文章编号:1000-0887(2017)07-0818-09

一类含参数分数阶微分方程边值问题正解的性质研究*

冯海星[1], 翟成波[2]

(1. 山西财经大学 应用数学学院, 太原 030031;
2. 山西大学 数学科学学院, 太原 030006)

(我刊编委唐三一推荐)

摘要: 研究了一类含参数的分数阶微分方程边值问题,主要运用锥上的不动点定理及混合单调算子特征值问题的性质得出了正解关于参数的性质:存在唯一性、单调性、连续性以及极限性质.最后举例说明了结果的可行性.

关 键 词: 分数阶微分方程; 正解; 存在唯一性; 参数; 混合单调算子

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A doi:10.21656/1000-0887.380124

引 言

近年来,人们对分数阶微分方程的关注越来越多,主要是因为它在不同领域中有很好的应用.例如:在物理学、化学、单子学以及生物工程等领域中都有涉及.因此,许多学者对分数阶微分方程解的存在性研究做了详细的探讨[1-21].在这些文献中,作者运用 Schauder 不动点原理、Krasnosel'skii 不动点原理以及其他的不动点原理等对分数阶微分方程解的存在性做了大量的研究.但是,对分数阶微分方程解的唯一性研究并不是很多,可见文献[12-18]等.

文献[17]研究了如下非线性分数阶微分方程边值问题正解的存在唯一性:

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+\lambda f(t,u(t),u(t))=0, & 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=u'(1)=0, \end{cases}$$

其中 $2<\alpha\leqslant 3$, $D_{0^+}^{\alpha}(\cdot)$ 是 Riemann-Liouville 导数, λ 是正参数.其方法是混合单调算子的不动点定理.

文献[18]研究了如下分数阶微分方程边值问题正解的存在唯一性:

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))+g(t,u(t))=0, & 0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=0,\ u(1)=\int_0^1 q(s)u(s)\,\mathrm{d}s, \end{cases}$$

* **收稿日期:** 2017-05-05; **修订日期:** 2017-05-25
基金项目: 国家自然科学基金(11201272);山西省自然科学基金(2015011005);2015 山西省 131 人才项目
作者简介: 冯海星(1981—),女,硕士(E-mail: seastar1981@126.com);
翟成波(1977—),男,博士(通讯作者. E-mail: cbzhai@sxu.edu.cn).

其中 α, $D_{0^+}^{\alpha}(\cdot)$ 同上.所用方法是和算子的不动点定理.

受上述文献的启发,本文主要研究如下形式的非线性分数阶微分方程边值问题正解的存在唯一性:

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) + \lambda f(t,u(t),u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0,\ u(1) = \int_0^1 q(s)u(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{1}$$

其中 α, $D_{0^+}^{\alpha}(\cdot)$, λ 同上, f: $[0,1] \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是连续的, 函数 $q(s)$ 满足如下条件:

(Q) q: $[0,1] \to [0,\infty)$, $q \in L^1[0,1]$,

$$\sigma_1 = \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)q(s)\mathrm{d}s > 0,\ \sigma_2 = \int_0^1 s^{\alpha-1}q(s)\mathrm{d}s < 1.$$

众所周知, 分数阶微分方程积分边值问题在实际中有很多的应用, 譬如血流问题、化学工程问题、热弹性力学问题、地下水流问题以及人口动力系统等.因此对方程(1)的研究有很重要的意义.

后文中,首先给出了用到的定义、引理及定理, 其次给出了主要结论, 最后举例说明了结论的可行性.

1 预 备 知 识

定义 1[12] 函数 y:$(0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Riemann-Liouville 积分是指

$$I_{0^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t, \qquad x > 0.$$

定义 2[12] 函数 y:$(0, +\infty) \to \mathbf{R}$ 的 $\alpha > 0$ 阶 Riemann-Liouville 微分是指

$$D_{0^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}t,$$

其中 $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ 表示取整.

引理 1[19] 当 y 在 $[0,1]$ 上是连续的,即 $y \in C[0,1]$, $2 < \alpha \leqslant 3$, 则如下的边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

有解

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1],$$

其中

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-2}, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

这里 $G(t,s)$ 是上述边值问题的 Green(格林)函数.

引理 2[20] 假设(Q)成立.当 $y \in C[0,1]$, $2 < \alpha \leqslant 3$, 则如下边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0,\ u(1) = \int_0^1 q(t)u(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

有解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=G_1(t,s)+G_2(t,s),\qquad (t,s)\in[0,1]\times[0,1],\tag{2}$$

$$G_1(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\end{cases}\tag{3}$$

$$G_2(t,s)=\frac{t^{\alpha-1}}{1-\sigma_2}\int_0^1 G_1(\tau,s)q(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\tag{4}$$

这里 $G_1(t,s)$, $G_2(t,s)$ 是上述边值问题的 Green 函数.

引理 3[18] 由式(2)定义的函数 $G(t,s)$ 有如下性质:

$$\frac{\sigma_1 s(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)}\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)},\qquad t,\ s\in[0,1].$$

下面介绍一些符号和已知的结果, 具体细节请参考文献[5,22].

假设 $(E,\|\cdot\|)$ 是实 Banach(巴拿赫)空间, θ 是 E 的零元素.非空的闭凸集 $P\subset E$ 称为锥,如果满足如下条件:(a) $x\in P,\lambda\geqslant 0\Rightarrow\lambda x\in P$; (b) $x\in P,\ -x\in P\Rightarrow x=\theta$.则 E 就定义了序, $x\leqslant y$ 当且仅当 $y-x\in P$.锥 P 称为正规的, 如果存在一个常数 $N>0$,使得对于任意的 $x,y\in E$, $\theta\leqslant x\leqslant y$ 使得 $\|x\|\leqslant N\|y\|$; 在此情况下, N 叫做 P 的正规常数.称算子 A: $E\to E$ 是单增(单减)的,如果对于 $x\leqslant y$ 使得 $Ax\leqslant Ay$ ($Ax\geqslant Ay$).对于任意 $x,y\in E$, $x\sim y$ 表示存在 $\lambda>0$ 和 $\mu>0$, 使得 $\lambda x\leqslant y\leqslant\mu x$.所以,“$\sim$”是一个等价关系.对于 $h>\theta$($h\geqslant\theta$ 和 $h\neq\theta$), 定义 $P_h=\{x\in E\mid x\sim h\}$,容易得出 $P_h\subset P$.

定义 3[21,23] $A:P\times P\to P$ 称为混合单调算子, 如果满足:$A(x,y)$ 关于 x 是单增的, 关于 y 是单减的,即如果 $u_i,v_i(i=1,2)\in P$, $u_1\leqslant u_2$, $v_1\geqslant v_2$,则有 $A(u_1,v_1)\leqslant A(u_2,v_2)$.当 $A(x,x)=x$,称 x 是 A 的不动点.

文献[21]讨论了算子方程

$$A(x,x)=x,\ A(x,x)=\lambda x,$$

其中 A: $P\times P\to P$ 是混合算子且满足如下条件:

(A1) 存在 $h\in P,h\neq\theta$, 使得 $A(h,h)\in P_h$.

(A2) 对于 $t\in(0,1)$, 存在 $\varphi(t)\in(t,1)$, 使得

$$A(tu,v/t)\geqslant\varphi(t)A(u,v),\qquad\forall u,v\in P.$$

得到了上述方程正解的存在唯一性以及特征值问题的结果.

定理 1[21] 假设 P 是 E 中的正规锥且条件(A1)、(A2)成立,则算子 A 有唯一的不动点 $x^*\in P_h$.此外,对于任意初值 $x_0,y_0\in P_h$, 构建序列

$$x_n=A(x_{n-1},y_{n-1}),\ y_n=A(y_{n-1},x_{n-1}),\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

就有

$$\|x_n-x^*\|\to 0,\ \|y_n-x^*\|\to 0\qquad(n\to\infty).$$

定理 2[21] 假设 P 是 E 中的正规锥且条件(A1)、(A2)成立,记 x_λ ($\lambda>0$) 是非线性特征值方程 $A(x,x)=\lambda x$ 在 P_h 中的唯一解, 则有如下结论:

(R1) 如果 $\varphi(t)>t^{1/2}$, $t\in(0,1)$, 则 x_λ 关于 λ 是单减的,即当 $0<\lambda_1<\lambda_2$ 时,有 $x_{\lambda_1}>x_{\lambda_2}$.

(R2) 如果存在 $\beta\in(0,1)$ 使得 $\varphi(t)\geqslant t^\beta$, $t\in(0,1)$,则 x_λ 关于 λ 是连续的,即当 $\lambda\to$

$\lambda_0(\lambda_0 > 0)$ 时,有 $\| x_\lambda - x_{\lambda_0} \| \to 0$.

(R3) 如果存在 $\beta \in (0,1/2)$ 使得 $\varphi(t) \geq t^\beta, t \in (0,1)$, 则 $\lim_{\lambda\to\infty} \| x_\lambda \| = 0$, $\lim_{\lambda\to 0^+} \| x_\lambda \| = \infty$.

2 主要结果

本节将运用定理 1 和定理 2 来研究方程(1),得到关于正解的一些新结论.在如下的 Banach 空间中进行讨论: $C[0,1] = \{x:[0,1] \to \mathbf{R}$ 是连续的$\}$, 它的范数是 $\| x \| = \sup\{ | x(t) | : t \in [0,1]\}$. 令 $P = \{x \in C[0,1] \mid x(t) \geq 0, t \in [0,1]\}$, 则 P 是正规锥,且正规常数是 1.则这个空间就有如下的半序:

$$x,y \in C[0,1],\ x \leq y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t), \qquad t \in [0,1].$$

定理 3 假设

(H1) 固定 $t \in [0,1], y \in [0,+\infty)$, $f(t,x,y)$ 关于 x 是单增的;固定 $t \in [0,1], x \in [0,+\infty)$, $f(t,x,y)$ 关于 y 是单减的,且 $f(t,0,1) \not\equiv 0, t \in [0,1]$;

(H2) 对于 $\gamma \in (0,1)$,存在常数 $\varphi_1(\gamma), \varphi_2(\gamma) \in (0,1)$,且 $\varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma) > \gamma$, 使得

$$f(t,\gamma x,y) \geq \varphi_1(\gamma) f(t,x,y),\ f(t,x,\gamma y) \leq \frac{1}{\varphi_2(\gamma)} f(t,x,y), \qquad x,y \in [0,+\infty).$$

则有:

(a1) 对于任意的 $\lambda > 0$, 方程(1) 有唯一正解 $u_\lambda^* \in P_h$, 其中 $h(t) = t^{\alpha-1}$, $t \in [0,1]$.此外,对于任意的初始值 $u_0, v_0 \in P_h$, 构建如下序列:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,u_n(s),v_n(s))\,\mathrm{d}s, \\ v_{n+1} = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,v_n(s),u_n(s))\,\mathrm{d}s, \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

就有

$$u_n(t) \to u_\lambda^*(t),\ v_n(t) \to u_\lambda^*(t) \qquad (n \to \infty),$$

其中 $G(t,s)$ 由引理 2 给出.

(a2) 如果 $\varphi_1(t)\varphi_2(t) > t^{1/2}$, $t \in [0,1]$,则 u_λ^* 关于 λ 是单增的,即对于 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, 有 $u_{\lambda_1}^* \leq u_{\lambda_2}^*, u_{\lambda_1}^* \neq u_{\lambda_2}^*$.

(a3) 如果存在 $\beta \in (0,1)$, 使得 $\varphi_1(t)\varphi_2(t) \geq t^\beta$, $t \in (0,1)$, 则 u_λ^* 关于 λ 是连续的,即当 $\lambda \to \lambda_0(\lambda_0 > 0)$ 时,有 $\| u_\lambda^* - u_{\lambda_0}^* \| \to 0$.

(a4) 如果存在 $\beta \in (0,1/2)$, 使得 $\varphi_1(t)\varphi_2(t) \geq t^\beta$, $t \in (0,1)$,则 $\lim_{\lambda\to 0^+} \| u_\lambda^* \| = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} \| u_\lambda^* \| = \infty$.

证明 由引理 2 知, 方程(1)等价于积分形式

$$u(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s),u(s))\,\mathrm{d}s,$$

其中 $G(t,s)$ 由引理 2 给出.对于 $u,v \in P$, 定义如下算子:

$$A(u,v)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s),v(s))\,\mathrm{d}s.$$

注意到 $f(t,x,y) \geq 0$, $G(t,s) > 0$, 显然有 $A: P \times P \to P$.

下面检验算子 A 满足定理 1 的所有条件.

首先证明 A 是一个混合单调算子.事实上，对于 $u_i, v_i \in P, i=1,2$，当 $u_1 \geqslant u_2$，$v_1 \leqslant v_2$，有 $u_1(t) \geqslant u_2(t)$，$v_1(t) \leqslant v_2(t)$，$t \in [0,1]$.由假设(H1)及引理 3 得

$$A(u_1,v_1)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u_1(s),v_1(s))\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_0^1 G(t,s)f(s,u_2(s),v_2(s))\mathrm{d}s = A(u_2,v_2)(t),$$

即
$$A(u_1,v_1)(t) \geqslant A(u_2,v_2)(t).$$

其次证明 A 满足(A2)的条件.由假设(H2)，对于 $\gamma \in (0,1)$，有 $f(t,x,y/\gamma) \geqslant \varphi_2(\gamma)f(t,x,y), x,y \in [0,+\infty)$，则对于 $\gamma \in (0,1), u,v \in P$，可以得到

$$A\left(\gamma u, \frac{1}{\gamma} v\right)(t) = \int_0^1 G(t,s)f\left(s, \gamma u(s), \frac{1}{\gamma} v(s)\right)\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_0^1 G(t,s)\varphi_1(\gamma)f\left(s, u(s), \frac{1}{\gamma} v(s)\right)\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_0^1 G(t,s)\varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s =$$

$$\varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma)A(u,v)(t), \qquad t \in [0,1].$$

令 $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$，$t \in (0,1)$，则 $\varphi(t) \in (t,1), t \in (0,1)$，因此有

$$A\left(\gamma u, \frac{1}{\gamma} v\right) \geqslant \varphi(\gamma)A(u,v), \qquad u,v \in P,\ \gamma \in (0,1).$$

即 A 满足(A2)的条件.

最后证明 $A(h,h) \in P_h$.一方面，由假设(H1)、(H2)及引理 3，有

$$A(h,h)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,h(s),h(s))\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^1 G(t,s)f(s,s^{\alpha-1},s^{\alpha-1})\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_0^1 \frac{\sigma_1 s(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} f(s,s^{\alpha-1},s^{\alpha-1})\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_0^1 \frac{\sigma_1 s(1-s)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} f(s,0,1)\mathrm{d}s =$$

$$\frac{\sigma_1}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} h(t)\int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1}f(s,0,1)\mathrm{d}s.$$

另一方面，由假设(H1)、(H2)及引理 3，有

$$A(h,h)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,h(s),h(s))\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^1 G(t,s)f(s,s^{\alpha-1},s^{\alpha-1})\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} f(s,s^{\alpha-1},s^{\alpha-1})\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} f(s,1,0)\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} h(t)\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}f(s,1,0)\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,1].$$

令

$$r_1 = \int_0^1 s(1-s)^{\alpha-1} f(s,0,1)\,\mathrm{d}s,\ r_2 = \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,1,0)\,\mathrm{d}s,$$

则由假设(H1)可知, $r_2 \geqslant r_1 > 0$.从而有

$$\begin{cases} A(h,h)(t) \geqslant \dfrac{r_1}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} h(t), \\ A(h,h)(t) \leqslant \dfrac{r_2}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} h(t), \end{cases} \quad t \in [0,1].$$

所以有

$$\frac{r_1}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} h \leqslant A(h,h) \leqslant \frac{r_2}{(1-\sigma_2)\Gamma(\alpha)} h,$$

即 $A(h,h) \in P_h$, 所以定理 1 的条件(A1)满足.因此,由定理 2 有如下结论:

(i) 存在唯一的 $u_\lambda^* \in P_h$,使得 $A(u_\lambda^*,u_\lambda^*) = (1/\lambda) u_\lambda^*$,即 $u_\lambda^* = \lambda A(u_\lambda^*,u_\lambda^*)$,因此 u_λ^* 是方程(1)的唯一正解.

(ii) 如果 $\varphi(t) > t^{1/2}, t \in (0,1)$,则 u_λ^* 关于 λ 是单增的,即 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, 有 $u_{\lambda_1}^* \leqslant u_{\lambda_2}^*$, $u_{\lambda_1}^* \neq u_{\lambda_2}^*$.

(iii) 如果 $\beta \in (0,1)$,使得 $\varphi(t) \geqslant t^\beta$, $t \in (0,1)$,则 x_λ 关于 λ 连续, 且当 $\lambda \to \lambda_0 (\lambda_0 > 0)$ 时,有 $\| u_\lambda^* - u_{\lambda_0}^* \| \to 0$.

(iv) 如果 $\beta \in (0,1/2)$, 使得 $\varphi(t) \geqslant t^\beta, t \in (0,1)$, 则 $\lim_{\lambda\to 0^+} \| u_\lambda^* \| = 0, \lim_{\lambda\to\infty} \| u_\lambda^* \| = \infty$.

令 $A_\lambda = \lambda A$, 则 A_λ 满足定理 1 的所有条件,所以对于任意初始值 $u_0, v_0 \in P_h$,构建序列 $u_{n+1} = A_\lambda(u_n,v_n), v_{n+1} = A_\lambda(v_n,u_n)$, $n = 0,1,2,\cdots$,有 $u_n \to u_\lambda^*$, $v_n \to u_\lambda^*$, $n \to \infty$, 即

$$u_{n+1}(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,u_n(s),v_n(s))\,\mathrm{d}s \to u_\lambda^*(t), \qquad n \to \infty,$$

$$v_{n+1}(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s) f(s,v_n(s),u_n(s))\,\mathrm{d}s \to u_\lambda^*(t), \qquad n \to \infty.$$

注 1 令 $f(t,x,y) = c > 0$, 则假设(H1)、(H2)满足,方程(1)有唯一解 $u_\lambda(t) = \lambda c \int_0^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s, t \in [0,1]$.由引理 2, u_λ 为正解且满足 $u_\lambda \in P_h = P_{t^{\alpha-1}}$.

注 2 本文研究带有参数的分数阶微分方程边值问题, 而文献研究的多为无参数问题,给出了正解的存在性、唯一性以及多解性.而本文则研究了正解与参数的关系,当 $\lambda = 1$, 本文结果就是正解的存在唯一性,方法是混合单调算子.这对于分数阶积分边值问题也是很少见的.文献[18]利用和算子方程的结果给出了正解的存在唯一性结果.本文对于任意的正参数都有正解的唯一性, 并且正解关于参数有较好的性质,如连续性、单调性等.这种结果在文献中也很少见.

3 举 例

例 1 考虑如下问题:

$$\begin{cases} D_{0^+}^{2.2} u(t) + \lambda [u^{1/5}(t) + (u(t)+5)^{-1/4}] = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0,\ u(1) = \int_0^1 s^2 u(s)\,\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{5}$$

在本例中, $\alpha = 2.2$, $q(t) = t^2$, 则 $q: [0,1] \to [0, +\infty)$ 且

$$q \in L^1[0,1],\ \sigma_1 = \int_0^1 s^{1.2}(1-s)s^2 \mathrm{d}s = \frac{25}{546} > 0,\ \sigma_2 = \int_0^1 s^{1.2}s^2 \mathrm{d}s = \frac{5}{21} < 1,$$

显然 $f(t,x,y)$ 关于 x 单增, 关于 y 单减.进一步有 $f(t,0,1) = 6^{-1/4} \not\equiv 0$.令 $\varphi_1(\gamma) = \gamma^{1/5}$, $\varphi_2(\gamma) = \gamma^{1/4}$, $\gamma \in (0,1)$,则有 $\varphi_1(\gamma)\varphi_2(\gamma) = \gamma^{9/20} > \gamma$, 且有

$$\begin{aligned} f(t,\gamma x,y) &= \gamma^{1/5}x^{1/5} + (y+5)^{-1/4} \geqslant \\ &\gamma^{1/5}[x^{1/5} + (y+5)^{-1/4}] = \varphi_1(\gamma)f(t,x,y), \qquad t \in [0,1],\ x,y \geqslant 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t,x,\gamma y) &= x^{1/5} + (y+5)^{-1/4}\frac{1}{\gamma^{1/4}} \leqslant \\ &\frac{1}{\gamma^{1/4}}[x^{1/5} + (y+5)^{-1/4}] = \frac{1}{\varphi_2(\gamma)}f(t,x,y), \qquad t \in [0,1],\ x,y \geqslant 0. \end{aligned}$$

因此, 定理 3 的所有条件都满足, 则式(5)有唯一正解 $u_\lambda^* \in P_h = P_{t^{\alpha-1}}$,且对于任意初始值 u_0, $v_0 \in P_h$, 构建序列

$$\begin{cases} u_{n+1}(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)[u_n^{1/5}(s) + (v_n(s)+5)^{-1/4}]\mathrm{d}s, \\ v_{n+1}(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)[v_n^{1/5}(s) + (u_n(s)+5)^{-1/4}]\mathrm{d}s, \end{cases} \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

有 $u_n(t) \to u_\lambda^*(t)$, $v_n(t) \to u_\lambda^*(t)$, $n \to \infty$,其中 $G(t,s)$ 由引理2给出.同时注意到 $\varphi_1(t)\varphi_2(t) = t^{9/20} > t^{1/2}$, $t \in (0,1)$, 则由定理3可得, u_λ^* 关于 λ 单增,即当 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 时, 有 $u_{\lambda_1}^* \leqslant u_{\lambda_2}^*$, $u_{\lambda_1}^* \neq u_{\lambda_2}^*$; u_λ^* 是连续的且有 $\lim_{\lambda\to0^+}\|u_\lambda^*\| = 0$, $\lim_{\lambda\to\infty}\|u_\lambda^*\| = \infty$.

4 结 论

本文讨论了一类含参数的分数阶微分方程边值问题,这类边值条件中含有积分.本文首先将微分方程边值问题转化为积分方程问题,在函数空间中利用半序方法研究.然后建立适当的正规锥和混合单调算子,利用算子正不动点与参数的关系,给出了边值问题正解具有的性质:关于固定的参数有存在唯一性,关于参数有连续性、单调递增性以及极限性质等.最后,提供一个例子说明结果的合理性.因此,本文提供了研究分数阶边值问题的一个思路,在微分方程中有广泛的应用.

致谢 本文作者衷心感谢山西财经大学青年基金(2014026)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] Oldham K B, Spanier J. *The Fractional Calculus*[M]. New York: Academic Press, 1974.

[2] Samko S G, Kilbas A A , Marichev O I. *Fractional Integrals and Derivatives*: *Theory and Applications*[M]. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[3] Metzler F, Schick W, Kilian H G, et al. Relaxation in filled polymers: a fractional calculus approach[J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1995, **103**(16): 7180-7186.

[4] Goodrich C S. On discrete sequential fractional boundary value problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **385**(1): 111-124.

[5] Lakshmikantham V. Theory of fractional functional differential equations[J]. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, 2008, **69**(10): 3337-3343.

[6] Kosmatov N. A singular boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2009, **29**(1): 125-135.

[7] BAI Zhan-bing, LÜ Hai-shen. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, **311**(2): 495-505.

[8] LI Ya-ling, LIN Shi-you. Boundary value problem for a coupled system of nonlinear fractional differential equations[J]. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2013, **212**: 139-145.

[9] ZHANG Shu-qing. Positive solutions to singular boundary value problem for nonlinear fractional differential equation[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2010, **59**(3): 1300-1309.

[10] Ferreira R A C. Positive solutions for a class of boundary value problems with fractional q-differences[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2011, **61**(2): 367-373.

[11] YUAN Cheng-jun. Two positive solutions for $(n-1, 1)$-type semipositone integral boundary value problems for coupled systems of nonlinear fractional differential equations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, **17**(2): 930-942.

[12] Mena C J, Harjani J, Sadarangani K. Existence and uniqueness of positive and nondecreasing solutions for a class of singular fractional boundary value problems[J]. *Boundary Value Problems*, 2009, **2009**: 1-10. doi: 10.1155/2009/421310.

[13] YANG Liu, CHEN Hai-bo. Unique positive solutions for fractional differential equation boundary value problems[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2010, **23**(9): 1095-1098.

[14] LIANG Si-hua, ZHANG Ji-hui. Existence and uniqueness of strictly nondecreasing and positive solution for a fractional three-point boundary value problem[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2011, **62**(3): 1333-1340.

[15] YANG Chen, ZHAI Cheng-bo. Uniqueness of positive solutions for a fractional differential equation via a fixed point theorem of a sum operator[J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2012(70): 808-826.

[16] ZHAI Cheng-bo, YAN Wei-ping, YANG Chen. A sum operator method for the existence and uniqueness of positive solutions to Riemann-Liouville fractional differential equation boundary value problems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(4): 858-866.

[17] YANG Chen. Existence and uniqueness of positive solutions for boundary value problems of a fractional differential equation with a parameter[J]. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 2015, **44**(3): 659-667.

[18] FENG Hai-xing , ZHAI Cheng-bo. Existence and uniqueness of positive solutions for a class of fractional differential equation with integral boundary conditions[J]. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2017, **22**(2): 160-172.

[19] El-Shahed M, Al-Askar F M. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional q-differential equation[J]. *Isrn Mathematical Analysis*, 2011(11): 5545-5550.

[20] ZHAO Xiang-kui, CHAI Cheng-wen, GE Wei-gao. Existence and nonexistence results for a class of fractional boundary value problems[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2013, **41**(1): 17-31.

[21] ZHAI Cheng-bo, ZHANG Ling-ling. New fixed point theorems for mixed monotone operators and local existence-uniqueness of positive solutions for nonlinear boundary value problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, **382**(2): 594-614.

[22] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2000.(GUO Da-jun. *A*

Half Order Method in Nonlinear Analysis [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2000.(in Chinese))

[23] GUO Da-jun, Lakshmikantham V. *Nonlinear Problems in Abstract Cones* [M]. Boston: Academic Press Inc, 1988.

Properties of Positive Solutions to a Class of Fractional Differential Equations With Parameters and Integral Boundary Conditions

FENG Hai-xing[1], ZHAI Cheng-bo[2]

(1. *College of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan* 030031, *P.R.China*;

2. *School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *P.R.China*)

(Recommended by TANG San-yi, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A class of boundary value problems of fractional differential equations with parameters were studied. Based on the fixed point theorem and the properties of the mixed monotone operator eigenvalue problems, some characteristics of positive solutions to the fractional differential equations depending on the parameters were obtained: existence and uniqueness, monotonicity, continuity and limitations. In the end, an example was given to illustrate the rationality of the main results.

Key words: fractional differential equation; positive solution; existence and uniqueness; parameter; mixed monotone operator

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11201272)

引用本文/Cite this paper:

冯海星, 翟成波. 一类含参数分数阶微分方程边值问题正解的性质研究[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(7): 818-826.

FENG Hai-xing, ZHAI Cheng-bo. Properties of positive solutions to a class of fractional differential equations with parameters and integral boundary conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(7): 818-826.