$$

其中

$$|\tilde{\mathbf{A}}|(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) = \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ u\alpha_4 + n_x\alpha_5 + \alpha_6 \\ v\alpha_4 + n_y\alpha_5 + \alpha_7 \\ h\alpha_4 + \lambda'\alpha_5 + u\alpha_6 + v\alpha_7 - \frac{(c')^2}{\gamma - 1}\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = |\lambda'| \left( \Delta\rho - \frac{\Delta p}{(c')^2} \right), \alpha_2 = \frac{|\lambda' + c'|(\Delta p + \rho c' \Delta\lambda')}{2(c')^2}, \\ \alpha_3 = \frac{|\lambda' - c'|(\Delta p - \rho c' \Delta\lambda')}{2(c')^2}, \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_5 = c'(\alpha_2 - \alpha_3), \\ \alpha_6 = \rho |\lambda'| (\Delta u - n_x \Delta\lambda'), \alpha_7 = \rho |\lambda'| (\Delta v - n_y \Delta\lambda'), \end{cases} \quad (15)$$

$\lambda'$  为边界速度标量,  $c'$  为边界声速.

### 1.3 时间步积分方法

时间离散采用循环 GMRES ( $m$ ) 格式计算<sup>[16]</sup>. 经过离散可以得到线性方程组  $\mathbf{A}\Delta\mathbf{U}^n = \mathbf{R}^n$ . 构造 Krylov 子空间:  $\mathbf{K}_m = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{r}_0\}$ ,  $\mathbf{L}_m = \mathbf{A}\mathbf{K}_m$ ,  $\mathbf{L}_m = \text{span}\{\mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^m\mathbf{r}_0\}$ , 利用 Arnoldi 算法构造一组标准正交基. 具体计算步骤如下:

- 1) 给定  $\mathbf{U}_0 \in R^n$ , 计算残差  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}^n - \mathbf{A}\mathbf{U}_0$ , 令  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|$ .
- 2) 选择合适大小的  $m$ , 完成 Arnoldi 过程得到向量组  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^m$  和  $\bar{\mathbf{H}}_m$ , 这里选择  $m = 5$  (计算量会随着  $m$  的增加而增大, 中间过程计算量过大, 然而时间求解步不需要关心中间过程的精确性).
- 3) 极小化  $\|\beta\mathbf{e}_1 - \bar{\mathbf{H}}_m\mathbf{y}\|$  得到  $\mathbf{y}_m$ .
- 4) 计算  $\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y}_m$ .
- 5) 计算  $\|\mathbf{r}_m\| = \|\mathbf{R}^n - \mathbf{A}\mathbf{U}_m\|$  如果满意, 则停止; 否则  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_m, \mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_m / \|\mathbf{r}_m\|$  转向步骤 2).

当矩阵条件数  $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$  较大时, 矩阵表现为病态, 计算效率会明显下降, 甚至迭代算法会发散, 因此本文采用 LU-SGS 算法作预处理. 对于线性方程组  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  而言, 一般可以进行左、右处理技术, 以左处理为例:

设  $\mathbf{M}_L$  为左预处理矩阵, 这样就有  $\mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{b}}$ , 其中  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{A}, \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{b}$ . 理想的  $\mathbf{M}_L^{-1}$  为  $\mathbf{A}^{-1}$ , 但是往往  $\mathbf{M}_L$  为大型稀疏矩阵, 尤其病态时其逆求解会引入较大的误差, 所以不能直接求解. 观察到  $\mathbf{M}_L\mathbf{M}_L^{-1} = \mathbf{I}$ , 等价于求解以  $\mathbf{M}_L^{-1}$  为解的方程组, 此时采用 LU-SGS 进行处理可以较好地改善预处理矩阵的性态, 从而提高计算效率.

## 2 并行算法设计

### 2.1 网格划分及边界处理

边界分为物面边界、远场边界以及人工分区内边界. 物面边界采用无穿透边界条件, 远场边界采用无反射边界条件. 分区内边界, 引入虚拟单元进行数据传递 (见图 1).

基于多级图分区方法对非结构网格进行划分, 保证了每个子区域单元数量基本相等, 同时满足子区域交界面数量最少, 各进程保持负载均衡, 从而提高并行效率. 结合初始网格和计算

域单元分区信息,对于生成的子区域网格独立保存,在求解过程中,只需要在每个进程中读入一块子网格,并且仅在相邻子域间数据传递,实现同步计算.分区边界如图 2 所示.

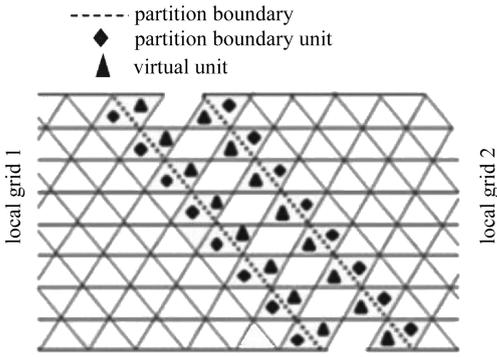


图 1 分区边界

Fig. 1 The boundary of domain partition

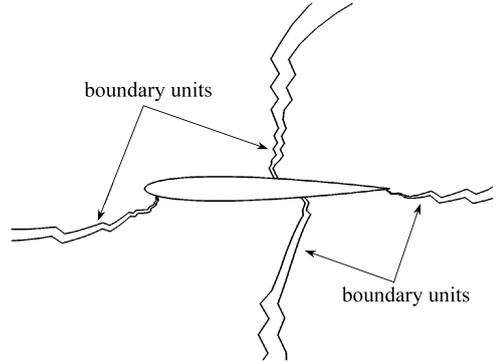


图 2 NACA0012 翼型四分区边界

Fig. 2 The boundary of 4 domain partitions of the NACA0012 airfoil

### 2.2 网格边界数据传递

内边界在相邻子区域虚拟网格上通信,每步迭代更新.计算过程中,主要涉及数值通量  $H(U_h^L, U_h^R, n)$  和  $\partial H(U_h^L, U_h^R, n) / \partial U$ .因此需要分配动态空间,将各个独立网格分区边界上  $U_h^L$  的新值传递给其所对应的相邻区域网格的虚拟存储单元,作为相邻区域网格分区边界上单元  $U_h^R$  的新值,并释放动态空间.所有进程在每步迭代后将误差经过传递后求和,直到满足程序停止要求.各分区边界区域数据传递如图 3 所示.

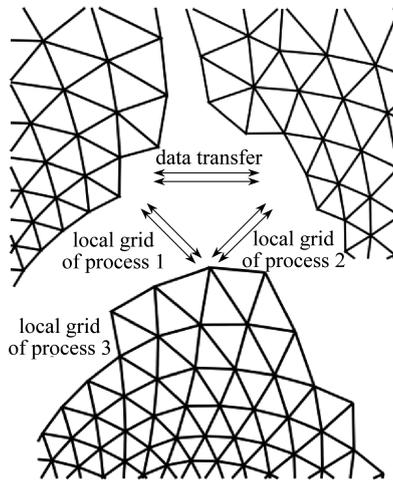


图 3 非结构网格相邻区域边界数据传递

Fig. 3 Data transfer across adjacent domain boundaries on unstructured grids

## 3 数值结果与讨论

为了验证本文算法的可行性和高效性,对 RAE2822 翼型、ONERA M6 机翼的黏性绕流做数值模拟.

### 3.1 绕 RAE2822 翼型黏性流动

计算状态:来流 Mach(马赫)数  $Ma_\infty = 0.729$ , 攻角  $\alpha = 2.31^\circ$ , 图 4、5 给出了八分区全局网

格和局部网格,网格单元共 22 842 个,网格节点共 13 937 个.包括虚拟单元的子区域网格单元数为:12 215,2 232,2 257,2 674,3 471,3 782,3 633,3 611;网格节点数为:1 882,1 869,1 852,1 919,1 806,2 004,1 909,1 895;网格单元数和节点数基本保持一致. $T_1$  为单台处理器计算时间, $T_n$  为  $n$  台处理器计算时间.

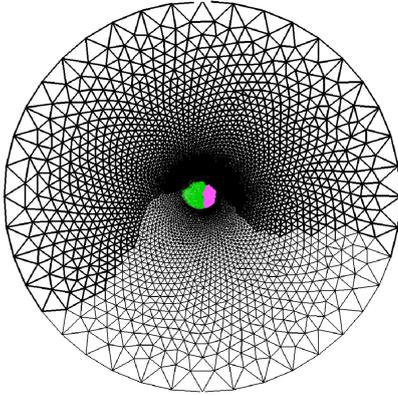


图 4 RAE2822 翼型八分区全局网格  
Fig. 4 The global 8-partition grids for the RAE2822 airfoil

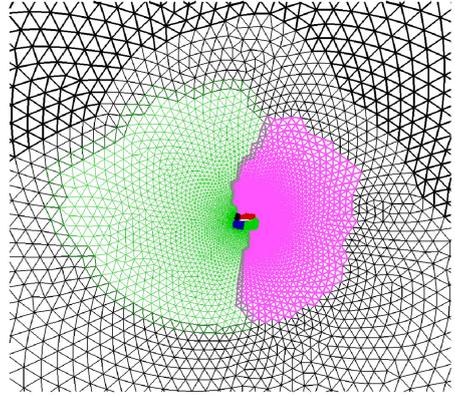


图 5 RAE2822 翼型八分区局部网格  
Fig. 5 The local 8-partition grids for the RAE2822 airfoil

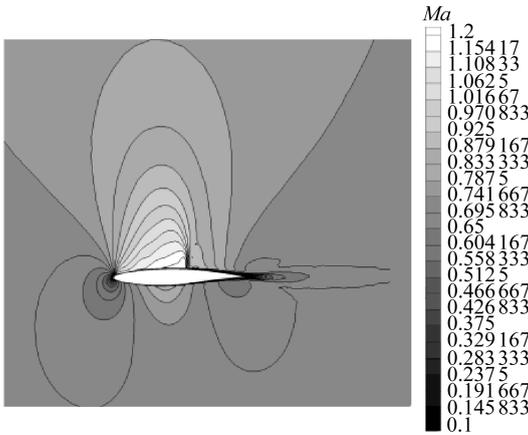


图 6 RAE2822 翼型 Mach 数云图

Fig. 6 The Mach contour for the RAE2822 airfoil

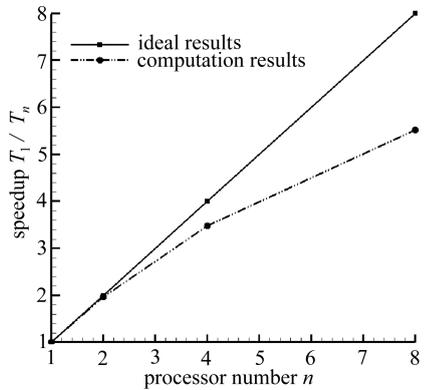


图 7 RAE2822 翼型加速比

Fig. 7 The parallel speedup of the RAE2822 airfoil

表 1 RAE2822 翼型黏性绕流的并行性能

Table 1 Parallel performance of viscosity fluid around the RAE2822 airfoil

processor number $n$	computation time $T$ /min	speedup $T_1/T_n$	parallel efficiency $\xi$ /%	iteration number $N_1$
1	73.058 2			2 450
2	37.085 4	1.970 0	98.50	2 402
4	20.955 3	3.486 4	87.16	2 280
8	13.240 9	5.517 6	68.97	2 279

图 6 给出了 Mach 数云图,图 7 给出了理想加速比与本文实际加速比对比结果,可以看出加速比基本呈线性增长,验证了算法的有效性和较好的加速比与并行效率.图 8 和图 9 给出了迭代步残差收敛曲线对比图和时间步残差收敛曲线对比图,  $\varepsilon$  为残差.由实验数据表 1 可以看

出,本文算法 8 台处理器并行效率接近 70%,但是随着处理机台数的增加,数据通信时间会逐渐成为主导时间,影响并行效率.当然,随着网格数量的增加,并行效率会随之增加,基本呈线性变化.

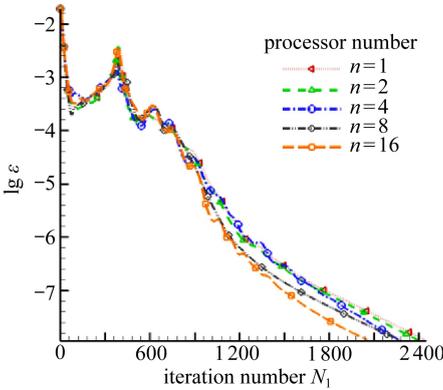


图 8 RAE2822 翼型迭代步收敛历史

Fig. 8 Iteration step histories of the RAE2822 airfoil

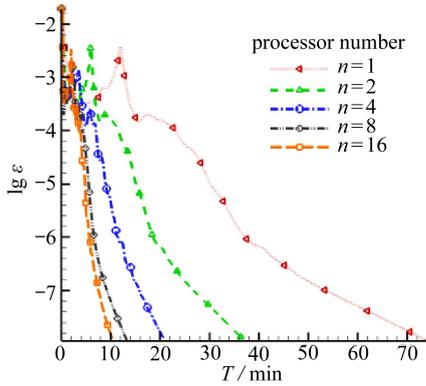


图 9 RAE2822 翼型时间步收敛历史

Fig. 9 Time step histories of the RAE2822 airfoil

### 3.2 绕 ONERA M6 机翼流动

计算状态:来流 Mach 数  $Ma_\infty = 0.8395$ , 攻角  $\alpha = 3.06^\circ$ , 图 10、11 给出了四分区全局网格和局部网格,网格单元共 258 969 个,网格节点共 100 592 个;表面网格单元(图 12)共 6 545 个,网格节点共 3 290 个.包括虚拟单元的子区域网格单元数为:82 412,60 729,64 625,62 977;网格节点数为:27 765,26 651,26 569,27 975;网格单元数和节点数基本保持一致.

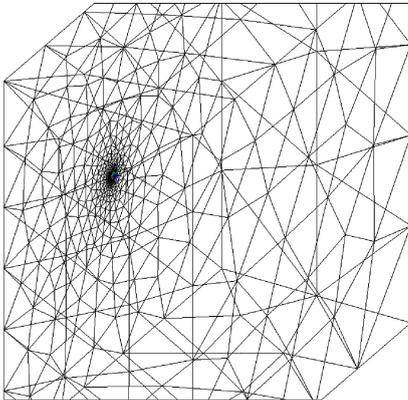


图 10 ONERA M6 机翼的全局网格

Fig. 10 The global 4-partition grids for the ONERA M6 wing

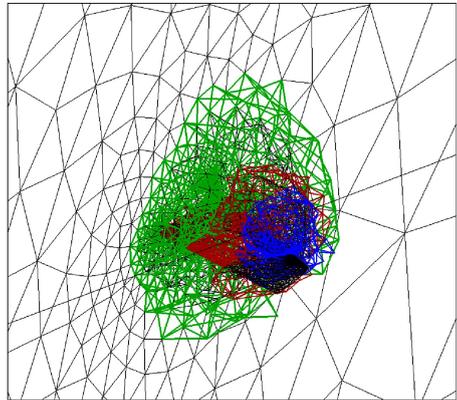


图 11 ONERA M6 机翼的四分区网格

Fig. 11 The local 4-partition grids for the ONERA M6 wing

表 2 ONERA M6 机翼黏性绕流的并行性能

Table 2 Parallel performance of viscosity fluid over the ONERA M6 wing

processor number	computation time $T/\text{min}$	speedup $T_1/T_n$	parallel efficiency $\xi/\%$	iteration number $N_1$
1	473.251 1			2 775
2	249.229 0	1.970 2	98.51	2 773
4	140.086 8	3.378 3	84.46	2 820
8	88.342 3	5.357 0	66.96	2 676

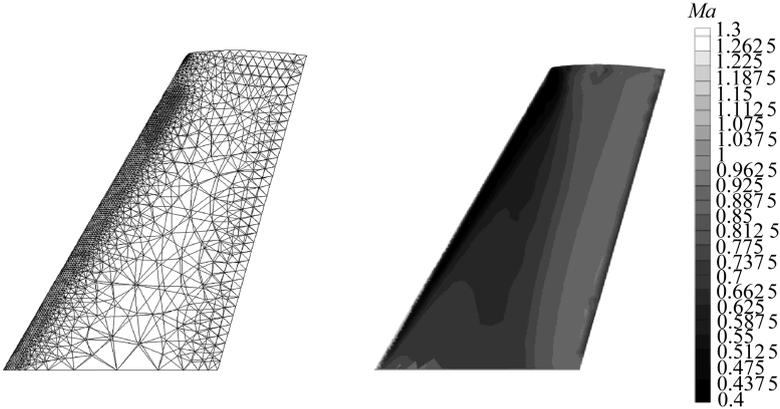


图 12 ONERA M6 机翼的表面网格

图 13 ONERA M6 机翼的 Mach 数云图

Fig. 12 Surface grids for the ONERA M6 wing

Fig. 13 The Mach contour of the ONERA M6 wing

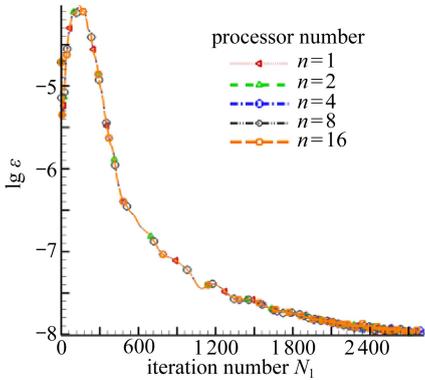


图 14 ONERA M6 迭代步收敛历史

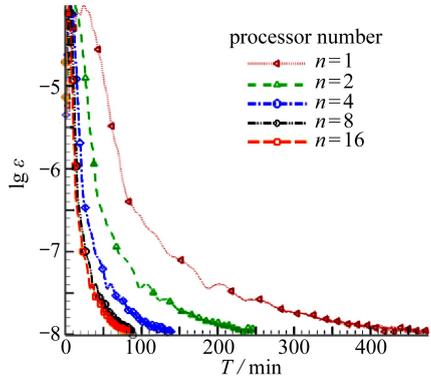


图 15 ONERA M6 时间步收敛历史

Fig. 14 Iteration step histories of the ONERA M6 wing

Fig. 15 Time step histories of the ONERA M6 wing

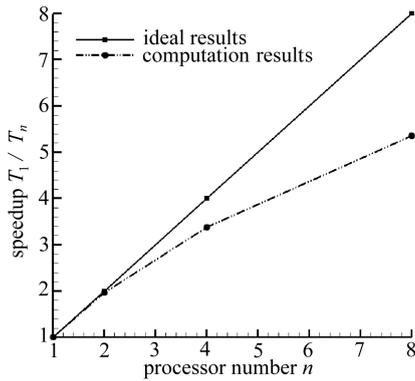


图 16 ONERA M6 加速比

Fig. 16 Parallel speedup of ONERA M6 wing

图 13 给出了 Mach 数云图,图 14 给出了迭代步收敛历史,迭代步数基本保持一致.图 15 给出了时间步残差收敛曲线对比图.图 16 给出了理想加速比与本文实际加速比对比结果,可以看出加速比基本呈线性增长,验证了算法的有效性和较好的加速比.由实验数据表 2 可以看出,本文算法 8 台处理器并行效率接近 70%,对于三维情形下,数据传递时间随着处理机台数增加较二维情形越明显占据主导地位.当然,随着网格数量的增加,并行效率会随之增加.

## 4 结 论

本文研究了 Navier-Stokes 方程的并行 GMRES 间断有限元算法,显然 GMRES 格式效率较高,配合预处理 LU-SGS 技术较好地实现了黏性绕流计算,数值结果表明了本文方法具有较好的并行效率和加速比,得到以下结论:

1) 区域分解图二级分裂方法,配合 DGFEM 优良的并行性特点,有效地实现了负载平衡问题,数据传递只发生在相邻处理器之间,通过提高基函数的阶数达到提高计算的高精度.随着计算网格数的增加,通信时间相对更小,并行效率会进一步提高.

2) 隐式时间离散方法不受 CFL 条件的约束,且单元上采用正交多项式基函数能进一步简化迭代矩阵,结合 MG 方法,对于提高计算效率效果良好.

3) 计算结果表明,本文算法适合于 MIMD 模式下的粗粒度科学计算.

此外,相关线性方程组的并行处理技术,或者系数矩阵条件数较大时,采用其他如 ILU(0)、Block-ILU(0)、Gauss-Seidel、SSOR 及其他 Krylov 子空间预处理技术<sup>[17-18]</sup>,都可以很好地提高计算效率.

**致谢** 本文作者衷心感谢咸阳师范学院科研基金(15XSYK032);咸阳师范学院大学生创新创业训练项目(2015050)对本文的资助.

## 参考文献(References):

- [1] Bassi F, Crivellini A, Rebay S, et al. Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes and  $k-\omega$  turbulence model equations[J]. *Computers & Fluids*, 2005, **34**(4/5): 507-540.
- [2] 贺立新, 张来平, 张涵信. 间断 Galerkin 有限元和有限体积混合计算方法研究[J]. 力学学报, 2007, **39**(1): 15-22. (HE Li-xin, ZHANG Lai-ping, ZHANG Han-xin. A finite element/finite volume mixed solver on hybrid grids[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(1): 15-22. (in Chinese))
- [3] 张来平, 贺立新, 刘伟, 等. 基于非结构/混合网格的高阶精度格式研究进展[J]. 力学进展, 2013, **43**(2): 202-236. (ZHANG Lai-ping, HE Li-xin, LIU Wei, et al. Reviews of high-order methods on unstructured and hybrid grid[J]. *Advances in Mechanics*, 2013, **43**(2): 202-236. (in Chinese))
- [4] Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems[J]. *Mathematics of Computation*, 1977, **31**(138): 333-390.
- [5] 李宗哲, 王正华, 姚路, 等. 非结构网格的并行多重网格解算器[J]. 软件学报, 2013, **24**(2): 391-404. (LI Zong-zhe, WANG Zheng-hua, YAO Lu, et al. Parallel multigrid solver for unstructured grid[J]. *Journal of Software*, 2013, **24**(2): 391-404. (in Chinese))
- [6] Carré G, Fournier L, Lanteri S. Parallel linear multigrid algorithms for the acceleration of compressible flow calculations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **184**(2/4): 427-448.
- [7] Lambropoulos N K, Koubogiannis D G, Giannakoglou K C. Acceleration of a Navier-Stokes equation solver for unstructured grids using agglomeration multigrid and parallel processing [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **193**(9/11): 781-803.
- [8] Dolean V, Lanteri S. Parallel multigrid methods for the calculation of unsteady flows on unstructured grids: algorithmic aspects and parallel performances on clusters of PCs[J]. *Paral-*

- tel Computing*, 2004, **30**(4): 503-525.
- [9] LUO Hong, LUO Lu-qing, Ali A, et al. A parallel, reconstructed discontinuous Galerkin method for the compressible flows on arbitrary grids [J]. *Communications in Computational Physics*, 2011, **9**(2): 363-389.
- [10] XIA Yi-dong, LUO Hong, Frisbey M, et al. A set of parallel, implicit methods for a reconstructed discontinuous Galerkin method for compressible flows on 3D hybrid grids[J]. *Computers & Fluids*, 2014, **98**: 134-151.
- [11] Beck A, Bolemann T, Frank H, et al. Discontinuous Galerkin for high performance computational fluid dynamics[C]//*High Performance Computing in Science and Engineering*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013: 281-294.
- [12] 司海青, 王同光. 多块并行计算中负载均衡策略及时间成本估算方法[J]. 航空学报, 2007, **28**(S): 57-61.(SI Hai-qing, WANG Tong-guang. Load balancing strategy for parallel calculation and time cost estimation[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2007, **28**(S): 57-61. (in Chinese))
- [13] Kameda H, Fathy E Z S, Ryu I, et al. A performance comparison of dynamic vs. static load balancing policies in a mainframe-personal computer network model[C]//*Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia, 2000: 1415-1420.
- [14] 马欣荣, 刘三阳. 非结构网格上双曲守恒律的并行算法研究[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2015, **47**(2): 123-128.(MA Xin-rong, LIU San-yang. Parallel algorithm for conservation laws with unstructured grids[J]. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2015, **47**(2): 123-128.(in Chinese))
- [15] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **43**(2): 357-372.
- [16] LUO Hong, Sharov D, Baum J D, et al. Parallel unstructured grid GMRES+LU-SGS method for turbulent flows[C]//*41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada, 2003: AIAA 2003-273.
- [17] Dongarra J J, Duff I S, Danny C, et al. *Numerical Linear Algebra on High-Performance Computers*[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [18] 李晓梅, 吴建平. 数值并行算法与软件[M]. 北京: 科学出版社, 2007.(LI Xiao-mei, WU Jian-ping. *Numerical Parallel Algorithms and Software*[M]. Beijing: Science Press, 2007.(in Chinese))

# A Parallel Discontinuous Galerkin FEM for Solving Compressible Navier-Stokes Equations

MA Xin-rong<sup>1</sup>, DUAN Zhi-jian<sup>1</sup>, XIE Gong-nan<sup>2</sup>, LIU San-yang<sup>3</sup>

(1. *College of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang, Shaanxi 712000, P.R.China;*

2. *School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;*

3. *School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, P.R.China)*

(Contributed by XIE Gong-nan, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Based on unstructured grids, discontinuous Galerkin finite element methods (DGFEM) are very suited to realize high-order approximations of Navier-Stokes equations, but are rather demanding in computing resources. In order to improve the computational efficiency of the DGFEM, an efficient parallel algorithm on distributed-memory multicomputers coupled with the multigrid strategy based on the GMRES+LU-SGS procedure was presented here. The domain decomposition method was employed to handle meshes properly and make each processor maintain load balancing. Moreover, the LU-SGS and the local time stepping techniques were used to accelerate the convergence of the solution of Navier-Stokes equations. Numerical tests were conducted for viscous turbulence flow problems around the RAE2822 airfoil and over the M6 wing. The parallel acceleration is near to a linear convergence and up to the ideal solutions. The results indicate that the proposed parallel algorithm reduces computation time significantly and allocates memory reasonably with advantages of high acceleration and efficiency, and is very suited for coarse-grained scientific computation of MIMD models.

**Key words:** discontinuous Galerkin FEM; Navier-Stokes equations; parallel algorithm; domain decomposition algorithm

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(61401383)

---

引用本文/Cite this paper:

马欣荣, 段治健, 谢公南, 刘三阳. 并行间断有限元算法求解 Navier-Stokes 方程[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(12): 1377-1388.

MA Xin-rong, DUAN Zhi-jian, XIE Gong-nan, LIU San-yang. A parallel discontinuous Galerkin FEM for solving compressible Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(12): 1377-1388.