文章编号:1000-0887(2018)05-0611-20


# 具有时空时滞的非局部扩散 SIR 模型的行波解*

邹　霞

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

**摘要：** 针对种群中的染病个体在疾病潜伏期内具有自由移动和传染疾病的现象, 研究了一个具有时空时滞的非局部扩散 SIR 模型的行波解问题.利用基本再生数和最小波速判定行波解是否存在.首先, 通过在有界区域上构造一个初始函数的不变锥, 利用 Schauder 不动点定理证明在该锥上存在不动点, 然后通过取极限的方法得到行波解的存在性.其次, 利用双边 Laplace(拉普拉斯)变换法证明了行波解的不存在性.由于行波解的最小传播速度对控制疾病传播具有重要的指导意义, 最后讨论了非局部扩散、时滞等因素对最小波速的影响.

**关 键 词：** 非局部扩散； 行波解； SIR 模型； Schauder 不动点定理

**中图分类号：** O175.14　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.380118

## 引　　言

传染病历来危害着人类的健康, 为有效预防和控制疾病传播, 常通过建立传染病模型来研究问题.1927 年,Kermack 和 Mckendrick[1-2] 提出了经典的 SIR“仓室”模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI,\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \gamma I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $S$, $I$, $R$ 分别表示易感者、染病者和移出者的密度, $\beta$ 是传播系数, $\gamma$ 是恢复率.该模型中假设人口是均匀分布的并且传播过程是瞬时完成的.但是在现实生活中, 许多传染病随着种群成员流动而扩散, 故需考虑空间因素的影响[3-5].例如 Hosono 和 Llyas[4] 考虑了下面模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \Delta S(x,t) - \beta S(x,t)I(x,t), \\ \dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t} = d\Delta I(x,t) + \beta S(x,t)I(x,t) - \gamma I(x,t), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\Delta$ 是 Laplace 算子,表示扩散过程, $d$ 是感染个体的扩散系数.他们得出当 $S(x,0)=S_0$ 为常数且 $\beta S_0/\gamma > 1$ 时, 对任意的 $c \geqslant c^* = 2\sqrt{d(\beta S_0 - \gamma)}$, 存在满足 $S(-\infty)=S_0 > S(+\infty)$ 且 $I(\pm\infty)=0$ 的行波解 $(S(x+ct),I(x+ct))$; 当 $\beta S_0/\gamma \leqslant 1$ 时, 模型(2)不存在行波解.其中 $R_0$

* **收稿日期：** 2017-05-02；**修订日期：** 2018-04-01
**基金项目：** 国家自然科学基金(11671315)
**作者简介：** 邹霞(1989—),女,硕士(E-mail：17792543182@163.com).

$=\beta S_0/\gamma$ 可作为决定疾病是否消亡的一个阈值[1]，称为基本再生数.

在传染病模型中，经常用到的发生率是线性发生率 $\beta SI$，其适用于宿主人口密度低的情况.但在疾病的实际传播过程中，传播形式可能是多样的[6].如 Wang 等[7]研究了以下的三维扩散模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t}=d_1\dfrac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2}-\dfrac{\beta S(x,t)I(x,t)}{S(x,t)+I(x,t)+R(x,t)},\\ \dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t}=d_2\dfrac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2}+\dfrac{\beta S(x,t)I(x,t)}{S(x,t)+I(x,t)+R(x,t)}-(\gamma+\delta)I(x,t),\\ \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t}=d_3\dfrac{\partial^2 R(x,t)}{\partial x^2}+\gamma I(x,t),\end{cases}\tag{3}$$

其中 $d_i>0(i=1,2,3)$ 表示扩散系数.研究得出,当

$$R_0:=\beta/(\gamma+\delta)>1,\ c>c^*=2\sqrt{d_2(\beta-\gamma-\delta)}$$

且 $d_3<2d_2/(1-\sqrt{1-c^{*2}/c})$ 时,模型(3)存在满足某些边界条件的行波解.由于个体的移动是随机和自由的，最近很多学者采用积分算子来描述物种或疾病的扩散现象[8].如 Yang 等[9]考虑了带有非局部扩散的传染病模型的行波解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t}=d_1(J*S(x,t)-S(x,t))-\dfrac{\beta S(x,t)I(x,t)}{S(x,t)+I(x,t)+R(x,t)},\\ \dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t}=d_2(J*I(x,t)-I(x,t))+\\ \qquad\dfrac{\beta S(x,t)I(x,t)}{S(x,t)+I(x,t)+R(x,t)}-(\gamma+\delta)I(x,t),\\ \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t}=d_3(J*R(x,t)-R(x,t))+\gamma I(x,t),\end{cases}\tag{4}$$

其中 $S(x,t),I(x,t),R(x,t)$ 分别表示 $x$ 位置处、$t$ 时刻的易感者，感染者及恢复者的密度；$J*S(x,t),J*I(x,t),J*R(x,t)$ 是关于空间 $x$ 的标准卷积；$J*S(x,t)-S(x,t),J*I(x,t)-I(x,t),J*R(x,t)-R(x,t)$ 分别表示由易感者、感染者、恢复者的扩散而导致的净增长率.为了使模型更加符合实际，Kendall[10]考虑了依赖于空间的积分微分方程.即将模型(1)中的 $\beta SI$ 换成具有积分形式的发生率：

$$\beta S(x,t)\int_{-\infty}^{+\infty}I(y,t)K(x-y)\mathrm{d}y,$$

其中核函数 $K(x-y)\geqslant 0$ 表示位置 $y$ 处的染病个体对位置 $x$ 处的易感个体的影响且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}K(y)\mathrm{d}y=1$.另外，时滞的影响在分析疾病传播过程中也是不可忽视的[11-14].

综合考虑上述因素，本文将考察一个具有时空时滞的非局部扩散 SIR 传染病模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial t}=d_1(J*S(x,t)-S(x,t))-\dfrac{\beta S(x,t)G*I(x,t)}{S(x,t)+G*I(x,t)+R(x,t)},\\ \dfrac{\partial I}{\partial t}=d_2(J*I(x,t)-I(x,t))+\\ \qquad\dfrac{\beta S(x,t)G*I(x,t)}{S(x,t)+G*I(x,t)+R(x,t)}-(\gamma+\delta)I(x,t),\\ \dfrac{\partial R}{\partial t}=d_3(J*R(x,t)-R(x,t))+\gamma I(x,t),\end{cases}\tag{5}$$

其中

$$G*I(x,t)=\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)I(x-y,t)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

$H>0$ 是疾病的潜伏时间，表示易感者受到感染后变为感染者的最长潜伏时间[15-16]；$G(y,s)$ 表示位置 $y$ 处、$t-s$ 时刻的感染者对位置 $x$ 处、$t$ 时刻的易感者的影响[17-18].假设核函数 $J(x)$，$G(x)$ 满足下面的条件：

（A1）$J\in C^1(\mathbf{R})$，$J(x)=J(-x)\geqslant 0$，$\int_{\mathbf{R}}J(x)\mathrm{d}x=1$ 且 $J$ 具有紧支集.

（A2）对 $\forall(y,s)\in\mathbf{R}\times[0,H]$，$G(y,s)$ 是非负可积函数且关于变量 $y$ 是 Lipschitz 连续的.满足

$$G(y,s)=G(-y,s)\geqslant 0,\ \int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s=1.$$

另外对每个 $c\geqslant 0$，都存在 $\mu_c\in(0,+\infty]$，使得当 $\mu\in[0,\mu_c)$ 时，

$$\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)\mathrm{e}^{-\lambda(y+cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s<+\infty.$$

本文主要考虑系统(5)行波解的存在性和不存在性.受文献[19-20]的启发，当 $R_0:=\beta/(\gamma+\delta)>1,c>c^*$ 时($c^*$ 的定义见引理 1)，通过在有界区域上构造一个初始函数的不变锥，利用 Schauder 不动点定理证明在该锥上存在不动点，然后通过取极限的方法得到行波解的存在性.当 $R_0\leqslant 1$ 或是 $R_0>1,0<c<c^*$ 时，利用 Laplace 变换法得出系统行波解的不存在性.由于行波解的最小传播速度对控制疾病传播具有重要的指导意义，最后讨论了非局部扩散、时滞等因素对最小波速的影响.

## 1 行波解的存在性

本节给出系统(5)行波解的存在性的证明，即寻找形如 $(S(x+ct),I(x+ct),R(x+ct))$ 的解.令 $\xi=x+ct$，可得系统(5)的行波方程：

$$\begin{cases}cS'(\xi)=d_1(J*S(\xi)-S(\xi))-\dfrac{\beta S(\xi)G*I(\xi)}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)},\\ cI'(\xi)=d_2(J*I(\xi)-I(\xi))+\dfrac{\beta S(\xi)G*I(\xi)}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)}-(\gamma+\delta)I(\xi),\\ cR'(\xi)=d_3(J*R(\xi)-R(\xi))+\gamma I(\xi),\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$J*S(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)S(\xi-y)\mathrm{d}y,\ J*I(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)I(\xi-y)\mathrm{d}y,$$

$$J*R(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)R(\xi-y)\mathrm{d}y,\ G*I(\xi)=\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)I(\xi-y-cs)\mathrm{d}y\mathrm{d}s.$$

假设初始平衡点为 $(S_0,0,0)$，其中 $S_0>0$.考虑模型(6)满足以下边界条件的非负解：

$$S(-\infty)=S_0,\ \lim_{\xi\to+\infty}S(\xi):=S_\infty<S_0,\ I(\pm\infty)=0,\ R(-\infty)=0,$$

另外，若 $R$ 是有界的，则 $\lim_{\xi\to+\infty}R(\xi)$ 存在且 $R(+\infty)=\gamma(S_0-S_\infty)/(\gamma+\delta)$.

首先，对 $\forall\lambda,c>0$，定义函数：

$$f(\lambda,c)=d_2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y-1\right)-c\lambda+\beta\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)\mathrm{e}^{-\lambda(y+cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s-\gamma-\delta.$$

经过简单的计算可得：对任意给定的 $c>0$，

$$f(0,c)=\beta-\gamma-\delta>0,\ f(+\infty,c)=+\infty,$$

$$\left.\frac{\partial f(\lambda,c)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=-c\left[1+\beta\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}sG(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]<0,$$

$$\frac{\partial^2 f(\lambda,c)}{\partial\lambda^2}=d_2\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)y^2\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y+\beta\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)(y+cs)^2\mathrm{e}^{-\lambda(y+cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s>0.$$

另外,对给定的 $\lambda>0$, 有

$$f(\lambda,0)=d_2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y-1\right)+\beta\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y\mathrm{d}s-\gamma-\delta>0,$$

$$\frac{\partial f(\lambda,c)}{\partial c}=-\lambda-\lambda\beta\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)\mathrm{e}^{-\lambda(y+cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s<0,\ f(\lambda,+\infty)=-\infty.$$

因此可以得出:

**引理 1** 假设 $R_0:=\beta/(\gamma+\delta)>1$.则存在 $c^*>0$ 和 $\lambda^*>0$, 使得

$$\left.\frac{\partial f(\lambda,c)}{\partial\lambda}\right|_{(\lambda^*,c^*)}=0 \text{ 且 } f(\lambda^*,c^*)=0$$

成立.并且有下列结论:

(i) 当 $c>c^*$ 时, 方程$f(\lambda,c)=0$有两个实根$\lambda_1(c)$, $\lambda_2(c)$, 且$0<\lambda_1(c)<\lambda^*<\lambda_2(c)<+\infty$.当 $\lambda\in(\lambda_1(c),\lambda_2(c))$ 时, $f(\lambda,c)<0$; 当 $\lambda\in(0,\lambda_1(c))\cup(\lambda_2(c),+\infty)$ 时, $f(\lambda,c)>0$.

(ii) 当 $0<c<c^*$ 时, 对 $\forall\lambda>0$, 都有$f(\lambda,c)>0$.

本节的主要结论如下:

**定理 1** 假定条件(A1)、(A2)且 $R_0>1$ 成立.

(i) 对 $\forall c>c^*$, 方程(5) 存在一个行波解$(S(\xi),I(\xi),R(\xi))$, 满足

$$S(-\infty)=S_0,\ S(+\infty):=S_\infty<S_0,\ I(\pm\infty)=0,\ R(-\infty)=0.$$

(ii) 若 $\limsup_{\xi\to+\infty}R(\xi)<+\infty$, 则$\lim_{\xi\to+\infty}R(\xi)=\gamma(S_0-S_\infty)/(\gamma+\delta)$.

(iii) 若 $c>\max\{c^*,(3/2)d_3m_1\}$,其中 $m_1:=\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)|y|\mathrm{d}y$,则$\limsup_{\xi\to+\infty}R(\xi)<+\infty$.

构造另一个函数:

$$\Delta(\lambda,c)=c\lambda-d_3\left(\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y-1\right).$$

因为

$$\left.\frac{\partial\Delta(\lambda,c)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=c,\ \frac{\partial^2\Delta(\lambda,c)}{\partial\lambda^2}=-d_3\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)y^2\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y<0,\ \Delta(0,c)=0.$$

则可得,存在 $\lambda_0>0$, 当 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 时, $\Delta(\lambda,c)>0$.

下面总是假设 $R_0>1,c>c^*$, 为了书写简单, 用$\lambda_i$ 表示 $\lambda_i(c)(i=1,2)$.定义连续函数:

$$S_+(\xi)=S_0,\ S_-(\xi)=\max\{S_0-\sigma\mathrm{e}^{\alpha_1\xi},\ \varepsilon\mathrm{e}^{-\alpha_2\xi}\},$$

$$I_+(\xi)=\min\left\{\mathrm{e}^{\lambda_1\xi},\frac{\beta-\gamma-\delta}{\gamma+\delta}S_0\right\},$$

$$I_-(\xi)=\max\{\mathrm{e}^{\lambda_1\xi}(1-M\mathrm{e}^{\eta\xi}),\ 0\},$$

$$R_+(\xi)=M_1\mathrm{e}^{\eta\xi},\ R_-(\xi)=0,$$

其中, $\sigma$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\eta$, $M$ 和 $M_1$ 都是待定的正常数, $\eta\in(0,\lambda_0)$ 足够小且满足 $\eta<\max\{\lambda_1,\lambda_2-\lambda_1\}$.

**引理 2** 函数 $I_+(\xi)$ 满足

$$cI'_+(\xi) \geqslant d_2(J*I_+(\xi) - I_+(\xi)) + \frac{\beta S_+(\xi)G*I_+(\xi)}{S_+(\xi) + G*I_+(\xi) + R_-(\xi)} - (\gamma+\delta)I_+(\xi), \tag{7}$$

其中 $\xi \neq \dfrac{1}{\lambda_1}\ln\dfrac{(\beta-\gamma-\delta)S_0}{\gamma+\delta}$.

**证明** 由于 $\dfrac{\beta S_+(\xi)G*I_+(\xi)}{S_+(\xi)+G*I_+(\xi)+R_-(\xi)} \leqslant \beta G*I_+(\xi)$, 故只需证明

$$cI'_+(\xi) \geqslant d_2(J*I_+(\xi) - I_+(\xi)) + \beta G*I_+(\xi) - (\gamma+\delta)I_+(\xi)$$

成立.由 $J,G$ 及 $I_+(\xi)$ 的定义可知

$$J*I_+(\xi) \leqslant \min\left\{ e^{\lambda_1\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)e^{-\lambda_1 y}dy, \frac{(\beta-\gamma-\delta)S_0}{\gamma+\delta}\right\},$$

$$G*I_+(\xi) \leqslant \min\left\{ e^{\lambda_1\xi}\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty} G(y,s)e^{-\lambda_1(y+cs)}dyds, \frac{(\beta-\gamma-\delta)S_0}{\gamma+\delta}\right\}.$$

当 $\xi < \xi_0 := \dfrac{1}{\lambda_1}\ln\dfrac{(\beta-\gamma-\delta)S_0}{\gamma+\delta}$ 时, 有

$$\begin{aligned} c\lambda_1 e^{\lambda_1\xi} = e^{\lambda_1\xi}\Bigg[ & d_2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)e^{-\lambda_1 y}dy - 1\right) + \\ & \beta\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty} G(y,s)e^{-\lambda_1(y+cs)}dyds - \gamma - \delta\Bigg] \geqslant \\ & d_2(J*I_+(\xi) - I_+(\xi)) + \beta G*I_+(\xi) - (\gamma+\delta)I_+(\xi); \end{aligned}$$

当 $\xi > \xi_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\beta S_+(\xi)G*I_+(\xi)}{S_+(\xi)+G*I_+(\xi)+R_-(\xi)} - (\gamma+\delta)I_+(\xi) \leqslant \\ & \quad \frac{\beta S_0(\beta-\gamma-\delta)S_0/(\gamma+\delta)}{S_0 + (\beta-\gamma-\delta)S_0/(\gamma+\delta)} - (\gamma+\delta)\frac{(\beta-\gamma-\delta)S_0}{\gamma+\delta} = 0. \end{aligned}$$

综上可得式(7)成立.证毕. □

**引理 3** 函数 $R_+(\xi)$ 满足

$$cR'_+(\xi) \geqslant d_3(J*R_+(\xi) - R_+(\xi)) + \gamma I_+(\xi). \tag{8}$$

**证明** 因为 $\eta \in (0,\lambda_0)$, 则 $\Delta(\eta,c) > 0$.取 $M_1$ 足够大且满足

$$M_1 > \max\left\{ \frac{\gamma S_0(\beta-\gamma-\delta)}{(\gamma+\delta)\Delta(\eta,c)}e^{-\eta\xi_1}, \frac{\gamma}{\Delta(\eta,c)}e^{(\lambda_1-\eta)\xi_1}\right\}.$$

由 $R_+$ 的定义可知:对 $\forall\xi > \xi_0$, 只需证明

$$cM_1\eta e^{\eta\xi} \geqslant d_3M_1e^{\eta\xi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)e^{-\eta y}dy - 1\right] + \frac{\gamma(\beta-\gamma-\delta)}{\gamma+\delta}S_0$$

成立即可.故只要 $M_1$ 满足 $M_1 \geqslant \dfrac{\gamma S_0(\beta-\gamma-\delta)}{(\gamma+\delta)\Delta(\eta,c)}e^{-\eta\xi_1}$, 则式(8) 成立.当 $\xi < \xi_0$ 时, 只需证明

$$cM_1\eta e^{\eta\xi} \geqslant d_3M_1e^{\eta\xi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)e^{-\eta y}dy - 1\right] + \gamma e^{\lambda_1\xi},$$

即 $M_1e^{\eta\xi}\Delta(\eta,c) \geqslant \gamma e^{\lambda_1\xi}$.故当 $M_1$ 满足 $M_1 \geqslant \dfrac{\gamma}{\Delta(\eta,C)}e^{(\lambda_1-\eta)\xi_1}$ 时, 式(8)成立.证毕. □

**引理 4** 假设 $\alpha_1 < \lambda_1$，且 $\alpha_1$ 是足够小的正数，$\sigma > S_0$ 为足够大的正数，$\alpha_2 = \beta / c^*$，$\varepsilon$ 是相当小的正数使得 $S_0 - \sigma e^{\alpha_1 \xi} = \varepsilon e^{-\alpha_2 \xi}$ 有负实根，令 $\xi_1$ 是较大的一个负实根，则函数 $S_-(\xi)$ 满足

$$cS'_-(\xi) \leqslant d_1(J * S_-(\xi) - S_-(\xi)) - \frac{\beta S_-(\xi) G * I_+(\xi)}{S_-(\xi) + G * I_+(\xi) + R_-(\xi)}, \tag{9}$$

其中 $\xi \neq \xi_1$.

**证明** 若 $\xi < \xi_1$，则 $S_-(\xi) = S_0 - \sigma e^{\alpha_1 \xi}$，$I_+(\xi) \leqslant e^{\lambda_1 \xi}$，从而只需证明

$$cS'_-(\xi) \leqslant d_1(J * S_-(\xi) - S_-(\xi)) - \beta G * I_+(\xi).$$

由 $S_-$ 及 $I_+$ 的定义可知，只需证

$$cS'_-(\xi) \leqslant d_1 \left[ -\sigma e^{\alpha_1 \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{-\alpha_1 y} dy + \sigma e^{\alpha_1 \xi} \right] - \beta e^{\lambda_1 \xi} \int_0^H \int_{-\infty}^{+\infty} G(y,s) e^{-\lambda_1 (y+cs)} dy ds.$$

整理可得

$$\beta e^{(\lambda_1 - \alpha_1)\xi} \int_0^H \int_{-\infty}^{+\infty} G(y,s) e^{-\lambda_1 (y+cs)} dy ds \leqslant \sigma \left[ c\alpha_1 - d_1 \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{-\alpha_1 y} dy + d_1 \right].$$

由 $\alpha_1 < \lambda_1, \xi < \xi_1$ 可知，只需证明

$$\beta e^{(\lambda_1 - \alpha_1)\xi_1} \int_0^H \int_{-\infty}^{+\infty} G(y,s) e^{-\lambda_1 (y+cs)} dy ds \leqslant \sigma \left[ c\alpha_1 - d_1 \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{-\alpha_1 y} dy + d_1 \right].$$

令 $g(\alpha_1) = c\alpha_1 - d_1 \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{-\alpha_1 y} dy + d_1$，因为 $g(0) = 0$，$g'(0) = c + d_1 \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) y e^{-\alpha_1 y} dy > 0$，可知存在很小的 $\alpha_1 \in (0, \lambda_1)$，使得

$$c\alpha_1 - d_1 \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{-\alpha_1 y} dy + d_1 > 0.$$

所以，若选择 $\sigma \geqslant \dfrac{\beta e^{(\lambda_1 - \alpha_1)\xi_1} \int_0^H \int_{-\infty}^{+\infty} G(y,s) e^{-\lambda_1 (y+cs)} dy ds}{c\alpha_1 - d_1 \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{-\alpha_1 y} dy + d_1}$，则式(9)成立.

若 $\xi > \xi_1$，则 $S_-(\xi) = \varepsilon e^{-\alpha_2 \xi}$，此时只需证明

$$cS'_-(\xi) \leqslant d_1(J * S_-(\xi) - S_-(\xi)) - \beta S_-(\xi).$$

即证 $-c\alpha_2 \leqslant d_1 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{-\alpha_2 y} dy - 1 \right) - \beta$ 成立即可.因为 $\beta - c\alpha_2 = \beta(1 - c/c^*) < 0$ 且 $J$ 为对称函数，故有

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{\alpha_2 y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} J(y)(e^{\alpha_2 y} + e^{-\alpha_2 y}) dy \geqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty} J(y) dy = 2.$$

从而可得

$$\beta - c\alpha_2 \leqslant d_1 \int_{-\infty}^{+\infty} J(y) e^{-\alpha_2 y} dy - d_1$$

恒成立.因此当 $S_-(\xi) = \varepsilon e^{-\alpha_2 \xi}$ 时，式(9)成立.证毕. □

**引理 5** 函数 $I_-(\xi)$ 满足

$$cI'_-(\xi) \leqslant d_2(J * I_-(\xi) - I_-(\xi)) +$$

$$\frac{\beta S_-(\xi)G*I_-(\xi)}{S_-(\xi)+G*I_-(\xi)+R_+(\xi)}-(\gamma+\delta)I_-(\xi),\tag{10}$$

其中 $\xi\neq\xi_2,\ \xi_2:=\frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{M}$.

**证明** 若 $\xi>\xi_2$ 时，$I_-(\xi)=0$，则上式成立.若 $\xi<\xi_2$ 时，$I_-(\xi)=e^{\lambda_1\xi}(1-Me^{\eta\xi})$，令 $M>1$ 充分大，则使得当 $\xi<\xi_2$ 时,有 $S_-(\xi)\geqslant S_0/2$.因为

$$\frac{\beta S_-(\xi)G*I_-(\xi)}{S_-(\xi)+G*I_-(\xi)+R_+(\xi)}-\beta G*I_-(\xi)=$$
$$\frac{-\beta(G*I_-(\xi))^2-\beta R_+(\xi)G*I_-(\xi)}{S_-(\xi)+G*I_-(\xi)+R_+(\xi)}\geqslant$$
$$-\frac{2\beta(G*I_-(\xi))^2+2\beta R_+(\xi)G*I_-(\xi)}{S_0}.$$

所以

$$\begin{aligned}&d_2(J*I_-(\xi)-I_-(\xi))-cI'_-(\xi)+\\&\quad\frac{\beta S_-(\xi)G*I_-(\xi)}{S_-(\xi)+G*I_-(\xi)+R_+(\xi)}-(\gamma+\delta)I_-(\xi)\geqslant\\&\quad d_2(J*I_-(\xi)-I_-(\xi))-cI'_-(\xi)+\beta G*I_-(\xi)-(\gamma+\delta)I_-(\xi)-\\&\quad 2\beta\frac{(G*I_-(\xi))^2+R_+(\xi)G*I_-(\xi)}{S_0}\geqslant\\&\quad e^{(\lambda_1+\eta)\xi}\Bigg[-Mf(\lambda_1+\eta,c)-\frac{2\beta}{S_0}e^{(\lambda_1-\eta)\xi}\left(\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)e^{-\lambda_1(y+cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right)^2-\\&\quad\frac{2\beta M_1}{S_0}\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)e^{-\lambda_1(y+cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\Bigg].\end{aligned}$$

因为 $\eta<\min\{\lambda_1,\lambda_2-\lambda_1\}$，则 $f(\lambda_1+\eta,c)<0$.又因为 $\xi<\xi_2$，则 $e^{(\lambda_1-\eta)\xi}<e^{(\lambda_1-\eta)\xi_2}$.故当 $M$ 满足

$$\begin{aligned}M>&\left\{2\beta e^{(\lambda_1-\eta)\xi_2}\left[\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)e^{-\lambda_1(y+cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]^2+\right.\\&\left.2\beta M_1\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)e^{-\lambda_1(y+cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right\}\Big/(-S_0f(\lambda_1+\eta,c))\end{aligned}$$

时，可得引理 5 成立.证毕. □

令 $X>\max\{(1/\eta)\ln M,-\xi_1\}$，定义如下集合：

$$\Gamma_X=\left\{(\phi(\cdot),\varphi(\cdot),\chi(\cdot))\in C([-X,X],R^3)\ \middle|\ \begin{array}{c}\phi(-X)=S_-(-X),\\ \varphi(-X)=I_-(-X),\\ \chi(-X)=R_-(-X),\\ S_-(\xi)\leqslant\phi(\xi)\leqslant S_0,\ \forall\xi\in[-X,X],\\ I_-(\xi)\leqslant\varphi(\xi)\leqslant I_+(\xi),\ \forall\xi\in[-X,X],\\ R_-(\xi)\leqslant\chi(\xi)\leqslant R_+(\xi),\ \forall\xi\in[-X,X]\end{array}\right\}.$$

对任意的 $(\phi(\cdot),\varphi(\cdot),\chi(\cdot))\in\Gamma_X$，定义

$$\tilde\phi(\xi)=\begin{cases}\phi(X), & \xi>X,\\ \phi(\xi), & |\xi|\leqslant X,\\ S_-(\xi), & \xi<-X,\end{cases}\quad \tilde\varphi(\xi)=\begin{cases}\varphi(X), & \xi>X,\\ \varphi(\xi), & |\xi|\leqslant X,\\ I_-(\xi), & \xi<-X,\end{cases}$$

$$\tilde{\chi}(\xi)=\begin{cases}\chi(X), & \xi>X,\\ \chi(\xi), & |\xi|\leqslant X,\\ R_-(\xi), & \xi<-X.\end{cases}$$

考虑下面初值问题：

$$cS'(\xi)=d_1\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{\phi}(\xi-y)\mathrm{d}y-\left[d_1+\frac{\beta G*\tilde{\varphi}(\xi)}{\phi(\xi)+G*\tilde{\varphi}(\xi)+\chi(\xi)}\right]S(\xi),\tag{11}$$

$$cI'(\xi)=d_2\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{\phi}(\xi-y)\mathrm{d}y-(d_2+\gamma+\delta)I(\xi)+\frac{\beta\phi(\xi)G*\tilde{\varphi}(\xi)}{\phi(\xi)+G*\tilde{\varphi}(\xi)+\chi(\xi)},\tag{12}$$

$$cR'(\xi)=d_3\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{\chi}(\xi-y)\mathrm{d}y-d_3R(\xi)+\gamma\varphi(\xi),\tag{13}$$

其中

$$S(-X)=S_-(-X),I(-X)=I_-(-X),R(-X)=R_-(-X).\tag{14}$$

依据常微分方程理论可知，问题(11)～(14)存在满足 $S_X(\cdot),I_X(\cdot),R_X(\cdot)\in C^1([-X,X])$ 的惟一解 $(S_X(\xi),I_X(\xi),R_X(\xi))$. 定义算子 $\mathrm{F}=(\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2,\mathrm{F}_3):\Gamma_X\to C([-X,X])$ 满足

$$S_X(\xi)=\mathrm{F}_1[\phi,\varphi,\chi](\xi),\ I_X(\xi)=\mathrm{F}_2[\phi,\varphi,\chi](\xi),\ R_X(\xi)=\mathrm{F}_3[\phi,\varphi,\chi](\xi).$$

**引理 6** 算子 $\mathrm{F}:\Gamma_X\to\Gamma_X$.

由引理 2～5 易得该结论成立.

**引理 7** 算子 $\mathrm{F}:\Gamma_X\to\Gamma_X$ 是全连续的.

**证明** 由问题(11)～(14)可知

$$S_X(\xi)=S_-(-X)\exp\left\{-\frac{1}{c}\int_{-X}^{\xi}\left(d_1+\frac{\beta G*\tilde{\varphi}(\tau)}{\phi(\tau)+G*\tilde{\varphi}(\tau)+\chi(\tau)}\right)\mathrm{d}\tau\right\}+\frac{d_1}{c}\int_{-X}^{\xi}\exp\left\{-\frac{1}{c}\int_{\zeta}^{\xi}\left(d_1+\frac{\beta G*\tilde{\varphi}(\tau)}{\phi(\tau)+G*\tilde{\varphi}(\tau)+\chi(\tau)}\right)\mathrm{d}\tau\right\}f_\phi(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\tag{15}$$

$$I_X(\xi)=I_-(-X)\exp\left\{-\frac{d_2+\gamma+\delta}{c}(\xi+X)\right\}+\frac{1}{c}\int_{-X}^{\xi}\exp\left\{-\frac{d_2+\gamma+\delta}{c}(\xi-\zeta)\right\}g_\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\tag{16}$$

$$R_X(\xi)=\frac{1}{c}\int_{-X}^{\xi}\exp\left\{-\frac{d_3}{c}(\xi-\zeta)\right\}h_\chi(\zeta)\mathrm{d}\zeta,\tag{17}$$

其中

$$f_\phi(\zeta)=\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{\phi}(\zeta-y)\mathrm{d}y,$$

$$g_\varphi(\zeta)=d_2\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{\varphi}(\zeta-y)\mathrm{d}y+\frac{\beta\phi(\zeta)G*\tilde{\varphi}(\zeta)}{\phi(\zeta)+G*\tilde{\varphi}(\zeta)+\chi(\zeta)},$$

$$h_\chi(\zeta)=d_3\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{\chi}(\zeta-y)\mathrm{d}y+\gamma\varphi(\zeta).$$

对 $\forall(\phi_i,\varphi_i,\chi_i)\in\Gamma_X$，令

$$\mathrm{F}_1(\phi_i,\varphi_i,\chi_i)=S_{X,i}(\xi),\ \mathrm{F}_2(\phi_i,\varphi_i,\chi_i)=I_{X,i}(\xi),\ \mathrm{F}_3(\phi_i,\varphi_i,\chi_i)=R_{X,i}(\xi),\quad i=1,2,3.$$

通过简单的计算，可得

$$|f_{\phi_1}(\zeta)-f_{\phi_2}(\zeta)|=\left|\int_{-X}^{X}J(\zeta-y)(\phi_1(y)-\phi_2(y))\mathrm{d}y+\right.$$
$$\left.\int_{X}^{+\infty}J(\zeta-y)(\phi_1(y)-\phi_2(y))\mathrm{d}y\right|\leqslant\max_{y\in[-X,X]}|\phi_1(y)-\phi_2(y)|.$$

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}J(\zeta-y)|\tilde{\varphi}_1(y)-\tilde{\varphi}_2(y)|\,\mathrm{d}y\leqslant\int_{-\infty}^{\zeta+X}J(y)\mathrm{d}y\cdot\max_{y\in[-X,X]}|\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|$$

和

$$\left|\frac{\phi(\zeta)G*\tilde{\varphi}_1(\zeta)}{\phi(\zeta)+G*\tilde{\varphi}_1(\zeta)+\chi(\zeta)}-\frac{\phi(\zeta)G*\tilde{\varphi}_2(\zeta)}{\phi(\zeta)+G*\tilde{\varphi}_2(\zeta)+\chi(\zeta)}\right|\leqslant$$
$$|G*\tilde{\varphi}_1(\zeta)-G*\tilde{\varphi}_2(\zeta)|=$$
$$\left|\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(\zeta-y-cs,s)\tilde{\varphi}_1(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s-\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(\zeta-y-cs,s)\tilde{\varphi}_2(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\int_0^H\int_{-X}^{X}G(\zeta-y-cs,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\cdot\max_{y\in[-X,X]}|\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|,$$

则可得

$$|g_{\varphi_1}(\zeta)-g_{\varphi_2}(\zeta)|\leqslant d_2\int_{-\infty}^{+\infty}J(\zeta-y)|\tilde{\varphi}_1(y)-\tilde{\varphi}_2(y)|\,\mathrm{d}y+$$
$$\beta|G*\tilde{\varphi}_1(\zeta)-G*\tilde{\varphi}_2(\zeta)|\leqslant(d_2+\beta)\cdot\max_{y\in[-X,X]}|\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|.$$

同理可得

$$|h_{\chi_1}(\zeta)-h_{\chi_2}(\zeta)|=d_3\int_{-\infty}^{\zeta+X}J(y)\mathrm{d}y\cdot\max_{y\in[-X,X]}|\chi_1(y)-\chi_2(y)|\leqslant$$
$$d_3\cdot\max_{y\in[-X,X]}|\chi_1(y)-\chi_2(y)|.$$

由 F 的定义及式(15)~(17)可得:F 是连续的，且可得 $S_X(\cdot),I_X(\cdot),R_X(\cdot)\in C^1([-X,X])$，结合式(11)~(13)可得 $S'_X,I'_X,R'_X$在$[-X,X]$上是一致有界的.根据 Arzela-Ascoli 定理可得:F 是紧算子.证毕. □

由 $\Gamma_X$ 的定义可知，$\Gamma_X$ 是一个闭凸集合.利用 Schauder 不动点定理可知，存在一个不动点 $(S_X^*(\cdot),I_X^*(\cdot),R_X^*(\cdot))\in\Gamma_X$，对任意 $\xi\in(-X,X)$，都有

$$(S_X^*(\xi),I_X^*(\xi),R_X^*(\cdot))=\mathrm{F}[S_X^*,I_X^*,R_X^*](\xi).$$

为得到模型(5)的行波解.下面给出 $S_X^*(\cdot),I_X^*(\cdot),R_X^*(\cdot)$ 的估计.为了方便，将 $S_X^*(\cdot)$，$I_X^*(\cdot),R_X^*(\cdot)$ 记为 $S_X(\cdot),I_X(\cdot),R_X(\cdot)$.

**引理 8** (i) 存在常数 $\tilde{C}>0$，对 $\forall X>\max\{(1/\eta)\ln M,-\xi_1\}$，满足

$$\|S_X\|_{C^{1,1}([-X,X])}\leqslant\tilde{C},\ \|I_X\|_{C^{1,1}([-X,X])}\leqslant\tilde{C}.$$

更进一步地,有

$$\int_{-X}^{X}\frac{\beta S_X(\xi)G*I_X(\xi)}{S_X(\xi)+G*I_X(\xi)+R_X(\xi)}\mathrm{d}\xi<\tilde{C},\ \int_{-X}^{X}I_X(\xi)\mathrm{d}\xi<\tilde{C}.$$

(ii) 给定 $Y>0$,则存在常数 $C(Y)>0$,当 $\forall X>\max\{(1/\eta)\ln M,-\xi_1\}$ 和 $X>Y+R_1$，有

$$\|S_X\|_{C^{1,1}([-Y,Y])}\leqslant C(Y),\ \|I_X\|_{C^{1,1}([-Y,Y])}\leqslant C(Y),\ \|R_X\|_{C^{1,1}([-Y,Y])}\leqslant C(Y),$$

其中 $R_1$ 是 $J$ 的支撑半径.

**证明** 显然，$(S_X(\cdot),I_X(\cdot),R_X(\cdot))$ 满足

$$cS'_X(\xi)=d_1\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{S}_X(\xi-y)\mathrm{d}y-d_1S_X(\xi)-\frac{\beta S_X(\xi)G*\tilde{I}_X(\xi)}{S_X(\xi)+G*\tilde{I}_X(\xi)+R_X(\xi)},\tag{18}$$

$$cI'_X(\xi)=d_2\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{I}_X(\xi-y)\mathrm{d}y-(d_2+\gamma+\delta)I_X(\xi)+\frac{\beta S_X(\xi)G*\tilde{I}_X(\xi)}{S_X(\xi)+G*\tilde{I}_X(\xi)+R_X(\xi)},\tag{19}$$

$$cR'_X(\xi)=d_3\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\tilde{R}_X(\xi-y)\mathrm{d}y-d_3R_X(\xi)+\gamma I_X(\xi).\tag{20}$$

现给出(i)的证明.对式(18)两边从 $-X$ 到 $X$ 积分可得

$$\int_{-X}^{X}\frac{\beta S_X(\xi)G*\tilde{I}_X(\xi)}{S_X(\xi)+G*\tilde{I}_X(\xi)+R_X(\xi)}\mathrm{d}\xi=d_1\int_{-X}^{X}\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)(\tilde{S}_X(\xi-y)-S_X(\xi))\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi-c[S_X(X)-S_X(-X)].$$

因为

$$\begin{aligned}&\int_{-X}^{X}\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)(\tilde{S}_X(\xi-y)-S_X(\xi))\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi=\\&\left\{\int_{-\infty}^{0}J(y)\int_{-X-y}^{X}(S_X(z)-S_X(z+y))\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right\}+\\&\left\{\int_{0}^{+\infty}J(y)\int_{-X}^{X-y}(S_X(z)-S_X(z+y))\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right\}+\\&\left\{\int_{-\infty}^{0}J(y)\int_{X}^{X-y}(S_X(X)-S_X(z+y))\mathrm{d}z\mathrm{d}y+\right.\\&\left.\int_{0}^{+\infty}J(y)\int_{-X-y}^{-X}(S_-(z)-S_X(z+y))\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right\}=\\&\Gamma_{S_1}+\Gamma_{S_2}+\Gamma_{S_3},\end{aligned}\tag{21}$$

且 $0\leqslant S_X(\xi)\leqslant S_0$, 则

$$\begin{aligned}\Gamma_{S_1}&=\int_{-\infty}^{0}J(y)\int_{-X-y}^{X}(-y)\int_{0}^{1}S'_X(z+ty)\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\\&\int_{-\infty}^{0}J(y)(-y)\int_{0}^{1}(S_X(X+ty)-S_X(-X-y+ty))\mathrm{d}t\mathrm{d}y\leqslant S_0\int_{0}^{+\infty}J(y)y\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

同理可得

$$\Gamma_{S_2}\leqslant S_0\int_{0}^{+\infty}J(y)y\mathrm{d}y,\ \Gamma_{S_3}\leqslant 2S_0\int_{0}^{+\infty}J(y)y\mathrm{d}y.$$

从而有

$$\int_{-X}^{X}\frac{\beta S_X(\xi)G*\tilde{I}_X(\xi)}{S_X(\xi)+G*\tilde{I}_X(\xi)+R_X(\xi)}\mathrm{d}\xi\leqslant 4d_1S_0\int_{0}^{+\infty}J(y)y\mathrm{d}y+cS_0.$$

对式(19)两边从 $-X$ 到 $X$ 积分,可得

$$(\gamma+\delta)\int_{-X}^{X}I_X(\xi)\mathrm{d}\xi=d_2\int_{-X}^{X}\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)(\tilde{I}_X(\xi-y)-I_X(\xi))\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi+\int_{-X}^{X}\frac{\beta S_X(\xi)G*\tilde{I}_X(\xi)}{S_X(\xi)+G*\tilde{I}_X(\xi)+R_X(\xi)}\mathrm{d}\xi-c[I_X(X)-I_X(-X)].$$

因为 $0<I_X(\xi)\leqslant(\beta-\gamma-\delta)S_0/(\gamma+\delta)$, 类似式(21)讨论可得:存在常数 $C_0>0$(独立于 $X$) 使得

$$\int_{-X}^{X}\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)(\tilde{I}_X(\xi-y)-I_X(\xi))\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi<C_0.$$

从而可得存在常数 $\tilde{C} > 0$(独立于 $X$) 使得 $\int_{-X}^{X} I_X(\xi)\mathrm{d}\xi < \tilde{C}$ 成立.因为 $S_X(\xi) \leqslant S_0, I_X(\xi) \leqslant (\beta - \gamma - \delta)S_0/(\gamma + \delta)$, 由式(18)和(19)可以得出

$$|S'_X(\xi)| \leqslant \frac{2d_1 + \beta}{c}S_0,\ |I'_X(\xi)| \leqslant \frac{1}{c}\left\{\frac{(2d_2 + \gamma + \delta)(\beta - \gamma - \delta)}{\gamma + \delta} + \beta\right\}S_0.$$

因此(i)得证.

下面证明(ii):由(i)可得,对 $\forall \xi, \eta \in [-Y, Y]$, 都存在常数 $L_1 > 0$, 使得

$$|S_X(\xi) - S_X(\eta)| < L_1|\xi - \eta|,\ |I_X(\xi) - I_X(\eta)| < L_1|\xi - \eta|.$$

利用式(18)可得

$$\begin{aligned}
&|S'_X(\xi) - S'_X(\eta)| \leqslant \\
&\quad \frac{d_1}{c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}[J(\xi - y) - J(\eta - y)]\tilde{S}_X(y)\mathrm{d}y\right| + \frac{d_1}{c}|S_X(\xi) - S_X(\eta)| + \\
&\quad \frac{\beta}{c}\left|\frac{\beta S_X(\xi)G * \tilde{I}_X(\xi)}{S_X(\xi) + G * \tilde{I}_X(\xi) + R_X(\xi)} - \frac{\beta S_X(\eta)G * \tilde{I}_X(\eta)}{S_X(\eta) + G * \tilde{I}_X(\eta) + R_X(\eta)}\right| = \\
&\quad S_1 + S_2 + S_3.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-X}^{X}[J(\xi - y) - J(\eta - y)]\tilde{S}_X(y)\mathrm{d}y\right| = \\
&\quad \left|\int_{\eta+X}^{\xi+X}J(z)S_X(\xi - z)\mathrm{d}z - \int_{\eta-X}^{\xi-X}J(z)S_X(\eta - z)\mathrm{d}z + \right. \\
&\quad \left.\int_{\xi-X}^{\eta+X}J(z)(S_X(\xi - z) - S_X(\eta - z))\mathrm{d}z\right| \leqslant (2S_0\|J\|_{L^\infty} + L_1)|\xi - \eta|.
\end{aligned}$$

因为 $J$ 是 Lipschitz 连续的, 令 $L_J$ 是相应的 Lipschitz 常数, 因此可得

$$\begin{aligned}
S_1 = &\frac{d_1}{c}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}J(\xi - y)\tilde{S}_X(y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{+\infty}J(\eta - y)\tilde{S}_X(y)\mathrm{d}y\right| = \\
&\frac{d_1}{c}\left|\int_{-\infty}^{-X}[J(\xi - y) - J(\eta - y)]S_-(y)\mathrm{d}y + \right. \\
&\int_{-X}^{X}[J(\xi - y) - J(\eta - y)]S_X(y)\mathrm{d}y + \\
&\left.\int_{X}^{+\infty}[J(\xi - y) - J(\eta - y)]S_X(X)\mathrm{d}y\right| \leqslant \\
&\frac{d_1}{c}\left(L_J\int_{-\infty}^{\xi_1}S_-(y)\mathrm{d}y + 3S_0\|J\|_{L^\infty} + L_1\right)|\xi - \eta|.
\end{aligned}$$

另外对 $\forall \xi \in [-Y, Y]$, 有 $R_X(\xi) \leqslant M_1\mathrm{e}^{\eta Y}$.利用式(20)可得

$$|R'_X(\xi)| \leqslant \frac{1}{c}\left(2d_3M_1\mathrm{e}^{\eta Y} + \frac{\beta - \gamma - \delta}{\gamma + \delta}\gamma S_0\right).$$

则对 $\forall \xi \in [-Y, Y]$, 都存在常数 $L_2(Y) > 0$, 使得 $|R_X(\xi) - R_X(\eta)| \leqslant L_2|\xi - \eta|$.由假设知 $G$ 关于空间变量 $y$ 是 Lipschitz 连续的, 令 $L_G$ 是其 Lipschitz 常数, 则有

$$\begin{aligned}
&|G * \tilde{I}_X(\xi) - G * \tilde{I}_X(\eta)| = \\
&\quad \left|\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}[G(\xi - y - cs, s) - G(\eta - y - cs, s)]\tilde{I}_X(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \leqslant \\
&\quad \left|\int_0^H\int_{-\infty}^{-X}[G(\xi - y - cs, s) - G(\eta - y - cs, s)]I_-(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| +
\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^H\int_{-X}^{X}[G(\xi-y-cs,s)-G(\eta-y-cs,s)]I_X(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|+$$
$$\left|\int_0^H\int_{X}^{+\infty}[G(\xi-y-cs,s)-G(\eta-y-cs,s)]I_X(X)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$HL_G\int_{-\infty}^{(1/\eta)\ln(1/M)}I_-(y)\mathrm{d}y\,|\xi-\eta|+\frac{(\beta-\gamma-\delta)S_0}{\gamma+\delta}\int_0^H\int_{\eta-X-cs}^{\xi-X-cs}G(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+$$
$$\left|\int_0^H\int_{-X}^{X}[G(\xi-y-cs,s)-G(\eta-y-cs,s)]I_X(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|$$

且

$$\int_0^H\int_{-X}^{X}[G(\xi-y-cs,s)-G(\eta-y-cs,s)]I_X(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s=$$
$$\left|\int_0^H\int_{\eta+X-cs}^{\xi+X-cs}G(y,s)I_X(\xi-y-cs)\mathrm{d}y\mathrm{d}s-\int_0^H\int_{\eta-X-cs}^{\xi-X-cs}G(y,s)I_X(\eta-y-cs)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\right.$$
$$\left.\int_0^H\int_{\xi-X-cs}^{\eta+X-cs}G(y,s)[I_X(\xi-y-cs)-I_X(\eta-y-cs)]\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\left[\frac{2S_0H(\beta-\gamma-\delta)}{\gamma+\delta}\|G\|_{L^\infty(\mathbf{R}\times[0,H])}+L_1\right]|\xi-\eta|,$$

综上可得

$$S_3\leqslant\frac{\beta}{c}\Big[2|G*\tilde{I}_X(\xi)-G*\tilde{I}_X(\eta)|+$$
$$2|S_X(\xi)-S_X(\eta)|+|R_X(\xi)-R_X(\eta)|\Big]\leqslant$$
$$\frac{\beta}{c}\Big[3L_1+L_2+HL_G\int_{-\infty}^{(1/\eta)\ln(1/M)}I_-(y)\mathrm{d}y+$$
$$\frac{3S_0H(\beta-\gamma-\delta)}{\gamma+\delta}\|G\|_{L^\infty(\mathbf{R}\times[0,H])}\Big]|\xi-\eta|.$$

令

$$L_S=\frac{\beta}{c}\left[3L_1+L_2+HL_G\int_{-\infty}^{(1/\eta)\ln(1/M)}I_-(y)\mathrm{d}y+\frac{3S_0H(\beta-\gamma-\delta)}{\gamma+\delta}\|G\|_{L^\infty(\mathbf{R}\times[0,H])}\right]+$$
$$\frac{d_1}{c}\left[L_J\int_{-\infty}^{\xi_1}S_-(y)\mathrm{d}y+3S_0\|J\|_{L^\infty}+2L_1\right],$$

可得 $L_S$ 是有界的，从而可得 $|S'_X(\xi)-S'_X(\eta)|\leqslant L_S|\xi-\eta|$.进一步可得

$$\|S_X(\cdot)\|_{C^{1,1}([-Y,Y])}\leqslant S_0+\frac{2d_1+\beta}{c}S_0+L_S.$$

同理可得

$$|I'_X(\xi)-I'_X(\eta)|\leqslant L_I|\xi-\eta|,\ |R'_X(\xi)-R'_X(\eta)|\leqslant L_R|\xi-\eta|,$$

其中

$$L_I=\frac{d_2}{c}\left[L_J\int_{-\infty}^{(1/\eta)\ln(1/M)}I_-(y)\mathrm{d}y+\frac{3S_0(\beta-\gamma-\delta)}{\gamma+\delta}\|J\|_{L^\infty}+L_1\right]+$$
$$\frac{\beta}{c}L_S+\frac{d_2+\gamma+\delta}{c}L_1,$$

$$L_R=\frac{d_3}{c}L_2+\frac{\gamma}{c}L_1+3\|J\|_{L^\infty}R_+(Y-R_1)+$$

$$\| J \|_{L^\infty} R_+ (Y + R_1) + 2R_1 L_J R_+ (Y + R_1).$$

更进一步,有

$$\| I_X(\cdot) \|_{C^{1,1}([-Y,Y])} \leqslant$$
$$\frac{\beta - \gamma - \delta}{\gamma + \delta} S_0 + \frac{1}{c}\left[\frac{(2d_2 + \gamma + \delta)(\beta - \gamma - \delta)}{\gamma + \delta} + \beta\right] S_0 + L_I,$$
$$\| R_X(\cdot) \|_{C^{1,1}([-Y,Y])} \leqslant \mathrm{e}^{\lambda_1 Y} + L_2 + L_R.$$

证毕. □

**定理 1(i)的证明** 取满足 $X_n > \max\{(1/\eta)\ln M, -\xi_1\}$, $X_n > Y + R_1$ 且 $\lim_{n\to+\infty} X_n = +\infty$ 的序列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.对 $\forall n$, 存在 $(S_{X_n}, I_{X_n}, R_{X_n}) \in \Gamma_{X_n}$ 满足引理 8 和方程(18) ~ (20).由引理 8 知, 存在满足如下条件的子序列 $\{X_{nk}\}$:当 $k \to +\infty$ 时, $X_{nk} \to +\infty$ 且

$$S_{nk} \to S,\ I_{nk} \to I,\ R_{nk} \to R$$

在 $C_{\mathrm{loc}}^1(\mathbf{R})$ 中成立.

根据核函数 $J, G$ 的假设条件, 利用 Lebesgue(勒贝格)控制收敛定理可得

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)\tilde{S}_{X_{nk}}(\xi - y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} J(y)S(\xi - y)\mathrm{d}y = J * S(\xi),$$
$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)\tilde{I}_{X_{nk}}(\xi - y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} J(y)I(\xi - y)\mathrm{d}y = J * I(\xi),$$
$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)\tilde{R}_{X_{nk}}(\xi - y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} J(y)R(\xi - y)\mathrm{d}y = J * R(\xi),$$
$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi - y - cs, s)\tilde{I}_{X_{nk}}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi - y - cs, s)I(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s = G * I(\xi).$$

从而可得 $(S, I, R)$ 满足系统(6)并且

$$S_-(\xi) \leqslant S(\xi) \leqslant S_0,\ I_-(\xi) \leqslant I(\xi) \leqslant I_+(\xi),\ 0 \leqslant R(\xi) \leqslant R_+(\xi)$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta S(\xi) G * I(\xi)}{S(\xi) + G * I(\xi) + R(\xi)} \mathrm{d}\xi < +\infty,\ \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi < +\infty.$$

由 $S_-(\xi)$ 和 $R_\pm(\xi)$ 的定义可知, $S(-\infty) = S_0, R(-\infty) = 0$.又由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi < +\infty$ 且 $I'(\xi)$ 一致有界.从而得出 $I(\pm\infty) = 0$.

下面证明:当 $\xi \to +\infty$ 时, $S(\xi)$ 的极限存在.由于 $S(\xi) \leqslant S_0$, 则有 $\limsup_{\xi\to+\infty} S(\xi) \leqslant S_0$, 更进一步地, 可以断言 $\liminf_{\xi\to+\infty} S(\xi) < S_0$.否则 $\lim_{\xi\to+\infty} S(\xi) = S_0$.则对式(6)的第一个方程从 $-X$ 到 $X$ 积分可得

$$c[S(X) - S(-X)] = d_1\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)(-y)\int_0^1 (S(X - ty) - S(-X - ty))\mathrm{d}t\mathrm{d}y -$$
$$\int_{-X}^{X} \frac{\beta S(\xi) G * I(\xi)}{S(\xi) + G * I(\xi) + R(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

令 $\xi \to +\infty$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta S(\xi) G * I(\xi)}{\beta S(\xi) G * I(\xi) + R(\xi)} \mathrm{d}\xi = 0$, 这与 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta S(\xi) G * I(\xi)}{\beta S(\xi) G * I(\xi) + R(\xi)} \mathrm{d}\xi > 0$ 产生矛盾.

要证 $S(+\infty)$ 的极限存在, 只需证明 $\liminf_{\xi\to+\infty} S(\xi) = \limsup_{\xi\to+\infty} S(\xi)$. 假设

$\liminf_{\xi\to+\infty} S(\xi) < \limsup_{\xi\to+\infty} S(\xi)$ 成立.则存在点列 $\{\xi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 和 $\{\eta_n\}_{n=1}^{+\infty}$，满足 $\lim_{n\to+\infty}\xi_n=+\infty$，$\lim_{n\to+\infty}\eta_n=+\infty$，且

$$\lim_{n\to+\infty} S(\xi_n) = \limsup_{\xi\to+\infty} S(\xi) := \sigma_1 \leqslant S_0,\ S'(\xi_n)=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} S(\eta_n) = \liminf_{\xi\to+\infty} S(\xi) := \sigma_2 < \sigma_1,\ S'(\eta_n)=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} J*S(\xi_n) \leqslant \sigma_1,\ \lim_{n\to+\infty} J*S(\eta_n) \geqslant \sigma_2 > 0.$$

由于 $I(+\infty)=0$ 和 $cS'(\xi_n)=d_1(J*S(\xi_n)-S(\xi_n))-\dfrac{\beta S(\xi_n)G*I(\xi_n)}{S(\xi_n)+G*I(\xi_n)+R(\xi_n)}$，则 $\lim_{n\to+\infty}J*S(\xi_n)=\sigma_1$.令 $S_n(y)=S(\xi_n+y)$.取很小的正数 $\epsilon$，令 $\Omega_\epsilon=\Omega\cap\{\lim_{n\to+\infty}S(\xi_n)<\sigma_1-\epsilon\}$，其中 $\Omega:=\operatorname{supp} J$.可得

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega J(y)S_n(y)\,dy \leqslant \\ &\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} J(y)S_n(y)\,dy + \limsup_{n\to+\infty}\int_{\Omega_\epsilon} J(y)S_n(y)\,dy \leqslant \\ &\sigma_1\int_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon} J(y)\,dy + (\sigma_1-\epsilon)\int_{\Omega_\epsilon} J(y)\,dy = \sigma_1 - \epsilon\int_{\Omega_\epsilon} J(y)\,dy,\end{aligned}$$

则 $m(\epsilon)=0$，其中 $m$ 表示测度.所以 $S_n(y)\to\sigma_1$ 在 $\Omega$ 上几乎处处成立.又因为 $\{S_n\}$ 是等度连续的，所以 $S_n(y)\to\sigma_1$ 在 $\Omega$ 上处处成立.即对任意 $y\in\Omega$，都有 $S_n(y)\to\sigma_1$.

因为 $J\in C^1$，故必存在 $R'\geqslant\delta'>0$，使得

$$[R'-\delta',R'+\delta']\cup[-R'-\delta',-R'+\delta']\subseteq\Omega$$

成立.令 $\xi_n^\pm=\xi_n\pm R'$，则对任意 $y\in\Omega$，当 $n\to+\infty$ 时，有 $S(\xi_n^\pm+y)\to\sigma_1$.特别地,对任意 $y\in[-\delta',\delta']$，当 $n\to+\infty$ 时，有 $S(\xi_n+y)\to\sigma_1$.

重复上面的过程可得：对任意 $y\in[-R_1,R_1]$，当 $n\to+\infty$ 时，有 $S(\xi_n+y)\to\sigma_1$，其中 $R_1$ 表示 $\Omega$ 的半径.另一方面，因为 $I(+\infty)=0$ 且

$$cS'(\eta_n)=d_1(J*S(\eta_n)-S(\eta_n))-\frac{\beta S(\eta_n)G*I(\eta_n)}{S(\eta_n)+G*I(\eta_n)+R(\eta_n)},$$

则 $\lim_{n\to+\infty}J*S(\eta_n)=\sigma_2$.同理可得:对任意 $y\in[-R_1,R_1]$，当 $n\to+\infty$ 时，有 $S(\xi_n+y)\to\sigma_2$.对式(6) 的第一个式子从 $\eta_n$ 到 $\xi_n$ 积分，可得

$$\begin{aligned}0 &< c(\sigma_1-\sigma_2)=c\lim_{n\to+\infty}[S(\xi_n)-S(\eta_n)]= \\ &\lim_{n\to+\infty}\int_{\eta_n}^{\xi_n} d_1[J*S(\xi)-S(\xi)]\,d\xi-\lim_{n\to+\infty}\int_{\eta_n}^{\xi_n} f(S(\xi))g(I(\xi-c\tau))\,d\xi=0,\end{aligned}$$

产生矛盾，所以 $\liminf_{\xi\to+\infty}S(\xi)=\limsup_{\xi\to+\infty}S(\xi):=S_\infty<S_0$.证毕. □

**定理 1(ii)的证明** 若 $\limsup_{\xi\to+\infty}R(\xi)<+\infty$，首先证明存在正数 $R_\infty$，使得 $\lim_{\xi\to+\infty}R(\xi):=R_\infty$.假设 $\limsup_{\xi\to+\infty}R(\xi)>\liminf_{\xi\to+\infty}R(\xi)$.同 $S$ 讨论方法相同，可以得出存在正数 $R_\infty$，使得 $\lim_{\xi\to+\infty}R(\xi)=R_\infty$ 成立.对式(6) 的第一个方程两边从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta S(\xi)G*I(\xi)}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)}\,d\xi=c[S_0-S_\infty].$$

由式(6)的第二个方程可得

$$(\gamma+\delta)\int_{-\infty}^{+\infty}I(\xi)\,d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta S(\xi)G*I(\xi)}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)}\,d\xi.$$

由式(6)的第三个方程可得

$$cR_\infty = \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{c\gamma(S_0 - S_\infty)}{\gamma + \delta}.$$

从而可得 $R_\infty = \dfrac{\gamma(S_0 - S_\infty)}{\gamma + \delta}$.证毕. □

**定理 1(iii)的证明** 由上可得系统(6)行波解的渐近行为.知 $\limsup_{\xi\to+\infty} R(\xi) < +\infty$ 是模型(6) 存在行波解的一个充分条件. 目的是为了确保 $R(+\infty)$ 存在. 但并不能排除 $\limsup_{\xi\to+\infty} R(\xi) = +\infty$ 这种情况.事实上, 当波速 $c$ 相当大时, 可得得出 $R(+\infty)$ 是有界的.具体证明过程见文献[9].证毕. □

## 2 行波解的不存在性

本节将考察系统(6)行波解的不存在性.首先考察当 $R_0 \leqslant 1$ 时, 对 $\forall c > 0$, 系统(6)不存在行波解.

**定理 2** 若 $R_0 \leqslant 1$.则对任意 $c > 0$, 系统(6)不存在满足边界条件

$$S(-\infty) = S_0,\ I(\pm\infty) = 0,\ S(+\infty) < S_0,\ R(-\infty) = 0, \sup_{\mathbf{R}} R(\xi) < +\infty$$

的非平凡行波解 $(S(\xi), I(\xi), R(\xi))$.

**证明** 假设系统(6)存在非平凡行波解 $(S(\xi), I(\xi), R(\xi))$.当 $R_0 = \beta/(\gamma + \delta) < 1$ 时, 对系统(6) 的第二个式子在 $\mathbf{R}$ 上积分, 得

$$(\gamma + \delta)\int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi = d_2\int_{-\infty}^{+\infty}(J * I(\xi) - I(\xi))\mathrm{d}\xi + \beta\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\xi)G * I(\xi)}{S(\xi) + G * I(\xi) + R(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

由 Fubini 定理可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}(J * I(\xi) - I(\xi))\mathrm{d}\xi = 0$, 所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{\beta}{\gamma + \delta}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\xi)G * I(\xi)}{S(\xi) + G * I(\xi) + R(\xi)}\mathrm{d}\xi < \int_{-\infty}^{+\infty} G * I(\xi)\mathrm{d}\xi < \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

产生矛盾.当 $R_0 = 1$ 时, 即有 $\beta = \gamma + \delta$, 从而有

$$cI'(\xi) = d_2(J * I(\xi) - I(\xi)) + \beta\left[\frac{S(\xi)G * I(\xi)}{S(\xi) + G * I(\xi) + R(\xi)} - I(\xi)\right],$$

上式两边在 $\mathbf{R}$ 上积分可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{S(\xi)G * I(\xi)}{S(\xi) + G * I(\xi) + R(\xi)} - I(\xi)\right]\mathrm{d}\xi = 0,$$

由 $S, I, G$ 的连续性和非负性可得

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{S(\xi)G * I(\xi)}{S(\xi) + G * I(\xi) + R(\xi)} - I(\xi)\right]\mathrm{d}\xi < \int_{-\infty}^{+\infty} G * I(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty} G(y,s)\int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi - y - cs)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

产生矛盾.证毕. □

**定理 3** 若 $R_0 > 1$.则对任意 $0 < c < c^*$, 系统(6)不存在满足边界条件

$$S(-\infty) = S_0,\ I(\pm\infty) = 0,\ S(+\infty) < S_0,\ R(-\infty) = 0,\ \sup_{\mathbf{R}} R(\xi) < +\infty$$

的非平凡行波解 $(S(\xi),I(\xi),R(\xi))$.

**证明** 使用反证法证明.假设系统(6)存在非平凡行波解 $(S(\xi),I(\xi),R(\xi))$.由于

$$S(-\infty)=S_0,\ R(-\infty)=0,\ I(-\infty)=0,$$

则当 $\xi\to-\infty$ 时, $\dfrac{\beta S(\xi)}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)}\to\beta$.进一步可得,存在 $\xi^*$, 当 $\xi<\xi^*$ 时, 满足 $\dfrac{\beta S(\xi)}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)}>\dfrac{\beta+\gamma+\delta}{2}$.则由系统(6)的第二个方程可知

$$cI'(\xi)\geqslant d_2[J*I(\xi)-I(\xi)]+\frac{\beta+\gamma+\delta}{2}G*I(\xi)-(\gamma+\delta)I(\xi)=$$

$$d_2[J*I(\xi)-I(\xi)]+\frac{\beta+\gamma+\delta}{2}[G*I(\xi)-I(\xi)]+\frac{\beta-\gamma-\delta}{2}I(\xi),$$

对上式从 $-\infty$ 到 $\xi(\xi<\xi^*)$ 积分可得

$$c[I(\xi)-I(-\infty)]\geqslant d_2\int_{-\infty}^{\xi}[J*I(\tau)-I(\tau)]\mathrm{d}\tau+\frac{\beta-\gamma-\delta}{2}\int_{-\infty}^{\xi}I(\tau)\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{\beta+\gamma+\delta}{2}\int_{-\infty}^{\xi}[G*I(\tau)-I(\tau)]\mathrm{d}\tau. \tag{22}$$

定义 $K(\xi):=\int_{-\infty}^{\xi}I(\tau)\mathrm{d}\tau$.因为

$$\int_{-\infty}^{\xi}J*I(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\int_{-\infty}^{\xi-y}I(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y=J*K(\xi),$$

$$\int_{-\infty}^{\xi}G*I(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)\int_{-\infty}^{\xi-y-cs}I(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s=G*K(\xi),$$

则在 $-\infty$ 到 $\xi(\xi<\xi^*)$ 区间上对式(22)积分,可得

$$\frac{\beta-\gamma-\delta}{2}K(\xi)\leqslant cI(\xi)-d_2[J*K(\xi)-K(\xi)]-$$

$$\frac{\beta+\gamma+\delta}{2}[G*K(\xi)-K(\xi)], \tag{23}$$

又因为

$$\int_{-\infty}^{\xi}(J*K(t)-K(t))\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}(-x)J(x)\int_0^1K(\xi-\theta x)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$$

和

$$\int_{-\infty}^{\xi}(G*K(t)-K(t))\mathrm{d}t=-\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}(y+cx)G(y,s)\int_0^1K(\xi-\theta(y+cs))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

对式(23)从 $-\infty$ 到 $\xi'$ 积分, 得出关于变量 $\xi'$ 的不等式, 用 $\xi$ 代替 $\xi'$, 可得

$$\frac{\beta-\gamma-\delta}{2}\int_{-\infty}^{\xi}K(t)\mathrm{d}t\leqslant cK(\xi)+d_2\int_{-\infty}^{+\infty}zJ(z)\int_0^1K(\xi-\theta z)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z+$$

$$\frac{\beta+\gamma+\delta}{2}\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}(y+cx)G(y,s)\int_0^1K(\xi-\theta(y+cs))\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y\mathrm{d}s, \tag{24}$$

因为 $xK(\xi-\theta x)$ 关于 $\theta(\theta\in[0,1],x\in\mathbf{R})$ 单调递减, 则可得 $zK(\xi-\theta z)\leqslant zK(\xi)$, $(y+cs)K(\xi-\theta(y+cs))\leqslant(y+cs)K(\xi)$,因为 $J,G$ 关于可积空间是偶函数, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}J(z)z\mathrm{d}z=0,\ \int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)y\mathrm{d}y\mathrm{d}s=0.$$

故由式(24)可得

$$\frac{\beta-\gamma-\delta}{2}\int_{-\infty}^{\xi}K(t)\mathrm{d}t \leqslant c\left[1+\frac{\beta+\gamma+\delta}{2}\int_{0}^{H}\int_{-\infty}^{+\infty}sG(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]K(\xi) := LK(\xi).\tag{25}$$

由 $G$ 的假设和 $0<c<c^*$ 可知，$L$ 是有界的且 $K(\cdot)$ 是非减函数.则对 $\forall\omega>0$，有

$$\int_{-\infty}^{\xi}K(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}K(\xi-t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{0}^{\omega}K(\xi-t)\mathrm{d}t>\omega K(\xi-\omega).$$

从而由式(25)可得 $((\beta-\gamma-\delta)/2)\omega K(\xi-\omega)<L\,K(\xi)$，$\xi<\xi^*$.则存在 $\omega$，使得 $K(\xi-\omega)<K(\xi)/2$ 成立.令 $\mu_0\in(0,\lambda_1)$，定义 $P(\xi)=K(\xi)\mathrm{e}^{-\mu_0\xi}$，则可选择适当的 $\mu_0$，使得 $P(\xi-\omega)<P(\xi)$ 成立.事实上，令 $\mu<\min\{\lambda_1,(1/\omega)\ln 2\}$，则当 $\xi\to-\infty$ 时，$P(\xi)$ 是有界的.从而存在常数 $K_0>0$，使得对 $\forall\xi\in\mathbf{R}$，有 $K(\xi)\leqslant K_0\mathrm{e}^{\mu\xi}$.由 $K(\xi)$ 的定义可得 $\sup_{\xi\in\mathbf{R}} I(\xi)\mathrm{e}^{-\mu\xi}<+\infty$.又因为

$$\mathrm{e}^{-\mu_0\xi}J*I(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{-\mu_0 y}I(\xi-y)\mathrm{e}^{-\mu_0(\xi-y)}\mathrm{d}y<+\infty,$$

$$\mathrm{e}^{-\mu_0\xi}G*I(\xi)=\int_{0}^{H}\int_{-\infty}^{+\infty}G(y,s)\mathrm{e}^{-\mu_0(y+cs)}I(\xi-y-cs)\mathrm{e}^{-\mu_0(\xi-y-cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s<+\infty.$$

由系统(6)的第二个方程可得：对 $\forall\xi\in\mathbf{R}$，$I'(\xi)\mathrm{e}^{-\mu_0\xi}<+\infty$.从而可得

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}}\{J*I(\xi)\mathrm{e}^{-\mu_0\xi}\}<+\infty,\ \sup_{\xi\in\mathbf{R}}\{G*I(\xi)\mathrm{e}^{-\mu_0\xi}\}<+\infty,$$

$$\sup_{\xi\in\mathbf{R}}\{I'(\xi)\mathrm{e}^{-\mu_0\xi}\}<+\infty.$$

选择 $\eta(\cdot)\in C^{\infty}(\mathbf{R},[0,1])$，$\eta(x)$ 是非负非减函数且满足当 $x\in(-\infty,-2]$ 时，$\eta(x)=0$. 当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$\eta(x)=1$. 令 $\eta_N(x)=\eta(x/N)$，对系统(6)的第三个方程两边乘以 $\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)$，并在 $\mathbf{R}$ 上积分可得

$$\begin{aligned}&c\int_{\mathbf{R}}R'(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)\mathrm{d}\xi=\\&\quad d_3\int_{\mathbf{R}}(J*R(\xi)-R(\xi))\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)\mathrm{d}\xi+\gamma\int_{\mathbf{R}}I(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

因为

$$\int_{\mathbf{R}}J*R(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)\mathrm{d}\xi\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}R(y)\mathrm{e}^{-vy}\int_{-\infty}^{+\infty}J(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

和

$$\int_{\mathbf{R}}R'(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)\mathrm{d}\xi=v\int_{\mathbf{R}}R(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_{\mathbf{R}}R(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta'_N(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

所以

$$\begin{aligned}&(cv+d_3)\int_{\mathbf{R}}R(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)\mathrm{d}\xi-c\int_{\mathbf{R}}R(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta'_N(\xi)\mathrm{d}\xi-\\&\quad d_3\int_{-\infty}^{+\infty}J(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{+\infty}R(y)\mathrm{e}^{-vy}\mathrm{d}y\leqslant\gamma\int_{\mathbf{R}}I(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\eta_N(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\tag{26}$$

由第 1 节定义的 $\Delta(\lambda,c)$ 可知，对 $\forall 0<v<\lambda_0$，有

$$\Delta(v,c)=cv-d_3\left(\int_{-\infty}^{+\infty}J(z)\mathrm{e}^{-vz}\mathrm{d}z-1\right)>0.$$

所以在式(26)中，令 $N\to+\infty$，可得

$$\int_{\mathbf{R}}R(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\mathrm{d}\xi\leqslant\frac{\gamma}{\Delta(\lambda,c)}\int_{\mathbf{R}}I(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\mathrm{d}\xi.$$

即可得

$$\int_{\mathbf{R}} R(\xi)\mathrm{e}^{-v\xi}\mathrm{d}\xi < +\infty, \qquad v \in (0,\lambda_0).$$

由于 $\dfrac{G*I+R}{S+G*I+R} \leqslant 1$ 且当 $x \to -\infty$ 时，$S+G*I+R \to S_0$，从而有

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{G*I(G*I+R)\mathrm{e}^{-\mu\xi}}{S+G*I+R}\mathrm{d}\xi \leqslant \sup_{\xi\to+\infty} G*I(\xi)\mathrm{e}^{-\mu_0\xi}\int_{\mathbf{R}} \frac{(G*I+R)\mathrm{e}^{-(\mu-\mu_0)\xi}}{S+G*I+R}\mathrm{d}\xi < +\infty,$$

其中 $\mu \in (\mu_0, \mu+\mu_0)$. 对系统(6)的第二个方程变形可得

$$d_2[J*I(\xi)-I(\xi)] - cI'(\xi) + \beta G*I(\xi) - (\gamma+\delta)I(\xi) =$$
$$\beta\left[G*I(\xi) - \frac{S(\xi)G*I(\xi)}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)}\right].$$

对上式两边做 Laplace 变换可得

$$f(\lambda,c)\pounds(\lambda) = \beta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G*I(\xi)(G*I(\xi)+R(\xi))\mathrm{e}^{-\lambda\xi}}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)}\mathrm{d}\xi, \tag{27}$$

其中 $\pounds(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\mathrm{d}\xi, 0 < \mathrm{Re}\,\lambda < \mu_0$. 由 Laplace 变换的性质可得，式(27)右边在 $\lambda \in \mathbf{C}, 0 < \mathrm{Re}\,\lambda < \infty$ 上有定义，且当 $0 < c < c^*$ 时，对所有 $\lambda > 0$，都有 $f(\lambda,c) > 0$，从而可得 $\pounds(\lambda)$ 的定义域为 $\lambda \in \mathbf{C}, 0 < \mathrm{Re}\,\lambda < \infty$. 但对式(27)整理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\left[f(\lambda,c)I(\xi) - \beta\frac{G*I(\xi)(G*I(\xi)+R(\xi))}{S(\xi)+G*I(\xi)+R(\xi)}\right]\mathrm{d}\xi = 0.$$

事实上，对 $\forall c \in (0, c^*)$，当 $\lambda \to +\infty$ 时，有 $f(\lambda, c) \to +\infty$. 这与上式相矛盾. 故假设不成立. 证毕. □

## 3 总 结

本文考察了一个具有时空时滞的非局部扩散 SIR 模型的行波解问题. 由定理 1~3 得到的临界条件与相应的常微分系统的结论相同，因此可以知道疾病的传播不依赖于个体间的非局部扩散和非局部反应. 由 $\partial f(\lambda,c)/\partial\lambda\,|_{(\lambda^*,c^*)} = 0$ 和 $\Delta(\lambda^*,c^*) = 0$，经计算可得

$$\frac{\mathrm{d}c^*}{\mathrm{d}d_2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)\mathrm{e}^{-\lambda^* y}\mathrm{d}y - 1}{\lambda^* + \beta\lambda^*\int_0^H\int_{-\infty}^{+\infty} G(y,s)\mathrm{e}^{\lambda^*(y-cs)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s} > 0.$$

所以可得感染者的扩散能力越大，疾病传播的最小波速越小. 另外为考察疾病的潜伏期对最小波速 $c^*$ 的影响，可通过选择特殊的核函数 $G(y,s)$ 来考察，选择核函数

$$G(y,s) = \delta(s-\tau)\frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}}\mathrm{e}^{-y^2/4\rho},$$

则有

$$f(\lambda,c) = d_2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y - 1\right) - c\lambda + \beta\mathrm{e}^{\rho\lambda^2-\lambda c\tau} - \gamma - \delta,$$

进一步计算得

$$\frac{\mathrm{d}c^*}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\beta\lambda^* c^*\mathrm{e}^{\rho(\lambda^*)^2-\lambda^* c^*\tau}}{\lambda^* + \beta\lambda^*\tau\mathrm{e}^{\rho(\lambda^*)^2-\lambda^* c^*\tau}} < 0.$$

可得疾病的潜伏期 $\tau$ 的增加会降低疾病传播的最小波速. 与行波解的最小波速 $c^*$ 密切相关的一个问题是渐近传播速度，猜测 $c^*$ 是系统(6) 的渐近传播速度. 但由于该系统不满足比较原

理，因此证明 $c^*$ 是其渐近传播速度比较困难的，这是需要进一步研究的问题.

## 参考文献(References)：


[1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics [J]. *Proceedings of the Royal Society of London*(*Series A*), 1927, **115**(772): 700-721.

[2] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics II: the problem of endemicity[J]. *Proceedings of the Royal Society of London*(*Series A*), 1932, **138**(834): 55-83.

[3] LI Jing, ZOU Xingfu. Modeling spatial spread of infectious disesses with a fixed latent period in a spatially continuous domain[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2009, **71**(18): 2048-2079.

[4] HOSONO Y, LLYAS B. Traveling waves for a simple diffusive epidemic model[J]. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 1995, **5**(7): 935-966.

[5] WU Chufen, WENG Peixuan. Asymptotic speed of propagation and traveling wavefronts for a SIR epidemic model[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*(*Series B*), 2011, **15**(3): 867-892.

[6] KOROBEINIKOV A. Global properties of infectious disease models with nonlinear incidence [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2007, **69**(6): 1871-1886.

[7] WANG Xiangsheng, WANG Haiyan, WU Jianhong. Traveling waves of diffusive predator-prey systems: disease outbreak propagation[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*(*Series A*), 2012, **32**(9): 3303-3324.

[8] MURRARY J D. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*[M]. Berlin: Springer, 2003: 18.

[9] YANG Feiying, LI Wantong, WANG Zhicheng. Traveling waves in a nonlocal dispersal SIR epidemic model[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2015, **23**(7): 129-147.

[10] KENDALL D G. Mathematical models of the spread of infection[J]. *Mathematics & Computer Science in Biology & Medicine*, 1965: 213-225.

[11] DIEKMANN O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1978, **6**(2): 109-130.

[12] THIEME H R. A model for the spatial spread of an epidemic[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1977, **4**(4): 337-351.

[13] THIEME H R. The asymptotic behaviour of solutions of nonlinear integral equations[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1977, **157**(2): 141-154.

[14] HUANG G, TAKEUCHI Y. Global analysis on delay epidemiological dynamic models with nonlinear incidence[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2011, **63**(1): 125-139.

[15] BERETTA E, TAKEUCHI Y. Global stability of an SIR epidemic model with time delays[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1995, **33**(3): 250-260.

[16] BAI Zhenguo, ZHANG Shengli. Traveling waves of a diffusive SIR epidemic model with a class of nonlinear incidence rates and distributed delay[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, **22**(1/3): 1370-1381.

[17] BRITTON N F. Spatial structures and periodic traveling waves in an intergo-differential reaction-diffusion population model[M]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1990, **50**(6): 1663-1688.

[18] GOURLEY S A, SO J W H, WU Jianhong. Nonlocality of reaction-diffusion equations induced

by delay: biological modeling and nonlinear dynamics[J]. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, **124**(4): 5119-5153.

[19] YANG Feiying, LI Yan, LI Wantong, et al. Traveling waves in a nonlocal dispersal Kermack-Mckendrick epidemic model[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* (*Series B*), 2013, **18**(7): 1969-1993.

[20] ZHAO Haiqin, WU Shiliang, LIU Sanyang. Pulsating traveling fronts and entire solutions in a discrete periodic system with a quiescent stage[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(8): 2164-2176.

# Traveling Wave Solutions for Nonlocal Dispersal SIR Models With Spatio-Temporal Delays

ZOU Xia

(*School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *P.R.China*)

**Abstract**: In view of the infected individuals with the ability to move freely and spread disease, the traveling wave solutions for nonlocal dispersal SIR models with spatio-temporal delays were investigated. The threshold dynamics was determined by means of the basic reproduction number and the minimal wave speed. Firstly, based on Schauder's fixed point theorem, the existence of fixed points on the cone was proved through construction of an invariant cone of the initial function on a bounded region. Then, the non-existence of traveling wave solutions was verified through the two-sided Laplace transform. Since the minimum propagation velocity of the traveling wave solution had important practical significance to control the disease transmission, the influences of the nonlocal diffusion term and the delay on the minimum wave velocity of the disease were discussed.

**Key words**: nonlocal dispersal; traveling wave solution; SIR model; Schauder's fixed point theorem

**Foundation item**: The National Natural Science Foundation of China(11671315)

引用本文/Cite this paper:

邹霞. 具有时空时滞的非局部扩散 SIR 模型的行波解[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(5): 611-630.

ZOU Xia. Traveling wave solutions for nonlocal dispersal SIR models with spatio-temporal delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(5): 611-630.