

单调迭代结合虚拟区域法 求解非线性障碍问题*

饶 玲

(南京理工大学 理学院 数学系, 南京 210094)

摘要: 讨论了二阶半线性椭圆方程障碍问题的数值求解问题.用单调迭代算法求解障碍问题,并用改进的虚拟区域法求解相关的不规则区域上具有 Dirichlet 边界条件的椭圆方程.在计算过程中,传统的有限元离散会导致用扩展区域规则网格计算不规则物体边界上积分的困难.为了克服此困难,给出了一种新的基于有限差分的算法,从而使得偏微分快速算法可用.算法结构简单,易于编程实现.对有扩散和增长障碍的 logistic 人口模型数值模拟说明算法可行且高效.

关键词: 虚拟区域法; 非线性障碍问题; 变分不等式

中图分类号: O357.41

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380109

引 言

非线性障碍问题又称为非线性自由边界问题.障碍问题的计算区域通常分成两个子域,控制方程(偏微分方程)只在其中一个子域上成立,在另一子域上解应满足一定的限制条件.两子域的交界(自由边界)位置预先并不知道,而需要与问题的解一同求出.障碍问题存在于许多工程问题中,如薄膜障碍、水坝渗流及亚音速绕流等问题.非线性障碍问题的变分原理由变分不等式所描述,相关理论可见文献[1-3].由于自由边界预先未知而使得非线性障碍问题的数值求解极为复杂.过去几十年来,已有一些计算方法用于求解非线性障碍问题^[4-9].但如何提高计算效率仍有待研究.本文旨在给出一种新的高效计算非线性障碍问题数值解的算法.

在文献[10]中, Korman 等讨论了二阶非线性椭圆方程的障碍问题,证明了解的存在、唯一和正则性.他们还给出了问题的单调迭代算法,并将算法用于求解有扩散和增长障碍的 logistic 人口模型的稳定问题.对于不规则区域上障碍问题,通常将问题转换成变分不等式,再考虑用有限元方法求数值解.但这样做由于计算区域不规则,网格生成复杂,不规则区域及其边界上数值积分将导致计算困难,从而增加了计算的复杂性.当求解区域为规则的方形区域时,易于建立规则网格,且对应的偏微分方程可用差分方法直接离散后求解,所以障碍问题无需转换成变分形式.差分方法算法简单,通常离散后的差分方程还可利用快速算法求解,提高了计算速度.文献[11]的算法也需用差分方法实现.本文研究对于不规则的求解区域,如何改进算法,使得差分方法依然可行,并将近几十年来流行的求解偏微分方程的虚拟区域法用于文献[10]中单调迭代过程,从而使得差分方法依然可用于求解区域不规则的障碍问题的数值计算.

* 收稿日期: 2017-04-24; 修订日期: 2017-08-09

作者简介: 饶玲(1968—),女,副教授,博士(E-mail: lingrao@sina.com).

虚拟区域法有时亦称区域内嵌法 (domain embedding method), 它把实际的求解区域延拓到所求物体的内部 (或外部) 的所谓虚拟区域, 形成一简单的辅助求解区域, 其上可以采用相对结构化的网格, 如均匀划分的矩形网格, 因而可用快速算法, 倍受人们关注^[12]. 目前, 国际上流行的虚拟区域法主要区别在于物体边界条件的处理上, 大体可以分为两类: 一类是通过移动邻近物体边界的结构网格点, 形成一主体结构、局部贴体的网格, 其上满足边界条件; 另一类是保持网格点不动, 把物体边界条件作为约束条件, 通过引入一 Lagrange 乘子而得到弱满足^[13]. 相比之下, 基于 Lagrange 乘子的虚拟区域法, 虽然物面边界条件得到弱满足, 但方法结构简单, 尤其是当物体运动时, 避免了物体位置变换导致网格需不断重建的麻烦.

本文第 1 节将介绍非线性障碍问题及文献[10]中的计算方法, 并进行数值模拟. 第 2 节将虚拟区域法用于文献[10]中单调迭代过程, 给出改进算法. 第 3 节将改进的算法用于不规则区域上非线性障碍问题的数值计算, 以验证算法的有效性.

1 非线性障碍问题及其单调迭代算法

本文中 $C^{k,\alpha}(\Omega)$ 表示 Hölder 空间, $W^{m,p}(\Omega)$ 表示 Sobolev 空间 (详见文献[14]), 算子 L 定义如下:

$$Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

将讨论非线性障碍问题:

$$\begin{cases} Lu \leq f(x, u), \\ u \leq q(x), \\ (Lu - f(x, u))(u - q) = 0, \end{cases} \quad \text{a.e. in } \Omega; \quad (1a)$$

$$u = g(x), \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (1b)$$

其中 Ω 是 R^n 中的有界区域, 设 L 是系数在 $C^\alpha(\Omega)$ 中的一致椭圆算子, $q(x) \in C^2(\Omega)$, $g(x) \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. 在 $\partial\Omega$ 上, $g(x) < q(x)$, 且 $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

关于问题(1)解的存在、唯一和正则性研究结果可参见文献[10], 下面给出主要结论.

引理 1^[10] 除上述条件满足之外, 假设存在一个函数 $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ (下解), 使得

$$L\varphi \leq f(x, \varphi), \quad \varphi(x) \leq q(x), \quad \text{in } \Omega,$$

$$\varphi(x) \leq q(x), \quad \text{on } \partial\Omega,$$

且对于任意 $x \in \bar{\Omega}$ 及 u , $\varphi(x) \leq u \leq q(x)$, $f(x, u)$ 关于 x 为 α -Hölder 连续, 关于 u 满足 Lipschitz 条件, 则在 $W^{2,p}(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\Omega)$ 中问题(1)有一解 $u(x)$, 其中 p 任意. 令 $u^0 = q$, 并通过求解下列变分不等式 ($n = 0, 1, \dots$):

$$\begin{cases} Lu^{n+1} \leq f(x, u^n), \\ u^{n+1} \leq q(x), \\ (Lu^{n+1} - f(x, u^n))(u^{n+1} - q) = 0, \end{cases} \quad \text{a.e. in } \Omega; \quad (2a)$$

$$u^{n+1} = g(x), \quad \text{on } \partial\Omega \quad (2b)$$

得函数列 $\{u^n(x)\}$, $\{u^n(x)\}$ 单调递减, 即

$$u^0 \geq u^1 \geq u^2 \geq \dots,$$

并且收敛于问题(1)的一个最大解. □

引理 1 说明非线性障碍问题(1)可通过求解线性障碍问题(2)迭代得近似解. 称此解法为

单调迭代法.若 $g(x) = 0, L = -\Delta$, 对每个 n , 可用下述鞍点搜索算法的对偶形式(见文献[15])求解方程(2).

对每个 n , 通过下列步骤得函数列 $\{v^m(x)\}$: 任给 $\lambda^0 \in L^2_+(\Omega)$ (如 $\lambda^0 = 0$),

$$\begin{cases} -\Delta v^{m+1} = f(x, u^n) + \lambda^m, & \text{in } \Omega, \\ v^{m+1} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

则 $\lambda^{m+1} = (\lambda^m - \rho(q - v^{m+1}))^+$, 其中 ρ 为一常数, 其选取方法见文献[15]. 迭代到精度满足要求时, 取 $u^{n+1} = v^m$.

从上述解法可看出问题(1)的求解最终归结为求解一系列满足 Dirichlet 边界条件的椭圆方程(3). 若 Ω 为矩形, 其上可以采用均匀划分的直角坐标矩形网格, 因而可以用有限差分法求解方程(3), 用快速算法(如循环约简法)求解离散后差分方程.

利用上述方法对有扩散和增长障碍的 logistic 人口模型进行了数值模拟. 设 $u(x)$ 表示在 $x \in \Omega$ 处的人口密度. a 为常数, 表示人口出生率, 并假设有种群增长障碍, 即有 $q(x) \in C^2(\bar{\Omega}), q(x) > 0, x \in \Omega$, 满足 Ω 内 $u(x) \leq q(x)$. 要求 $u(x) > 0$ 满足下列变分不等式:

$$-\Delta u \leq u(a - u), \quad \text{in } \Omega, \quad (4)$$

$$(\Delta u + u(a - u))(u - q) = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (5)$$

$$\begin{cases} u \leq q, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6)$$

当 a 足够大时, 式(4)~(6)有唯一正解(见文献[10]). 取 $a = 40, q = 1, \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, 用上述单调迭代方法求模型的数值解. 在迭代过程中, 因为 Ω 为矩形, 用有限差分方法求解方程(3), 离散后代数方程用快速算法(如循环约简法)求解. 数值解如图 1 所示.

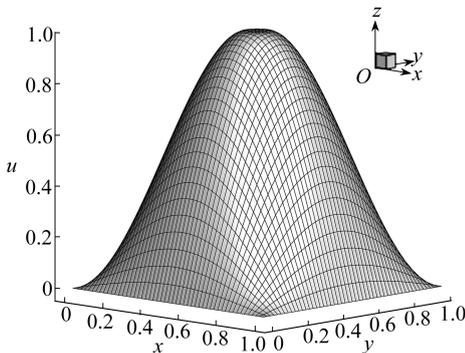


图 1 数值解分布图

Fig. 1 The distribution of the numerical solution

2 不规则区域上非线性障碍问题的计算方法

若 Ω 为不规则区域, 则其上不能建立矩形网格, 因而无法直接用差分方法求解方程(3). 本节简单介绍用于求解方程(3)的改进的虚拟区域方法, 详见文献[16].

求 u 满足下面一般形式的具有 Dirichlet 边界条件的椭圆方程:

$$\begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = g_0, & \text{on } \gamma, \end{cases} \quad (7)$$

其中 γ 表示 Ω 的边界, 常数 $\alpha \geq 0, \nu > 0, g_0, f$ 为已知函数, $g_0 \in H^{1/2}(\gamma), f \in L^2(\Omega)$.

虚拟区域法把实际求解区域 Ω 延拓到所求物体外部的所谓虚拟区域 ω , 形成一矩形辅助求解区域 $\bar{B} = \bar{\Omega} \cup \bar{\omega}$ (如图 2(a)). 其上满足

$$\begin{cases} \alpha \bar{u} - \nu \Delta \bar{u} = \bar{f}, & \text{in } B, \\ \bar{u} = g_0, & \text{on } \gamma, \\ \bar{u} = g_1, & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\Gamma = \partial B$, \bar{f} 是 f 向虚拟区域的延拓, 即 $\bar{f}|_{\Omega} = f$, 可以任取 $g_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$. 注意到: $u = \bar{u}|_{\Omega}$ 满足方程(7).

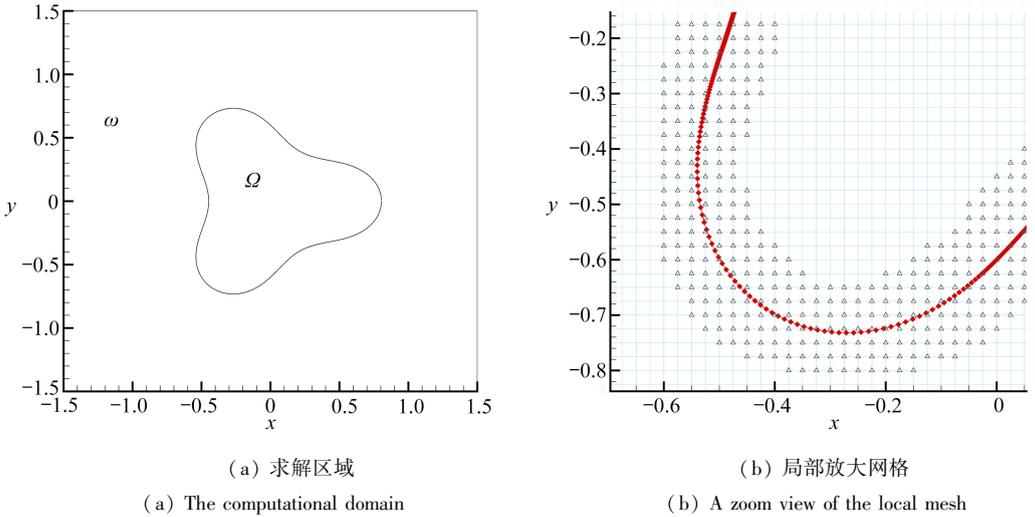


图 2 求解区域及其网格

Fig. 2 The computational domain and its mesh

问题(8)中物体边界 γ 上的条件可作为约束条件, 通过引入一 Lagrange 乘子 λ 而得到弱满足. 问题(8)有如下等价的变分形式 (见文献[13]):

寻找 $\bar{u} \in \bar{V}_g, \lambda \in L^2(\gamma)$, 使得

$$\begin{cases} a_B(\bar{u}, z) = \int_B \bar{f} z ds + \int_{\gamma} \lambda z d\gamma, & \forall z \in \bar{V}_0, \\ \int_{\gamma} \mu(\bar{u} - g_0) d\gamma = 0, & \forall \mu \in L^2(\gamma), \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\bar{V}_g = \{z | z \in H^1(B), z = g_1 \text{ on } \Gamma\}, \bar{V}_0 = \{z | z \in H^1(B), z = 0 \text{ on } \Gamma\}$, 双线性形式 $a_B(\bar{u}, z) = \int_B (\alpha \bar{u} z + \nu \nabla \bar{u} \cdot \nabla z) ds$.

通常采用基于有限元离散的共轭梯度法求解方程(9). 矩形 B 用直角网格剖分, 并通过移动邻近 γ 的结构网格点, 形成局部贴体的网格. 网格构造麻烦, 且要遇到不规则边界 γ 上积分的困难. 本文用文献[16]中改进的共轭梯度法求解方程(9). 方法主要是在离散过程采用 Dirac (狄拉克) 函数处理边界上的积分. 方法描述如下 (详见文献[16]). 在 \bar{B} 上构造矩形网格 (亦称作 Euler 网格):

$$\bar{B}_h = \{x_{ij} | x_{ij} = (x_0 + ih, y_0 + jh), 0 \leq i, j \leq I\},$$

其中 h 为网格宽度, 方便起见, 小矩形长宽都设为 h . 假设简单闭曲线 γ 的参数方程为 $\mathbf{X}(s), 0 \leq s \leq l$, 边界 γ 用 Lagrange 网格剖分, Lagrange 网格节点集为 $\{X_k \in \gamma, 0 \leq k \leq N\}$, 节点间距通常取为 $\Delta s = h/2$, 边界上 Lagrange 网格与 B 上 Euler 网格彼此独立, 边界变动无需重建 Euler 网格, 这点尤其适合运动物体的计算. 网格构造如图 2(b) 所示.

设 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac 函数. 在以下计算过程中, δ 的离散形式为 δ_h , 其定义由下式给出 (见文献[17]):

$$\delta_h(\mathbf{x}) = d_h(x) d_h(y),$$

其中

$$d_h(z) = \begin{cases} \frac{0.25}{h} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \right], & |z| \leq 2h, \\ 0, & |z| > 2h. \end{cases}$$

算法 1

第零步 初始化

① 给一初始猜测 $\lambda^0 \in L^2(\gamma)$, 把 Lagrange 点 $\{X_k\}$ 上 λ^0 的值由下式分布到附近的 Euler 点 x_{ij} 上:

$$R^0(x_{ij}) = \sum_k \lambda_k^0 \delta_h(x_{ij} - X_k) \Delta s, \quad \forall x_{ij} \in B_h. \tag{10}$$

② 求边界 γ 附近 Euler 点上的值 $\bar{u}_0 \in \bar{V}_g$:

$$\alpha \bar{u}_0 - \nu \Delta \bar{u}_0 = \bar{f} + R^0, \quad \text{in } B, \tag{11}$$

其中

$$R^0(x) = \int_0^l \lambda^0(s) \delta(x - X(s)) ds, \quad \forall x \in B, \tag{12}$$

式(12)的离散形式为式(10).

③ 由下式计算 \bar{u}^0 在 Lagrange 点 X_k 上的值:

$$\bar{u}_k^0 = \sum_{ij} \bar{u}_{ij}^0 \delta_h(x_{ij} - X_k) h^2, \quad \forall 1 \leq k \leq N. \tag{13}$$

④ 由下式计算 g^0 在 Lagrange 点 X_k 上的值:

$$g_k^0 = \bar{u}_k^0 - g_{0k}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

⑤ 赋初始下降方向:

$$w_k^0 = g_k^0, \quad 1 \leq n \leq N.$$

由 λ^n, g^n 和 ω^n , 可计算 $\lambda^{n+1}, \omega^{n+1}$ 和 g^{n+1} 如下.

第一步 寻找下降方向

① 由下式把 γ 上 Lagrange 点的值 ω^n 分布到 Euler 点上:

$$W^n(x) = \int_0^l \omega^n(s) \delta(x - X(s)) ds, \quad \forall x \in B, \tag{14}$$

其离散形式为

$$W^n(x_{ij}) = \sum_k \omega_k^n \delta_h(x_{ij} - X_k) \Delta s, \quad \forall x_{ij} \in B_h. \tag{15}$$

② 由下式求边界 γ 附近 Euler 点上的值 $\tilde{u}^n \in \bar{V}_0$:

$$\alpha \tilde{u}^n - \nu \Delta \tilde{u}^n = W^n, \quad \text{in } B. \tag{16}$$

③ 由下式把 γ 附近的 Euler 点上 \tilde{u}^n 的值分布到 Lagrange 点上:

$$\tilde{u}^n(X(s)) = \int_{\hat{\Omega}} \tilde{u}^n(x) \delta(x - X(s)) dx, \tag{17}$$

其离散形式为

$$\tilde{u}_k^n = \sum_{ij} \tilde{u}_{ij}^n \delta_h(x_{ij} - X_k) h^2, \quad \forall 1 \leq k \leq N. \tag{18}$$

④ 计算 ρ_n :

$$\rho_n = \int_{\gamma} |g^n|^2 d\gamma / \int_{\gamma} \tilde{u}^n \omega^n d\gamma,$$

其离散形式为

$$\rho_n = \frac{\sum_k |g_k^n|^2 \Delta s}{\sum_k \tilde{u}_k^n w_k^n \Delta s}.$$

⑤ 令

$$\lambda_k^{n+1} = \lambda_k^n - \rho_n w_k^n, \quad 1 \leq n \leq N.$$

⑥ 计算新梯度方向 g^{n+1} :

$$g_k^{n+1} = g_k^n - \rho_k^n \tilde{u}_k^n, \quad 1 \leq k \leq N.$$

第二步 构造收敛准则,更新下降方向.对预先给定的足够小的 $\varepsilon \geq 0$, 如果

$$\int_\gamma |g^{n+1}|^2 d\gamma / \int_\gamma |g^0|^2 d\gamma \leq \varepsilon,$$

也即

$$\sum_k |g_k^{n+1}|^2 \Delta s / \sum_k |g_k^0|^2 \Delta s \leq \varepsilon,$$

则在 Lagrange 点上取 $\lambda = \lambda^{n+1}$, 并求解下述方程得方程(9) 的解 $\bar{u} \in \bar{V}_g$:

$$\alpha \bar{u} - \nu \Delta \bar{u} = \bar{f} + R, \quad \text{in } B, \quad (19)$$

其中

$$R(x) = \int_0^l \lambda(s) \delta(x - X(s)) ds, \quad \forall x \in B.$$

其离散形式为

$$R(x_{ij}) = \sum_k \lambda_k \delta_h(x_{ij} - X_k) \Delta s, \quad \forall x_{ij} \in B_h. \quad (20)$$

否则计算

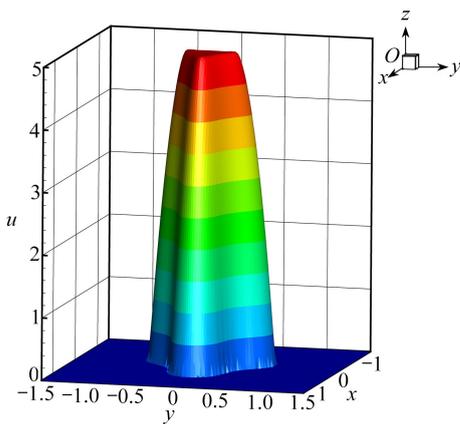


图3 数值解等高曲面

Fig. 3 The contour curves of the numerical solution

$$\gamma_n = \sum_k |g_k^{n+1}|^2 / \sum_k |g_k^n|^2,$$

$$w_k^{n+1} = g_k^{n+1} + \gamma_n w_k^n, \quad 1 \leq k \leq N.$$

置 $n = n + 1$, 返回第一步.

以上算法中,方程(10)、(13)、(15)、(18)和(20)都用 Dirac 函数实现 Lagrange 点与边界附近 Euler 点上函数值的转换.根据 Dirac 函数的定义,只要用边界附近 Euler 网格点上的函数值,即可得到边界上 Lagrange 点的函数值,反之亦然.矩形 B 上的差分方程(11)、(16)和(19)可用快速 Fourier 变换或循环约简法求解,且只需计算边界附近的 Euler 点上函数值即可.这样处理与通常有限元方法比较极大节省了内存,加快了计算速度.

3 数值模拟

当 Ω 为不规则区域时,利用改进的虚拟区域方法对 logistic 人口模型(4)~(6)进行数值模拟,取 $a = 30, q = 5$.图 2(a)为求解区域 Ω 及扩大后区域 $\bar{B} = [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$. \bar{B} 上

Euler 矩形网格取 120×120 个节点.图 2(b) 是边界附近局部放大的 Lagrange 网格、Euler 网格及计算过程用到的 Euler 网格节点.在 B 的边界上,取 $g_1 = 0$.用第 1 节中单调迭代方法求解方程(4)~(6)时,反复用算法 1 求解方程(3).计算在 PC 计算机上运行,计算机处理器为 2.30 GHz,内存为 2.0 GB RAM,完成计算耗时约为 4.5 min,得到数值解 u 的等高面见图 3.从图形可看出计算结果满足边界条件及增长限制不等式(6).数值模拟说明,上述单调迭代结合改进的虚拟区域法求解人口模型可行且高效.

4 结 论

本文给出了一种基于单调迭代结合改进的虚拟区域法求解不规则区域上障碍问题的算法.数值模拟说明算法可行且高效.还可以进一步研究利用虚拟区域方法求其他力学与物理学中的不规则区域上变分不等方程的数值解的方法.

参考文献(References):

- [1] 张石生. 变分不等式及其相关问题[M]. 重庆: 重庆出版社, 2008. (ZHANG Shisheng. *Variational Inequalities and the Relevant Problems* [M]. Chongqing: Chongqing Press, 2008. (in Chinese))
- [2] DUVAUT G, LIONS J L. *Inequalities in Mechanics and Physics* [M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1976.
- [3] KINDERLENHRER D, STANPACCHIA G. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications* [M]. New York: Academic Press, 1980.
- [4] GLOWINSKI R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems* [M]. New York: Springer Verlag, 1984.
- [5] CHAN Hsinfang, FAN Chiaming, KUO Chiasen. Generalized finite difference method for solving two-dimensional non-linear obstacle problems[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2013, **37**(9): 1189-1196.
- [6] GLOWINSKI R, KUZNETSOV Y A, PAN T W. A penalty/Newton/conjugate gradient method for the solution of obstacle problems[J]. *Comptes Rendus Mathematique*, 2003, **336**(5): 435-440.
- [7] 郑铁生, 李立, 许庆余. 一类椭圆型变分不等式离散问题的迭代算法[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(4): 329-335. (ZHENG Tiesheng, LI Li, XU Qingyu. An iterative method for the discrete problems of a class of elliptical variational inequalities [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, **16**(4): 329-335. (in Chinese))
- [8] 刘丹阳, 蒋娅. 混合向量变分不等式标量化及间隙函数误差界[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(6): 715-726. (LIU Danyang, JIANG Ya. Scalarization of mixed vector variational inequalities and error bounds of gap functions [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(6): 715-726. (in Chinese))
- [9] 郑宏, 刘德富, 李焯芬, 等. 一个新的有自由面渗流问题的变分不等式提法[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(3): 363-371. (ZHENG Hong, LIU Defu, LEE C F, et al. New variational inequality formulation for seepage problems with free surfaces [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, **26**(3): 363-371. (in Chinese))
- [10] KORMAN P, LEUNG A W, STOJANOVIC S. Monotone iterations for nonlinear obstacle problem [J]. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1990, **31**(3): 259-276.
- [11] PAO C V. Accelerated monotone iterations for numerical solutions of nonlinear elliptic boundary value problems [J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2003, **46**(10/11):

- 1535-1544.
- [12] HE J W. Fictitious domain methods in fluid mechanics applications to unsteady potential flows over moving bodies[D]. PhD Thesis. Paris: University Paris 6, 1994.
- [13] GLOWINSKI R, PAN T W, PERIAUX J. A one shot domain decomposition/fictitious domain method for the solution of elliptic equations[M]//*Parallel Computational Fluid Dynamics: New Trends and Advances*. Elsevier Science, 1993.
- [14] GILBARG D, TRUDINGER N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*[M]. New York: Springer Verlag, 1977.
- [15] GLOWINSKI R, LIONS J L, TRÉMOLIÈRES R. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*[M]. New York: North-Holland Publishing Company, 1976.
- [16] CHEN Hongquan, RAO Ling. The technique of the immersed boundary method: applications to the numerical solutions of incompressible flows and wave scattering [J]. *Modern Physics Letters B*, 2009, **23**(3): 437-440.
- [17] ENRIQUEZ-REMIGIO S A, ROMA A M. Incompressible flows in elastic domains: an immersed boundary method approach[J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2005, **29**(1): 35-54.

Monotone Iterations Combined With Fictitious Domain Methods for Numerical Solution of Nonlinear Obstacle Problems

RAO Ling

(Department of Mathematics, School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, P.R.China)

Abstract: The numerical solution of obstacle problems with 2nd-order semilinear elliptic partial differential equations (PDEs) was addressed. The nonlinear obstacle problem was solved with the monotone iteration method, and the adjoint elliptic differential equations with the Dirichlet boundary conditions on irregular domains were solved with the fictitious domain method. In the calculation process, the conventional finite element discretization resulted in the trouble of computing integrals on the irregular body boundaries with the regular mesh of the extended domain. To overcome this difficulty, a new algorithm was designed based on the finite difference method allowing the use of fast solvers for PDEs. The proposed algorithm has a simple structure and is easily programmable. The numerical simulation of a steady state problem of the logistic population model with diffusion and obstacle to growth shows that the proposed method is feasible and efficient.

Key words: fictitious domain method; nonlinear obstacle problem; variational inequality

引用本文/Cite this paper:

饶玲. 单调迭代结合虚拟区域法求解非线性障碍问题[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(4): 485-492.
 RAO Ling. Monotone iterations combined with fictitious domain methods for numerical solution of nonlinear obstacle problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 485-492.