文章编号:1000-0887(2017)09-1072-09

Hilbert 空间中分裂可行性问题的改进 Halpern 迭代和黏性逼近算法*

杨 丽, 李 军

(西华师范大学 数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘要: 在无限维 Hilbert 空间中,提出了求解分裂可行性问题(SFP)的改进 Halpern 迭代和黏性逼近算法,证明了当参数满足一定条件时,由给定算法生成的序列强收敛到分裂可行性问题的一个解.这些结论推广了 Deepho 和 Kumam 近年来的一些结果.

关 键 词: 分裂可行性问题; 改进 Mann 迭代和黏性逼近方法; 强收敛; Hilbert 空间

中图分类号: O177.19 **文献标志码**: A doi: 10.21656/1000-0887.380106

引 言

SFP 是一类极其重要的最优化问题,它在生物学、医学和图像重建、信号处理中有着广泛的应用[1-3],该问题最早是由 Censor 和 Elfving[4] 在 1994 年提出的,它是这样一个问题:设 C,Q 分别是 Hilbert 空间 H_1,H_2 上的两个非空闭凸集,$A:H_1\to H_2$ 是一个有界线性算子,找到这样的元素 $x^*\in H_1$ 满足

$$x^*\in C,\ Ax^*\in Q. \tag{1}$$

本文假设 SFP(1)是有解的,用 Ω 表示它的解集,即

$$\Omega=\{x\in C:\ Ax\in Q\}=C\cap A^{-1}Q,$$

其中 A^{-1} 表示算子 A 的逆算子.

为了解决 SFP(1),近年来,很多学者相继提出了求解该问题的多种算法(详见文献[5-10]),值得注意的是,在众多方法中,有一种是 Byrne 提出的 CQ 算法[10].这个算法是这样的:对于任意的初始值 $x_0\in C$,

$$x_{n+1}=P_C(x_n-\lambda A^*(I-P_Q)Ax_n),\qquad n\geqslant 0,$$

这里 P_C 和 P_Q 分别表示到集合 C 和集合 Q 的投影,A^* 表示 A 的伴随算子,$\lambda>0$ 是一个常数,且满足 $0<\lambda<2/\rho(A^*A)$,$\rho(A^*A)$ 为自伴算子 A^*A 的谱半径,I 是单位算子.受 Byrne 的 CQ 算法和 Xu[11] 的黏性逼近方法的启发,2014 年,Deepho 和 Kumam[12] 提出了下面算法:对于任意的初始值 $x_0\in C$,定义它的迭代序列为

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)x_n,\qquad n\geqslant 0, \tag{2}$$

* **收稿日期**: 2017-04-20; **修订日期**: 2017-06-14

基金项目: 国家自然科学基金(11371015);四川省高校科研创新团队项目(16TD0019)

作者简介: 杨丽(1980—),女,讲师,硕士(通讯作者. E-mail: yangli@cwnu.edu.cn);
李军(1974—),男,教授,博士(E-mail: junli1026@163.com).

其中 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$，$f:C\to C$ 是一压缩映象.他们证明了当 $\{\alpha_n\}$ 满足下列条件时：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$；(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$.

算法(2)是强收敛于问题 SFP(1)的一个解 $\tilde{x}$，其中 $\tilde{x}$ 是如下变分不等式的唯一解：

$$\langle(I-f)\tilde{x},\ x-\tilde{x}\rangle\geqslant 0,\qquad x\in\Omega.$$

本文研究了如下两种算法，即

$$\begin{cases}x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)y_n,\\ y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)x_n,\end{cases}\qquad n\geqslant 0,1,2,\cdots,$$

以及

$$\begin{cases}y_n=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)x_n,\\ x_{n+1}=\beta_n u+(1-\beta_n)y_n,\end{cases}\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

本文证明了当参数 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 满足一定条件时，这两种算法强收敛到 SFP 的一个解.

1 预 备 知 识

设 H 是实 Hilbert 空间，内积和范数分别由 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 给出，T_{Fix} 表示算子 T 的不动点的集合，即 $T_{\mathrm{Fix}}=\{x\in H\,|\,T(x)=x\}$.本文用→表示强收敛，$\xrightarrow{w}$表示弱收敛.

在非线性分析中，许多求解实际问题的数学模型都可以通过转化成某些非线性算子的不动点问题，分裂可行性问题也可以转化为投影算子的不动点问题，不难发现 SFP(1)的解 x^* 就是下列不动点方程的解[5]：

$$P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)x^*=x^*.$$

下面先介绍一些非线性算子的定义和性质，以及文中要用到的一些相关结论.

定义 1 设 C 是 Hilbert 空间 H 中的一个非空闭凸子集，令 $T:C\to H$ 为非线性算子，称

① T 是压缩算子，如果存在常数 $\rho\in(0,1)$，使得 $\|Tx-Ty\|\leqslant\rho\|x-y\|$，$\forall x,y\in C$；

② T 是非扩张算子，如果 $\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|$，$\forall x,y\in C$.

定义 2 一个算子 T 称为是均值算子，如果它可以写成恒等算子 I 和一个非扩张算子 S 的凸组合形式，即

$$T=(1-\alpha)I+\alpha S,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$ 且 $S:H\to H$ 是一个非扩张算子.更精确地，当上式成立时，称 T 是 α- 均值算子.

众所周知，均值算子是一类特殊的非扩张算子.

定义 3 设 $C\subset H$ 是非空子集，$x\in H$，点 $y\in C$ 称为点 x 到集 C 上的投影，如果对任意点 $z\in C$，不等式 $\|y-x\|\leqslant\|z-x\|$ 成立.点 x 到集 C 上的投影记作 P_Cx.

如果集 C 是非空闭凸的，则 P_Cx 是存在的并且是唯一的.众所周知，投影算子是非扩张的，并且有如下性质：

$$\langle x-P_Cx,\ z-P_Cx\rangle\leqslant 0,\qquad\forall x\in H,\ z\in C.$$

引理 1[13] 假设 $C\cap A^{-1}(Q)\neq\varnothing$.若 $U=I-\lambda A^*(I-P_Q)A$，其中 $0<\lambda<2/\rho(A^*A)$，$\rho(A^*A)$ 为自伴算子 A^*A 的谱半径，则有如下结论成立：

① U 是均值算子；即 $U=(1-\beta)I+\beta V$，其中 $\beta\in(0,1)$ 是一个常数并且 $V:H\to H$ 是非扩张映象.

② $U_{\mathrm{Fix}}=A^{-1}(Q)$；而且 $(P_CU)_{\mathrm{Fix}}=(P_C)_{\mathrm{Fix}}\cap U_{\mathrm{Fix}}=\Omega=C\cap A^{-1}Q$.

引理 2[14] 假设非负实数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足

$$a_{n+1} \leqslant (1-\gamma_n)a_n + \delta_n, \qquad n \geqslant 0,$$

其中 $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (0,1)$, $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 R 中的序列且满足

(Ⅰ) $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$,

(Ⅱ) $\limsup_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\gamma_n} \leqslant 0$ 或者 $\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n| < \infty$,

则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

引理 3(半闭性规则)[15] 设 H 是实 Hibert 空间, C 是 H 的非空闭凸子集, T 是 $C \to C$ 的一非扩张映象.如果序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset C$,且满足 $x_n \xrightarrow{w} z$ 和 $x_n - Tx_n \to 0$,那么 $z \in F(T)$.

2 主要结果

定理 1 假设 SFP(1)是可解的, C 是实 Hilbert 空间 H 中的非空闭凸子集.f: $C \to C$ 是一个压缩系数为 $\rho \in (0,1)$ 的压缩映象,对于任意的初始迭代点 $x_0 \in C$, 定义迭代序列 $\{x_n\}$ 为

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)x_n, \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{3}$$

其中 $0 < \lambda < 2/\rho(A^*A)$, $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$, $\{\beta_n\} \subset (0,1]$ 且满足下列条件:

(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$,

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, 且存在 $a > 0$ 使得 $\liminf_{n\to\infty} \beta_n \geqslant a$.

那么由算法(3)生成的序列 $\{x_n\} \to \tilde{x}$, 其中 $\tilde{x} \in \Omega$ 是如下变分不等式的唯一解:

$$\langle (I-f)\tilde{x}, x - \tilde{x} \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in \Omega. \tag{4}$$

证明 为了方便证明, 令 $T = P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)$.注意到条件 $0 < \lambda < 2/\rho(A^*A)$, 由引理 1 知 $I - \lambda A^*(I-P_Q)A$ 是均值的.并且 $T_{\mathrm{Fix}} = \Omega = C \cap A^{-1}(Q)$.

接下来的证明分 5 步完成:

第 1 步 证明 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{Tx_n\}$, $\{f(x_n)\}$, $\{x_n - Tx_n\}$ 以及 $\{f(x_n) - T(y_n)\}$ 都是有界的.

对任意的 $z \in T_{\mathrm{Fix}} = \Omega$ 先计算

$$\begin{aligned} \|y_n - z\| &= \|(1-\beta_n)Tx_n + \beta_n x_n - z\| = \\ &\|(1-\beta_n)(Tx_n - z) + \beta_n(x_n - z)\| \leqslant \\ &(1-\beta_n)\|Tx_n - z\| + \beta_n\|x_n - z\| \leqslant \\ &(1-\beta_n)\|x_n - z\| + \beta_n\|x_n - z\| = \\ &\|x_n - z\|. \end{aligned} \tag{5}$$

结合上式,进一步有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z\| &\leqslant \|(1-\alpha_n)Ty_n + \alpha_n f(x_n) - z\| = \\ &\|(1-\alpha_n)(Ty_n - z) + \alpha_n(f(x_n) - z)\| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|y_n - z\| + \alpha_n(\|f(x_n) - f(z)\| + \|f(z) - z\|) \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\|x_n - z\| + \alpha_n(\rho\|x_n - z\| + \|f(z) - z\|) = \end{aligned}$$

$$(1-(1-\rho)\alpha_n)\|x_n-z\|+\alpha_n\|f(z)-z\|\leqslant$$
$$\max\left\{\|x_n-z\|,\frac{1}{1-\rho}\|f(z)-z\|\right\}.$$

由递推关系知

$$\|x_n-z\|\leqslant\max\left\{\|x_0-z\|,\frac{1}{1-\rho}\|f(z)-z\|\right\},\qquad n\geqslant 0.$$

从而 $\{x_n\}$ 有界.下面证明 $\{y_n\}$, $\{Tx_n\}$, $\{Ty_n\}$ 皆有界.事实上由于 $\{x_n\}$ 的有界性,取定 $p\in T_{\mathrm{Fix}}$,结合式(5) 有 $\|y_n\|\leqslant\|y_n-p\|+\|p\|\leqslant\|x_n-p\|+\|p\|$,这说明 $\{y_n\}$ 有界;而 $\|Tx_n\|\leqslant\|Tx_n-p\|+\|p\|\leqslant\|x_n-p\|+\|p\|$,这说明 $\{Tx_n\}$ 有界;进而可以得到 $\|Ty_n\|\leqslant\|Ty_n-p\|+\|p\|\leqslant\|y_n-p\|+\|p\|\leqslant\|x_n-p\|+\|p\|$,这说明 $\{Ty_n\}$ 有界;另一方面由于 $\|f(x_n)\|\leqslant\|f(x_n)-f(p)\|+\|f(p)\|<\rho\|x_n-p\|+\|f(p)\|$,从而 $\{f(x_n)\}$ 是有界的;进一步可以得到 $\|x_n-Tx_n\|\leqslant\|x_n\|+\|Tx_n\|$ 是有界的;以及 $\|f(x_n)-T(y_n)\|\leqslant\|f(x_n)\|+\|T(y_n)\|$ 也是有界的.

第 2 步　证明 $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0$.

先计算

$$\|y_n-y_{n-1}\|=\|\beta_nx_n+(1-\beta_n)Tx_n-\beta_{n-1}x_{n-1}-(1-\beta_{n-1})Tx_{n-1}\|=$$
$$\|(1-\beta_n)(Tx_n-Tx_{n-1})+(\beta_n-\beta_{n-1})(x_{n-1}-Tx_{n-1})+\beta_n(x_n-x_{n-1})\|\leqslant$$
$$(1-\beta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+|\beta_n-\beta_{n-1}|\|x_{n-1}-Tx_{n-1}\|+\beta_n\|x_n-x_{n-1}\|=$$
$$\|x_n-x_{n-1}\|+|\beta_n-\beta_{n-1}|\|x_{n-1}-Tx_{n-1}\|.$$

由于前面已证 $\|x_n-Tx_n\|$ 是有界的以及 $\|f(x_n)-T(y_n)\|$ 也是有界的,令

$$M=\sup_{n\geqslant 0}\{\|f(x_n)-Ty_n\|,\|Tx_n-x_n\|\}.$$

于是进一步计算

$$\|x_{n+1}-x_n\|=\|\alpha_nf(x_n)+(1-\alpha_n)Ty_n-\alpha_{n-1}f(x_{n-1})-(1-\alpha_{n-1})Ty_{n-1}\|=$$
$$\|(1-\alpha_n)(Ty_n-Ty_{n-1})+(\alpha_n-\alpha_{n-1})(f(x_{n-1})-Ty_{n-1})+$$
$$\alpha_n(f(x_n)-f(x_{n-1}))\|\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)\|y_n-y_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\|f(x_{n-1})-Ty_{n-1}\|+\alpha_n\rho\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)\|x_n-x_{n-1}\|+(1-\alpha_n)|\beta_n-\beta_{n-1}|\|x_{n-1}-Tx_{n-1}\|+$$
$$|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\|f(x_{n-1})-Ty_{n-1}\|+\alpha_n\rho\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant$$
$$(1-\alpha_n+\alpha_n\rho)\|x_n-x_{n-1}\|+(1-\alpha_n)|\beta_n-\beta_{n-1}|\|x_{n-1}-Tx_{n-1}\|+$$
$$|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\|f(x_{n-1})-Ty_{n-1}\|\leqslant$$
$$[1-(1-\rho)\alpha_n]\|x_n-x_{n-1}\|+M(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|).$$

结合条件(ii)、(iii)以及引理 2 得到 $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0$.

第 3 步　证

$$\|x_n-Tx_n\|\to 0. \tag{6}$$

由序列 $\{x_n\}$ 的定义式(3), 并结合条件(i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, 因此有

$$\|x_n-Ty_n\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-Ty_n\|\leqslant$$
$$\|x_n-x_{n+1}\|+\alpha_n\|f(x_n)-Ty_n\|\to 0, \tag{7}$$

以及

$$\|x_n-Tx_n\|\leqslant\|x_n-Ty_n\|+\|Ty_n-Tx_n\|\leqslant$$
$$\|x_n-Ty_n\|+\|y_n-x_n\|=\|x_n-Ty_n\|+(1-\beta_n)\|x_n-Tx_n\|.$$

从而有 $\beta_n \| x_n - Tx_n \| \leqslant \| x_n - Ty_n \|$，进一步由条件条件(iii)得到

$$\| x_n - Tx_n \| \leqslant \frac{1}{\beta_n} \| x_n - Ty_n \| \to 0.$$

第 4 步 证明

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \tilde{x} - x_n, \tilde{x} - f(\tilde{x}) \rangle \leqslant 0. \tag{8}$$

事实上，取子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，使得

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \tilde{x} - x_n, \tilde{x} - f(\tilde{x}) \rangle = \limsup_{k\to\infty} \langle \tilde{x} - x_{n_k}, \tilde{x} - f(\tilde{x}) \rangle.$$

因为 $\{x_n\}$ 的有界性，设 $x_{n_k} \xrightarrow{w} \bar{x}$，由式(6)及引理 3 知，$\bar{x} \in T_{\mathrm{Fix}}$。结合式(4)得到

$$\limsup_{n\to\infty} \langle \tilde{x} - x_n, \tilde{x} - f(\tilde{x}) \rangle = \langle \tilde{x} - \bar{x}, \tilde{x} - f(\tilde{x}) \rangle \leqslant 0.$$

第 5 步 证明 $x_n \to \tilde{x}$。

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - \tilde{x} \|^2 = {} & \| (1 - \alpha_n)(Ty_n - \tilde{x}) + \alpha_n (f(x_n) - \tilde{x}) \|^2 = \\
& (1 - \alpha_n)^2 \| y_n - \tilde{x} \|^2 + \alpha_n^2 \| f(x_n) - \tilde{x} \|^2 + \\
& 2\alpha_n (1 - \alpha_n) \langle Ty_n - \tilde{x}, f(x_n) - \tilde{x} \rangle \leqslant \\
& (1 - \alpha_n)^2 \| x_n - \tilde{x} \|^2 + \alpha_n^2 \| f(x_n) - \tilde{x} \|^2 + \\
& 2\alpha_n (1 - \alpha_n) \langle Ty_n - \tilde{x}, f(x_n) - f(\tilde{x}) \rangle + \\
& 2\alpha_n (1 - \alpha_n) \langle Ty_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle \leqslant \\
& (1 - \alpha_n)^2 \| x_n - \tilde{x} \|^2 + \alpha_n^2 \| f(x_n) - \tilde{x} \|^2 + \\
& 2\rho\alpha_n (1 - \alpha_n) \| y_n - \tilde{x} \| \| x_n - \tilde{x} \| + \\
& 2\alpha_n (1 - \alpha_n) \langle Ty_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle \leqslant \\
& (1 - \alpha_n)^2 \| x_n - \tilde{x} \|^2 + \alpha_n^2 \| f(x_n) - \tilde{x} \|^2 + 2\rho\alpha_n (1 - \alpha_n) \| x_n - \tilde{x} \|^2 + \\
& 2\alpha_n (1 - \alpha_n) \langle Ty_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle = \\
& [1 - (2\alpha_n - \alpha_n^2 - 2\rho\alpha_n (1 - \alpha_n))] \| x_n - \tilde{x} \|^2 + \\
& \alpha_n [\alpha_n \| f(x_n) - \tilde{x} \|^2 + 2(1 - \alpha_n) \langle Ty_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle] = \\
& (1 - \bar{\alpha}_n) \| x_n - \tilde{x} \|^2 + \bar{\alpha}_n \bar{\beta}_n.
\end{aligned}$$

这里

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_n (2 - \alpha_n - 2\rho(1 - \alpha_n)),$$

$$\bar{\beta}_n = \frac{\alpha_n \| f(x_n) - \tilde{x} \|^2 + 2(1 - \alpha_n) \langle Ty_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle}{2 - \alpha_n - 2\rho(1 - \alpha_n)}.$$

这样结合式(7)和(8)有

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n\to\infty} \langle Ty_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle = \\
& \quad \limsup_{n\to\infty} [\langle Ty_n - x_n, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle + \langle x_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle] \leqslant \\
& \quad \limsup_{n\to\infty} \langle Ty_n - x_n, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle + \limsup_{n\to\infty} \langle x_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle \leqslant \\
& \quad \limsup_{n\to\infty} \| Ty_n - x_n \| \| f(\tilde{x}) - \tilde{x} \| + \limsup_{n\to\infty} \langle x_n - \tilde{x}, f(\tilde{x}) - \tilde{x} \rangle \leqslant 0.
\end{aligned}$$

再结合条件(i) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ 以及前面已证 $\{f(x_n)\}$ 的有界性，进一步说明 $\limsup_{n\to\infty} \bar{\beta}_n \leqslant 0$；又注意到条件(i) $\alpha_n \to 0$ 和条件(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$，这样可以得出 $\bar{\alpha}_n \to 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n = \infty$，最后根据引理 2，得到 $x_n \to \tilde{x}$。

在定理 1 中令 $\beta_n = 1$，则得到以下推论。

推论 1[4]　假设 SFP(1)是可解的，C 是实 Hilbert 空间 H 中的非空闭凸子集. $f:C\to C$ 是一个压缩系数 $\rho\in(0,1)$ 的压缩映象，对于任意的初始迭代点 $x_0\in H$，定义迭代序列 $\{x_n\}$ 为

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)x_n,\qquad n\geqslant 0,\tag{9}$$

其中 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$，且满足下列条件：

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$；(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$.

那么由算法(9)生成的序列 $\{x_n\}\to\tilde{x}$，其中 $\tilde{x}\in\Omega$ 是如下变分不等式的唯一解：

$$\langle(I-f)\tilde{x},x-\tilde{x}\rangle\geqslant 0,\qquad x\in\Omega.$$

定理 2　假设 SFP(1)是可解的，C 是实 Hilbert 空间 H 中的非空闭凸子集.对于任意的初始迭代点 $x_0\in H$，定义迭代序列 $\{x_n\}$ 为

$$\begin{cases}y_n=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)x_n,\\ x_{n+1}=\beta_n u+(1-\beta_n)y_n,\end{cases}\qquad n\geqslant 0,1,2,\cdots,\tag{10}$$

其中 $0<\lambda<2/\rho(A^*A)$，$\{\alpha_n\}\subset(0,1)$，$\{\beta_n\}\subset(0,1)$ 且满足下列条件：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$；

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$.

那么由算法(10)生成的序列 $\{x_n\}\to\tilde{x}$，其中 $\tilde{x}\in\Omega$ 是如下变分不等式的唯一解：

$$\langle\tilde{x}-u,x-\tilde{x}\rangle\geqslant 0,\qquad x\in\Omega.\tag{11}$$

证明　为了方便证明，令 $T=P_C(I-\lambda A^*(I-P_Q)A)$. 由引理 1 知，条件 $0<\lambda<2/\rho(A^*A)$ 说明 $I-\lambda A^*(I-P_Q)A$ 是均值的，并且 $T_{\mathrm{Fix}}=\Omega=C\cap A^{-1}(Q)$.接下来的证明分 5 步完成：

第 1 步　证明 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{u-y_n\}$，$\{u-Tx_{n-1}\}$，$\{x_n-Tx_n\}$ 都是有界的.

对任意的 $p\in T_{\mathrm{Fix}}=\Omega$，有

$$\begin{aligned}\|y_n-p\|&\leqslant\alpha_n\|x_n-p\|+(1-\alpha_n)\|Tx_n-p\|\leqslant\\&\alpha_n\|x_n-p\|+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|=\|x_n-p\|.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|&\leqslant\beta_n\|u-p\|+(1-\beta_n)\|y_n-p\|\leqslant\\&\beta_n\|u-p\|+(1-\beta_n)\|x_n-p\|\leqslant\\&\max\{\|x_n-p\|,\|u-p\|\}.\end{aligned}$$

由数学归纳法可得

$$\|x_n-p\|\leqslant\max\{\|x_0-p\|,\|u-p\|\},\qquad n\geqslant 0.$$

所以 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界，从而 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 也有界.

由于 $\{x_n\}$ 是有界的，因此 $\|Tx_n\|\leqslant\|Tx_n-p\|+\|p\|\leqslant\|x_n-p\|+\|p\|$，这说明 $\{Tx_n\}$ 有界；进一步可以得到 $\|u-Tx_{n-1}\|\leqslant\|u\|+\|Tx_{n-1}\|$ 与 $\|x_n-Tx_n\|\leqslant\|x_n\|+\|Tx_n\|$，这说明 $\{u-Tx_{n-1}\}$ 和 $\{x_n-Tx_n\}$ 都是有界的.

第 2 步　证 $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0$，$n\to\infty$.

设常数 M 满足下式：

$$M > \max\left\{\sup_{n\geqslant 0}\|u - Tx_{n-1}\|, \sup_{n\geqslant 0}\|x_{n-1} - Tx_{n-1}\|\right\}.$$

先计算 $x_{n+1} - x_n$:

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n = {} & \beta_n u + (1-\beta_n)y_n - \beta_{n-1}u - (1-\beta_{n-1})y_{n-1} = \\ & \beta_n u + (1-\beta_n)\alpha_n x_n + (1-\beta_n)(1-\alpha_n)Tx_n - \beta_{n-1}u - \\ & (1-\beta_{n-1})\alpha_{n-1}x_{n-1} - (1-\beta_{n-1})(1-\alpha_{n-1})Tx_{n-1} = \\ & (\beta_n - \beta_{n-1})(u - Tx_{n-1}) + (1-\beta_n)\alpha_n(x_n - x_{n-1}) + \\ & [(\alpha_n - \alpha_{n-1})(1-\beta_n) - (\beta_n - \beta_{n-1})\alpha_{n-1}](x_{n-1} - Tx_{n-1}) + \\ & (1-\alpha_n)(1-\beta_n)(Tx_n - Tx_{n-1}).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant {} & (1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|(Tx_n - Tx_{n-1})\| + \\ & (1-\beta_n)\alpha_n\|x_n - x_{n-1}\| + \\ & |(\alpha_n - \alpha_{n-1})(1-\beta_n) - (\beta_n - \beta_{n-1})\alpha_{n-1}|\,\|x_{n-1} - Tx_{n-1}\| + \\ & |\beta_n - \beta_{n-1}|\,\|u - Tx_{n-1}\| \leqslant \\ & (1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|(x_n - x_{n-1})\| + (1-\beta_n)\alpha_n\|x_n - x_{n-1}\| + \\ & |(\alpha_n - \alpha_{n-1})(1-\beta_n) - (\beta_n - \beta_{n-1})\alpha_{n-1}|\,\|x_{n-1} - Tx_{n-1}\| + \\ & |\beta_n - \beta_{n-1}|\,\|u - Tx_{n-1}\| \leqslant \\ & (1-\beta_n)\|(x_n - x_{n-1})\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}|\,\|x_{n-1} - Tx_{n-1}\| + \\ & |\beta_n - \beta_{n-1}|\,\|x_{n-1} - Tx_{n-1}\| + \\ & |\beta_n - \beta_{n-1}|\,\|u - Tx_{n-1}\| \leqslant \\ & (1-\beta_n)\|(x_n - x_{n-1})\| + M(|\alpha_n - \alpha_{n-1}| + 2|\beta_n - \beta_{n-1}|).\end{aligned}$$

由条件(b)和(c)并根据引理 2 得到 $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$.

第 3 步 证

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0. \tag{12}$$

由序列 $\{x_n\}$ 的定义,并结合条件(a),有

$$\|x_{n+1} - y_n\| \leqslant \beta_n\|u - y_n\| \to 0,$$

以及

$$\|y_n - Tx_n\| \leqslant \alpha_n\|x_n - Tx_n\| \to 0.$$

从而有

$$\|x_n - Tx_n\| \leqslant \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - y_n\| + \|y_n - Tx_n\| \to 0.$$

第 4 步 证明

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u - \tilde{x}, y_n - \tilde{x}\rangle \leqslant 0. \tag{13}$$

先证明 $\limsup_{n\to\infty}\langle \tilde{x} - x_n, \tilde{x} - u\rangle \leqslant 0$ 与 $\|y_n - x_n\| \to 0$.事实上,取子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$,使得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle \tilde{x} - x_n, \tilde{x} - u\rangle = \limsup_{k\to\infty}\langle \tilde{x} - x_{n_k}, \tilde{x} - u\rangle.$$

因为 $\{x_n\}$ 的有界性,设 $x_{n_k} \xrightarrow{w} \bar{x}$,由式(12) 及引理 3 知,$\bar{x} \in T_{\mathrm{Fix}}$.再结合式(11)有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle \tilde{x} - x_n, \tilde{x} - u\rangle = \langle \tilde{x} - \bar{x}, \tilde{x} - u\rangle \leqslant 0.$$

又由序列 $\{x_n\}$ 的定义,并结合式(12),有 $\|y_n - x_n\| \leqslant (1-\alpha_n)\|Tx_n - x_n\| \to 0$.因此进一步得到

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\langle u-\tilde{x},y_n-\tilde{x}\rangle=\\&\quad\limsup_{n\to\infty}[\langle u-\tilde{x},y_n-x_n\rangle+\langle u-\tilde{x},x_n-\tilde{x}\rangle]\leqslant\\&\quad\limsup_{n\to\infty}\langle u-\tilde{x},y_n-x_n\rangle+\limsup_{n\to\infty}\langle u-\tilde{x},x_n-\tilde{x}\rangle\leqslant\\&\quad\limsup_{n\to\infty}\|u-\tilde{x}\|\ \|y_n-x_n\|+\limsup_{n\to\infty}\langle u-\tilde{x},x_n-\tilde{x}\rangle\leqslant 0.\end{aligned}$$

第 5 步 证明 $x_n\to\tilde{x}$.

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-\tilde{x}\|^2=\|\beta_n u+(1-\beta_n)y_n-\tilde{x}\|^2=\\&\quad\|\beta_n(u-\tilde{x})+(1-\beta_n)(y_n-\tilde{x})\|^2=\\&\quad\beta_n^2\|u-\tilde{x}\|^2+(1-\beta_n)^2\|y_n-\tilde{x}\|^2+2\beta_n(1-\beta_n)\langle u-\tilde{x},y_n-\tilde{x}\rangle\leqslant\\&\quad(1-\beta_n)^2\|x_n-\tilde{x}\|^2+\beta_n[\beta_n\|u-\tilde{x}\|^2+2(1-\beta_n)\langle u-\tilde{x},y_n-\tilde{x}\rangle],\end{aligned}$$

这样一来结合式(13)和 $\beta_n\to 0$, 进一步得到

$$\limsup_{n\to\infty}(\beta_n\|u-\tilde{x}\|^2+2(1-\beta_n)\langle u-\tilde{x},y_n-\tilde{x}\rangle)\leqslant 0,$$

再根据条件(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n=\infty$ 以及引理 2,就可得到 $x_n\to\tilde{x}$.

3 结 论

在无限维 Hilbert 空间中,求解分裂可行性问题的投影算法通常是弱收敛的,为了得到强收敛,在前人提出的投影算法的基础上,结合改进的 Halpern 迭代和黏性逼近方法,提出了两种求解分裂可行性问题的算法,并证明了当参数满足一定条件时,这两种算法强收敛到分裂可行性问题的一个解.尽管本文已经得到了一些较好的结果,但是还有很多问题值得进一步去研究,例如,如果能将改进后的算法运用到信号处理、图像重建等实际问题中,我们的研究会更有意义.

致谢 本文作者衷心感谢西华师范大学基本科研业务费(17D082)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] Censor Y, Bortfeld T, Martin B, et al. A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy[J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2006, **51**(10): 2253-2365.

[2] Censor Y, Elfving T, Kopf N, et al. The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problems[J]. *Inverse Problems*, 2005, **21**(6): 2071-2084.

[3] Censor Y, Motiva A, Segal A. Perturbed projections and subgradient projections for the multiple-sets split feasibility problem[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **327**(2): 1244-1256.

[4] Censor Y, Elfving T. A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space [J]. *Numerical Algorithms*, 1994, **8**(2): 221-239.

[5] XU Hong-kun. Iterative methods for the split feasibility problem in infinite-dimensional Hilbert spaces[J]. *Inverse Problems*, 2010, **26**(10): 1-17.

[6] TANG Yu-chao, LIU Li-wei. Iterative methods of strong convergence theorems for the split feasibility problem in Hilbert spaces[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016(1): 2-14. doi: 10.1186/s13660-016-1228-4.

[7] XU Hong-kun. A variable Krasnosel'skiĭ-Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem[J]. *Inverse Problems*, 2006, **22**(6): 2021-2034.

[8] YANG Qing-zhi. The relaxed *CQ* algorithm solving the split feasibility problem[J]. *Inverse Problems*, 2004, **20**(4): 1261-1266.

[9] YANG Qing-zhi, ZHAO Jin-ling. Generalized *KM* theorems and their applications[J]. *Inverse Problems*, 2006, **22**(3): 833-844.

[10] Byrne C. Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem[J]. *Inverse Problems*, 2002, **18**(2): 441-453.

[11] XU Hong-kun. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, **298**(1): 279-291.

[12] Deepho J, Kumam P. A viscosity approximation method for the split feasibility problems[J]. *Transactions on Engineering Technologies*, 2014, **2**(6): 69-77.

[13] WANG Feng-hui, XU Hong-kun. Approximating curve and strong convergence of the *CQ* algorithm for the split feasibility problem[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2010(1): 1-13. doi: 10.1155/2010/102085.

[14] XU Hong-kun. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 2002, **66**(1): 240-256.

[15] Goebel K, Kirk W A. *Topics in Metric Fixed Point Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

Modified Halpern Iteration and Viscosity Approximation Methods for Split Feasibility Problems in Hilbert Spaces

YANG Li, LI Jun

(*School of Mathematics and Information*, *China West Normal University*, *Nanchong*, *Sichuan* 637002, *P.R.China*)

Abstract: In infinite-dimensional Hilbert spaces, the modified Halpern iteration and viscosity approximation methods for solving the split feasibility problems (SFPs) were proposed. When the parameters satisfy certain conditions, it is proved that the sequences generated with the proposed algorithms converge strongly to a solution to the split feasibility problem. The main findings improve and extend some recent results by Deepho and Kumam.

Key words: split feasibility problem; modified Halpern iteration and viscosity approximation method; strong convergence; Hilbert space

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11371015)

引用本文/Cite this paper:

杨丽, 李军. Hilbert 空间中分裂可行性问题的改进 Halpern 迭代和黏性逼近算法[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(9): 1072-1080.

YANG Li, LI Jun. Modified Halpern iteration and viscosity approximation methods for split feasibility problems in Hilbert spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(9): 1072-1080.