

# 一类非均布载荷下中心裂纹圆盘 $T$ 应力分析\*

彭 凡, 董世明

(四川大学 建筑与环境学院, 成都 610065)

**摘要:** 实际结构中, 岩石常承受非均布载荷作用; 并且试验中, 集中力作用下往往会存在微小的分布角, 这一载荷分布也是非均匀分布的。基于此类情况提出一类非均布载荷, 这种载荷为三角函数形式, 在分布角的中间压力最大, 然后向两边逐渐减小直至为 0。运用径向集中压力下中心裂纹巴西圆盘  $T$  应力解析公式, 在分布角范围内积分获得这类非均布载荷下试件的  $T$  应力解析解, 并同时有限元分析获得数值解。通过比较这两种结果, 发现二者非常吻合, 相互验证了各自分析的正确性。此外, 与均布力作用相比, 同等条件下此类非均布载荷作用的无量纲  $T$  应力值更接近集中力作用的值, 而且两者的数值误差相当小。进一步论证了实际试验中采用集中力加载的  $T$  应力公式是正确与合理的。

**关键词:** 非均布压力; 中心裂纹巴西圆盘;  $T$  应力; 有限元分析

**中图分类号:** O346.1      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.380136

## 引 言

应力强度因子一直是岩石断裂中的重要参数, 一度被认为是控制断裂的唯一因素, 它反映了材料抵抗裂纹扩展失稳的能力。但不少试验发现, 采用最大周向力 (MTS) 准则预测的结果与试验结果出现较大差异性, MTS 准则总是低估了岩石材料的 I 型和 II 型断裂韧度<sup>[1-3]</sup>。这一差异性让研究者纷纷指向 Williams 展开式中的非奇异项, 后面进一步的分析表明裂纹尖端附近的非奇异项常数项 ( $T$  应力) 在裂纹扩展中同样扮演着重要角色, 是不可忽略的一个重要因素, 并且考虑  $T$  应力断裂准则的预测结果将大幅上升, 与试验结果保持非常好的一致性<sup>[2,4-5]</sup>。Fett<sup>[6]</sup> 采用 Green (格林) 函数法和边界配位法计算出一系列不同加载条件和裂纹尺寸下中心裂纹巴西圆盘中的  $T$  应力; Ayatollahi 等<sup>[7]</sup> 运用有限元分析方法得到纯 I 型和复合型加载条件下中心裂纹巴西圆盘中的  $T$  应力, 并提供了一系列不同相对裂纹长度和加载角下的无量纲  $T$  应力值; Hua 等<sup>[8]</sup> 采用权函数法和叠加原理推导出围压和径向集中压力共同作用下中心裂纹巴西圆盘的  $T$  应力封闭形式解, 并可以求出任意裂纹长度和加载角下的  $T$  应力值; 李一凡等<sup>[9]</sup> 运用权函数法导出径向集中力作用下中心裂纹巴西圆盘的  $T$  应力, 并结合微积分思想导出分布力作用下中心裂纹巴西圆盘的  $T$  应力计算公式; 高玉华等<sup>[10]</sup> 运用特征分析法和边界元法求解裂纹尖端  $T$  应力, 并分析得出  $T$  应力对 II 型主导断裂模式有重要影响。

\* 收稿日期: 2017-05-12; 修订日期: 2017-12-26

基金项目: 国家自然科学基金 (11172186); 四川省科技计划 (2018JY0024)

作者简介: 彭凡 (1995—), 男 (E-mail: 1145747505@qq.com);

董世明 (1963—), 男, 教授, 博士 (通讯作者, E-mail: smdong@126.com)。

在岩石类材料断裂性能研究中,巴西圆盘试件属于一类重要的试验试件,Dong 等<sup>[11]</sup>导出了中心裂纹巴西圆盘集中载荷和分布力作用下应力强度因子的封闭形式解,而且巴西圆盘试件具有加载模式多样性的特点,通过改变加载角能够轻易地实现纯 I 型、纯 II 型和复合型模式加载,被广泛地运用于岩石类材料的断裂性能研究中<sup>[11-14]</sup>。以上研究仅限于均布载荷或集中力的情况,但实际应用中载荷往往呈非均匀分布,非均布载荷下试件的  $T$  应力研究尚未有人涉及。因此本文通过运用集中力作用下的  $T$  应力公式,积分获得此类非均布载荷下的  $T$  应力解析解,并进行有限元分析获得  $T$  应力模拟结果,验证理论推导的正确性,并期望此类非均布载荷作用形式下的  $T$  应力能为含  $T$  应力的断裂准则提供参考数据。

## 1 理论分析

对于线弹性材料平面问题,裂纹尖端应力如图 1 所示,以裂纹尖端为原点,裂纹尖端应力的 Williams 展开式的极坐标形式表示如下<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ K_{\text{I}} (3 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + K_{\text{II}} (3 \cos \theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} \right] + \\ T \cos^2 \theta + O(r^{1/2}), \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_{\text{I}} \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{\text{II}} \sin \theta \right] + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}), \\ \sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_{\text{I}} \sin \theta + K_{\text{II}} (3 \cos \theta - 1)] - T \sin \theta \cos \theta + O(r^{1/2}), \end{cases} \quad (1)$$

式中  $K_{\text{I}}$  和  $K_{\text{II}}$  表示 I 和 II 型应力强度因子,第一项表示奇异项应力,在整个式中占主导地位,第二项  $T$  表示 Williams 展开式中的非奇异常数项 ( $T$  应力),后面  $r$  的更高阶项在  $r$  趋近于 0 时,  $r^{1/2}$  及其高阶项一般可以忽略不计。

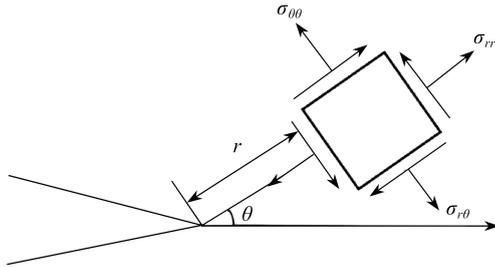


图 1 裂纹尖端应力场

Fig. 1 The stress near the crack tip

前面已经说明了  $T$  应力逐渐在断裂准则中充当重要角色,因此当  $T$  应力日益广泛地运用到各类断裂准则中时,一个重要的研究方向就是分析各类几何形状试件和加载条件下的  $T$  应力,本文将就一类非均布力作用下中心裂纹圆盘中的  $T$  应力进行研究。

图 2 为中心裂纹巴西圆盘试件受径向集中压力作用的示意图,Hua 等<sup>[8]</sup>以及李一凡等<sup>[9]</sup>采用权函数法获得图 1 所示试件的  $T$  应力解析解,其表达式具体如下:

$$T = \sigma f_1 + 2\sigma \sum_{i=1}^n (A_{2i}(\theta) f_i - A_{2i}(\theta) - A_{1i}(\theta)) \alpha^{2(i-1)}, \quad (2)$$

式中  $\sigma = P/(\pi BR)$ ,  $B$  为圆盘试件的厚度,  $\alpha = a/R$ ,  $a$  为裂纹长度的一半,  $R$  表示圆盘试件的半

径,  $\theta$  表示裂纹作用线与加载力之间的夹角(加载角),  $f_i, A_{1i}(\theta)$  及  $A_{2i}(\theta)$  的表达式具体如下:

$$\begin{cases} f_i = \frac{2C_1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{8C_2}{(2i-1)(2i+1)(2i+3)}, \\ C_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}(-6.8622\alpha + 18.1057\alpha^2 - 22.0173\alpha^3 + 9.3229\alpha^4), \\ C_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}(4.1902\alpha - 14.626\alpha^2 + 21.2854\alpha^3 - 9.8117\alpha^4), \\ A_{1i}(\theta) = i\cos(2i\theta) - (i-2)\cos(2(i-1)\theta), \\ A_{2i}(\theta) = i\cos(2i\theta) - i\cos(2(i-1)\theta). \end{cases} \quad (3)$$

$T$  应力的无量纲形式定义如下:

$$T^* = T/\sigma = f_1 + 2 \sum_{i=1}^n (A_{2i}(\theta)f_i - A_{2i}(\theta) - A_{1i}(\theta))\alpha^{2(i-1)}. \quad (4)$$

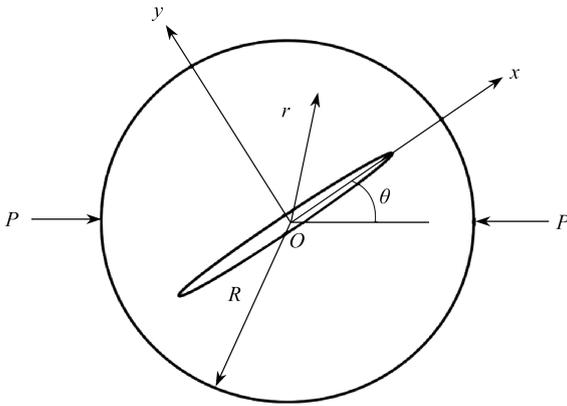


图2 中心裂纹巴西圆盘承受集中力示意图

Fig. 2 Schematic diagram of a CCBBD under concentrated forces

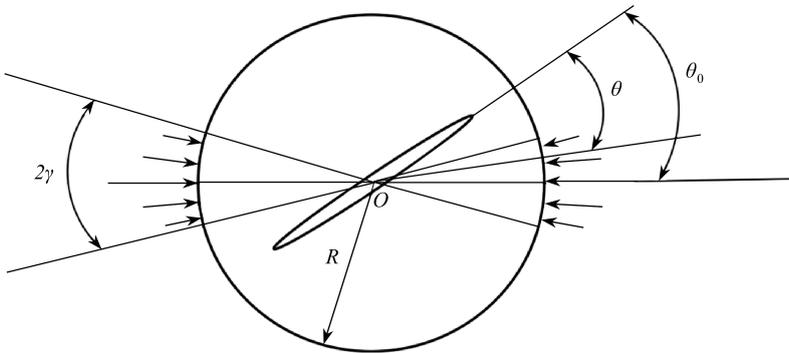


图3 中心裂纹巴西圆盘承受非均布载荷示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the CCBBD under nonuniform load

当加载力、加载角以及圆盘试件的相关数据已知时,根据以上公式可以轻易获得中心裂纹圆盘试件在径向集中压力下的  $T$  应力解,本文研究的载荷分布类型为非均布压力,假设力  $P$  分解成如图3所示的非均布压力载荷,分布角大小为  $2\gamma$ , 加载角  $\theta_0$  表示裂纹线方向与分布角中

心连线的夹角.沿裂纹线方向建立极坐标系,那么非均布压力在圆周上的具体表达式为

$$\sigma = \sigma_0 \cos\left(\frac{\pi}{2\gamma} \theta - \frac{\pi}{2\gamma} \theta_0\right), \quad (5)$$

其中  $\sigma_0$  表示函数幅值,  $\theta_0$  为加载角,此表达式保证了分布角中间加载压力最大,然后加载压力向两边逐渐减小,到分布角的两边时减小为 0.

根据力的平衡条件,可以得到非均布力作用的合力:

$$P = 2 \times \sigma_0 B \int_0^{\theta_0+\gamma} \cos \theta \cos\left(\frac{\pi}{2\gamma} \theta - \frac{\pi}{2\gamma} \theta_0\right) R d\theta = 2\sigma_0 B \times c, \quad (6)$$

其中

$$c = \frac{\gamma \cos \gamma}{\pi - 2\gamma} + \frac{\gamma \cos \gamma}{\pi + 2\gamma}.$$

在非均布力加载圆弧上任取一微小段弧长对应的力:

$$dF = \sigma_0 \cos\left(\frac{\pi}{2\gamma} \theta - \frac{\pi}{2\gamma} \theta_0\right) B R d\theta.$$

将  $dF$  视为集中力,运用径向集中压力作用下  $T$  应力公式可得到  $dF$  作用在  $d\theta$  产生的微小  $T$  应力  $dT$ :

$$dT = \frac{dF}{\pi B R} f_1 + 2 \frac{dF}{\pi B R} \sum_{i=1}^n (A_{2i}(\theta) f_i - A_{2i}(\theta) - A_{1i}(\theta)) \alpha^{2(i-1)} = \frac{\sigma}{2c} \cos\left(\frac{\pi}{2\gamma} \theta - \frac{\pi}{2\gamma} \theta_0\right) \left(f_1 + 2 \sum_{i=1}^n (A_{2i}(\theta) f_i - A_{2i}(\theta) - A_{1i}(\theta)) \alpha^{2(i-1)}\right) d\theta. \quad (7)$$

将得到的  $dT$  在分布角范围内积分可得

$$T = \frac{\sigma}{2c} \int_{\theta_0-\gamma}^{\theta_0+\gamma} \cos\left(\frac{\gamma}{2\pi} \theta - \frac{\gamma}{2\pi} \theta_0\right) \times \left(f_1 + 2 \sum_{i=1}^n (A_{2i}(\theta) f_i - A_{2i}(\theta) - A_{1i}(\theta)) \alpha^{2(i-1)}\right) d\theta = \frac{2\sigma\gamma}{\pi c} f_1 + \frac{\sigma}{c} \int_{\theta_0-\gamma}^{\theta_0+\gamma} \cos\left(\frac{\gamma}{2\pi} \theta - \frac{\gamma}{2\pi} \theta_0\right) \times \sum_{i=1}^n (A_{2i}(\theta) f_i - A_{2i}(\theta) - A_{1i}(\theta)) \alpha^{2(i-1)} d\theta. \quad (8)$$

根据  $A_{1i}(\theta)$  以及  $A_{2i}(\theta)$  的表达式,为了方便积分先定义两个积分式分别如下:

$$B_{1i}(\theta_0) = \int_{\theta_0-\gamma}^{\theta_0+\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{2\gamma} \theta - \frac{\pi}{2\gamma} \theta_0\right) \times \cos(2i\theta) d\theta = \frac{4\pi\gamma \cos(2i\gamma) \cos(2i\theta_0)}{\pi^2 - 16i^2\gamma^2}, \quad (9)$$

$$B_{2i}(\theta_0) = \int_{\theta_0-\gamma}^{\theta_0+\gamma} \cos\left(\frac{\pi}{2\gamma} \theta - \frac{\pi}{2\gamma} \theta_0\right) \times \cos((2i-2)\theta) d\theta = \frac{4\pi\gamma \cos(2(i-1)\gamma) \cos(2(i-1)\theta_0)}{\pi^2 - 16(i-1)^2\gamma^2}. \quad (10)$$

将式(9)、(10)代入式(8)可以得到此类非均布载荷作用下  $T$  应力的计算公式:

$$T = \frac{2\sigma\gamma}{\pi c} f_1 + \frac{\sigma}{c} \sum_{i=1}^n ((iB_{1i}(\theta) - iB_{2i}(\theta))(f_i - 1) -$$

$$(iB_{1i}(\theta) - (i-2)B_{2i}(\theta))\alpha^{2(i-1)}. \quad (11)$$

其无量纲形式定义与集中力一样:

$$T^* = T/\sigma = T = \frac{2\gamma}{\pi c} f_1 + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n ((iB_{1i}(\theta) - iB_{2i}(\theta))(f_i - 1) - (iB_{1i}(\theta) - (i-2)B_{2i}(\theta))\alpha^{2(i-1)}). \quad (12)$$

式(11)和式(12)即为此类非均布力载荷作用下中心裂纹巴西圆盘试件  $T$  应力计算公式。

## 2 有限元分析

### 2.1 有限元分析介绍

上一节分析得到了非均布压力载荷下中心裂纹巴西圆盘的  $T$  应力解析解,为了验证上面推导公式的正确性,采用有限元分析方法分析其中的  $T$  应力.本次研究采用有限元软件 ABAQUS 进行模拟分析,假设试件材料为 PMMA,俗称有机玻璃,其性能优异,价格合理,现广泛地用于生产生活中.它是一种脆性材料,弹性模量为 4.87 GPa,密度  $1\,170\text{ kg/m}^3$ ,Poisson(泊松)比为 0.388.建模分析时设试件半径为 0.01 m,厚度为  $0.005\text{ m}^{[15]}$ .

网格划分大体分为两个部分,裂纹尖端区域和以外的区域,其中裂纹尖端以外的区域采用四边形网格,裂纹尖端区域采用扫掠式网格划分技术,裂纹尖端点会出现一层三角形网格,故单元形状设为四边形为主.总体上网格划分规则合理,ABAQUS 网格检查无任何警告和错误.

分别取相对裂纹长度  $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  进行数值分析,加载角从纯 I 型到纯 II 型,载荷分布角取 4 个角度,分别是  $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$  和  $20^\circ$ .其中有限元分析形成的裂纹尖端网格如图 4 所示.

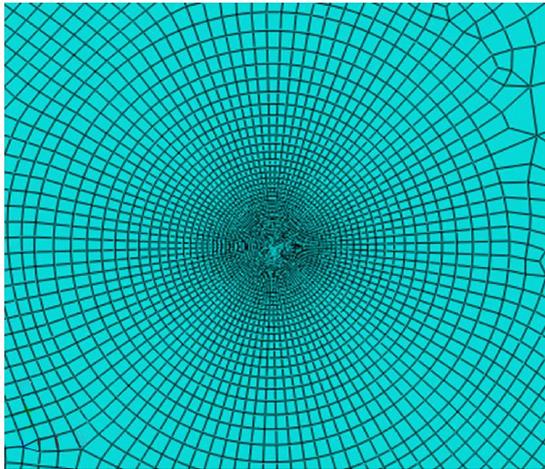


图 4 裂纹尖端区域网格

Fig. 4 The grid at the crack tip

### 2.2 有限元分析结果

不同相对裂纹长度和不同加载条件下  $T$  应力有限元数值分析结果与理论公式结果对比如图 5 所示.图 5 中 N 表示有限元数值解,A 表示理论公式解析解.

从图 5 不难发现纯 I 型以及  $\theta = 5^\circ$  的复合型加载模式下,有限元分析得到的数值解基本与理论公式结果吻合;但当加载角增加到  $10^\circ$  以及纯 II 型加载角时,  $\alpha = 0.7$  时两者的区别开始

显现.综合数值解与解析解的结果对比情况,发现  $\alpha = 0.7$  时两者误差相对较大,故以  $\alpha = 0.7$  时的结果为例,具体比较数值解与解析解的差距.若此时的误差仍然较小,那么就可以相互验证结果的有效性. $\alpha = 0.7$  时无量纲  $T$  应力的数值解与解析解分析结果见表 1.

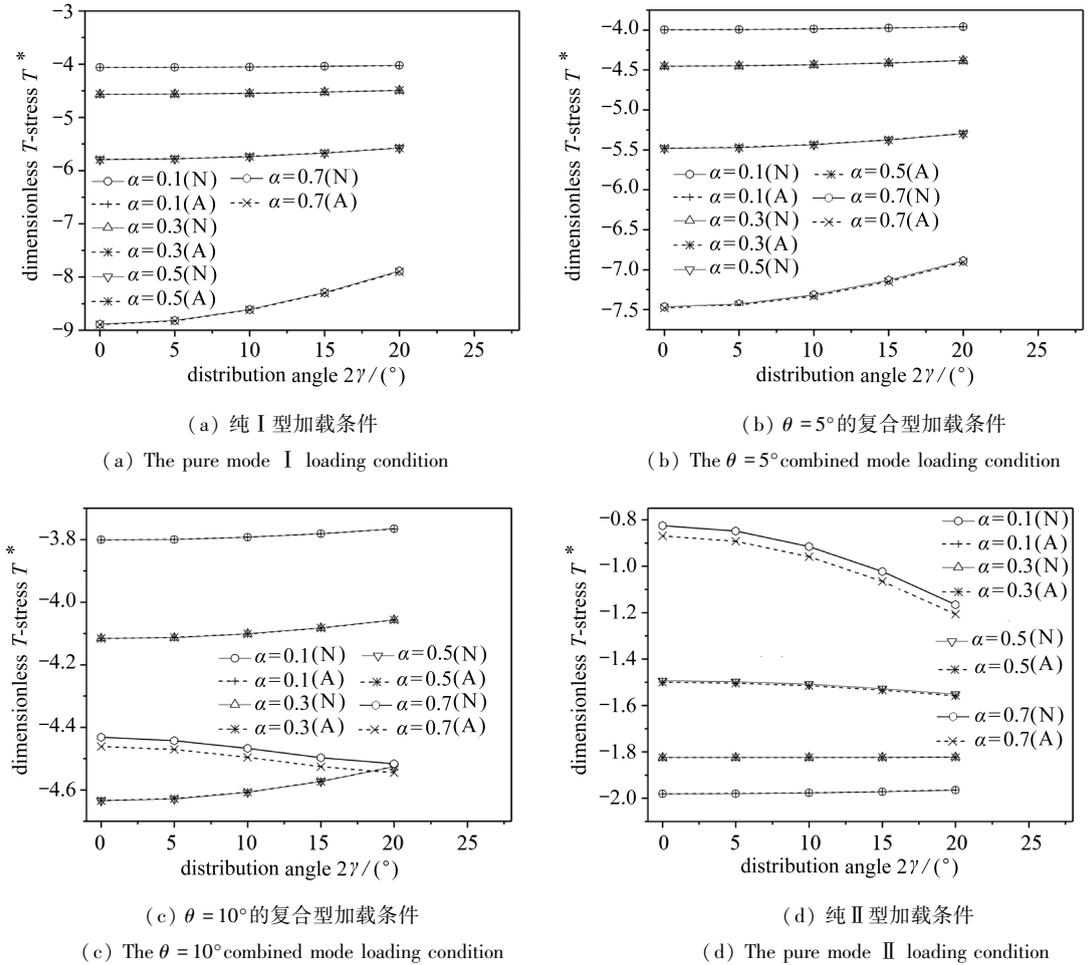


图 5  $T$  应力有限元数值分析结果与理论公式结果对比

Fig. 5 Comparison of  $T$ -stress results between the FEM and the analysis formula

表 1 数据显示,当加载角在  $0^\circ \sim 10^\circ$  范围内时,数值解与解析解的误差都在 1% 以内.只有当加载角增加到纯 II 型加载角时,此时两者的相对误差相对偏大,约为 3% ~ 5%.这是因为纯 II 型加载时,无量纲  $T$  应力本身值接近于 0,造成了相对误差偏大.进一步查看纯 II 型时两者无量纲  $T$  应力差距也可以发现二者的绝对误差在 4% 左右,这表明此时数值解与解析解也是吻合的.综上所述,  $\alpha = 0.7$  时两者的结果吻合良好,验证了理论推导结果的准确性.进一步查看  $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5$  的结果可以发现两者的误差相当接近,尤其是  $\alpha = 0.1, 0.3$  等较小值时,两者的误差在 0.1% 左右,误差极小.

本文提出的这种非均匀压力载荷也是基于实际情况下集中力的加载,试验研究中如果采用集中力加载一般会运用到含有集中力的公式,前面已经提出集中力的加载总是存在微小的分布角,那么这微小的分布角是否会对集中力公式计算结果产生影响呢? 下面以集中力作用下  $T$  应力求解为例,比较同等合力  $P$  作用下集中力和本文中非均匀力以及李一凡等<sup>[9]</sup>提出的

均布力形式下的无量纲  $T$  应力结果,即同等合力  $P$  作用下分布角度的大小对  $T$  应力的影响,以加载角度等于  $5^\circ$  (复合型断裂模式)为例进行对比分析,具体数据见表 2。

表 1  $\alpha = 0.7$  时无量纲  $T$  应力结果对比

Table 1 Comparison between 2 dimensionless  $T$ -stress results,  $\alpha = 0.7$

distribution angle $2\gamma / (^\circ)$	loading angle $\theta / (^\circ)$	FEM solution $T_N^*$	analysis solution $T_A^*$	error $\varepsilon / \%$
0	0	-8.887 9	-8.894 8	0.077 5
5	0	-8.818 7	-8.823 5	0.054 9
10	0	-8.610 1	-8.617 9	0.090 5
15	0	-8.289 9	-8.300 0	0.121 2
20	0	-7.887 2	-7.899 5	0.155 7
0	5	-7.464 4	-7.478 6	0.190 2
5	5	-7.429 0	-7.441 2	0.163 8
10	5	-7.315 6	-7.329 9	0.195 5
15	5	-7.132 9	-7.148 6	0.219 4
20	5	-6.887 7	-6.907 4	0.246 7
0	10	-4.431 5	-4.461 2	0.669 2
5	10	-4.442 7	-4.470 9	0.634 3
10	10	-4.466 9	-4.496 0	0.650 8
15	10	-4.496 7	-4.525 5	0.641 1
20	10	-4.516 1	-4.544 7	0.632 1
0	16.96 (pure II)	-0.825 1	-0.869 6	5.386 3
5	16.96	-0.848 1	-0.892 0	5.176 2
10	16.96	-0.914 8	-0.958 3	4.747 2
15	16.96	-1.022 7	-1.065 1	4.152 1
20	16.96	-1.165 4	-1.206 6	3.528 5

表 2 中  $\omega_1, \omega_2$  分别表示均布力和非均布力作用下无量纲  $T$  应力的变化程度,定义为

$$\omega_j = \frac{T_c - T_d}{T_c} \times 100\%, \quad j = 1, 2, \quad (13)$$

式中  $T_c$  表示集中力作用下的无量纲  $T$  应力,  $T_d$  表示分布力作用下的无量纲  $T$  应力,表 2 中分布角等于  $0^\circ$  对应于集中力作用。

通过表中数据可以判断同等条件下三角函数形式的非均布力作用更接近集中力作用的无量纲  $T$  值,虽然随着分布角的增加,其无量纲  $T$  值也随着增大,但根据表中数据可以明显地看出其变化程度总是小于均布力的变化程度,而且对于  $\alpha$  在 0.1 到 0.5 范围内,分布角小于等于  $20^\circ$  时,  $T$  应力变化程度都在 4% 以内,只有  $\alpha = 0.7$ 、分布角等于  $20^\circ$  时,  $T$  应力变化程度偏大,达到 7.72%,而  $\alpha = 0.7$ 、分布角等于  $10^\circ$  时,其相对集中力误差只有 1.99%。根据表中数据不难看出分布角越大时对应  $T$  应力变化程度也会越大,实际情况集中力加载占据的微小分布角肯定远远小于  $5^\circ$ ,而由当前数据显示  $\alpha = 0.7$ 、分布角等于  $5^\circ$  ( $\gamma = 2.5^\circ$ ) 时,  $T$  应力变化程度只有 0.47%。

进一步分析纯 I 型、复合型 ( $\theta = 10^\circ$ ) 以及纯 II 型加载条件下  $\alpha = 0.7$ 、分布角等于  $5^\circ$  时的变化率,得到的数据显示纯 II 型条件下其变化程度最大达到 2.78%,同样没有超过 3%,这也是因为纯 II 型加载条件下无量纲  $T$  应力值接近于 0,造成了变化程度偏大,具体的无量纲  $T$  应力

差距也只有 2% 左右,因此可以得出结论,如果实际运用中集中力简化为本文中的非均布压力载荷形式,那么  $\alpha \leq 0.7$  以及进行纯 I 型、复合型和纯 II 型径向集中压力加载时,采用集中力公式计算中心裂纹巴西圆盘中心  $T$  应力产生的误差将远远小于 3%,误差非常小可以忽略不计。这更进一步验证了实际集中力加载过程中采用集中力计算公式完全合理,即使存在误差也会相当小,属于可以接受的误差范围。

表 2  $\theta = 5^\circ$  时无量纲  $T$  应力值以及变化程度Table 2 Dimensionless  $T$ -stress values and the degree of variation,  $\theta = 5^\circ$ 

$\alpha$	distribution angle $2\gamma / (^\circ)$	uniform load $T_U^*$ [9]	nonuniform load $T_{NU}^*$	$\omega_1 / \%$	$\omega_2 / \%$
0.1	0	-3.995 2	-3.995 2	0	0
	5	-3.991 1	-3.993 7	0.108 4	0.039 1
	10	-3.978 9	-3.986 2	0.414 7	0.227 3
	15	-3.958 3	-3.974 5	0.929 6	0.520 0
	20	-3.929 8	-3.958 1	1.644 0	0.930 1
0.3	0	-4.451 0	-4.451 0	0	0
	5	-4.443 1	-4.448 6	0.174 4	0.053 3
	10	-4.420 3	-4.433 8	0.686 7	0.386 9
	15	-4.381 3	-4.411 5	1.561 7	0.886 7
	20	-4.328 4	-4.381 0	2.750 2	1.572 6
0.5	0	-5.483 2	-5.794 4	0	0
	5	-5.460 8	-5.782 0	0.408 6	0.213 0
	10	-5.399 1	5.739 0	1.533 2	0.954 9
	15	-5.297 4	-5.670 7	3.388 2	2.134 7
	20	-5.160 9	-5.578 2	5.877 0	3.730 3
0.7	0	-7.464 4	-7.464 4	0	0
	5	-7.398 2	-7.429 0	0.895 7	0.474 5
	10	-7.203 2	-7.315 6	3.507 7	1.993 7
	15	-6.887 4	-7.132 9	7.738 5	4.441 0
	20	-6.473 1	-6.887 7	13.287 6	7.726 5

### 3 结 论

本文在中心裂纹巴西圆盘试件集中载荷作用下  $T$  应力公式基础上,开展非均布载荷作用下的  $T$  应力研究,并得到如下结论:

1) 提出中心裂纹巴西圆盘试件承受一类非均布压力载荷,载荷的分布在分布角中间最大,然后逐渐向两边减小直至在分布角的两边减小为 0;同时结合集中力作用下的  $T$  应力计算公式与微积分思想,得到此类非均布载荷作用下试件的  $T$  应力计算解析公式。

2) 运用有限元分析验证了公式推导的正确性,发现在  $\alpha$  值偏大以及纯 II 型加载条件下两者  $T$  应力结果差距相对较大,但其无量纲  $T$  应力值差距也只有 4% 左右,  $\alpha$  较小的情况下数值解与解析解已非常接近。

3) 与均布力作用相比,同等合力  $P$  作用下本文中的非均布载荷更接近集中力作用的无量纲  $T$  应力值,进一步论证了实际集中力加载中求解  $T$  应力误差会非常小,采用集中力公式完全合理。

## 参考文献 (References):

- [1] AYATOLLAHI M R, ALIHA M R M. On the use of Brazilian disc specimen for calculating mixed mode I - II fracture toughness of rock materials[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, **75**(16): 4631-4641.
- [2] AYATOLLAHI M R, ALIHA M R M. Mixed mode fracture analysis of polycrystalline graphite: a modified MTS criterion[J]. *Carbon*, 2008, **46**(10): 1302-1308.
- [3] AYATOLLAHI M R, ALIHA M R M. Fracture analysis of some ceramics under mixed mode loading[J]. *Journal of the American Ceramic Society*, 2011, **94**(2): 561-569.
- [4] WILLIAMS J G, EWING P D. Fracture under complex stress: the angled crack problem[J]. *International Journal of Fracture*, 1972, **8**(4): 441-446.
- [5] 唐世斌, 黄润秋, 唐春安.  $T$  应力对岩石裂纹扩展路径及起裂强度的影响研究[J]. 岩土力学, 2016, **37**(6): 1521-1529. (TANG Shibin, HUANG Runqiu, TANG Chunan. Effect of  $T$ -stress on crack growth path in rock and fracture strength[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, **37**(6): 1521-1529. (in Chinese))
- [6] FETT T.  $T$ -stresses in rectangular plates and circular disks[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1998, **60**(5): 631-652.
- [7] AYATOLLAHI M R, PAVIER M J, SMITH D J. Determination of  $T$ -stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I / II loading[J]. *International Journal of Fracture*, 1998, **91**(3): 283-298.
- [8] HUA W, LI Y, DONG S, et al.  $T$ -stress for a centrally cracked Brazilian disk under confining pressure[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, **149**: 37-44.
- [9] 李一凡, 董世明, 华文. 中心裂纹巴西圆盘压缩载荷下  $T$  应力研究[J]. 岩土力学, 2016, **37**(11): 3191-3196. (LI Yifan, DONG Shiming, HUA Wen.  $T$ -stress for central cracked Brazilian disk subjected to compression[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, **37**(11): 3191-3196. (in Chinese))
- [10] 高玉华, 汪洋, 程长征. 广义  $T$  应力对裂纹应力强度因子的影响[J]. 中国科学技术大学学报, 2009, **39**(12): 1319-1322. (GAO Yuhua, WANG Yang, CHENG Changzheng. Effect of general  $T$ -stress on stress intensity factor of a crack[J]. *Journal of University of Science And Technology of China*, 2009, **39**(12): 1319-1322. (in Chinese))
- [11] DONG S, WANG Y, XIA Y. Stress intensity factors for central cracked circular disk subjected to compression[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2004, **71**(7): 1135-1148.
- [12] ATKINSON C, SMELSER R E, SANCHEZ J. Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test[J]. *International Journal of Fracture*, 1982, **18**(4): 279-291.
- [13] 周妍, 张财贵, 杨井瑞, 等. 圆孔内单边(或双边)裂纹平台巴西圆盘应力强度因子的全面标定[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(1): 16-30. (ZHOU Yan, ZHANG Caigui, YANG Jingrui, et al. Comprehensive calibration of the stress intensity factor for the holed flattened Brazilian disc with an inner single crack or double cracks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(1): 16-30. (in Chinese))
- [14] HUA W, DONG S, XU J G. Experimental study on fracture toughness of rust stone under mixed mode loading condition[J]. *Materials Research Innovations*, 2015, **19**(S8): 531-536.
- [15] 徐积刚, 董世明, 华文. 围压对巴西裂纹圆盘应力强度因子影响的分析[J]. 岩土力学, 2015, **36**

(7): 1959-1965. (XU Jigang, DONG Shiming, HUA Wen. Effects of confining pressure on stress intensity factors determined by cracked Brazilian disk[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(7): 1959-1965. (in Chinese))

## ***T*- Stress in a Centrally Cracked Brazilian Disk Under Nonuniform Pressure Load**

PENG Fan, DONG Shiming

(College of Architecture and Environment, Sichuan University,  
Chengdu 610065, P.R.China)

**Abstract:** In an engineering structure, the rock is often subjected to nonuniform load; in addition, there is a small distribution angle under a concentrated force in actual experimental study, and the load distribution also should be nonuniform. Based on this case, a class of nonuniform loads were proposed in the trigonometric function form. Then the maximum loading pressure appeared in the middle of the distribution angle and gradually became small to both sides until 0. By means of the centrally cracked Brazilian disk (CCBD) *T*-stress formula under a radial concentrated load, the analytical *T*-stress solution under this kind of nonuniform load was acquired via the integral in the range of the distribution angle, meanwhile the finite element simulation was conducted to obtain the numerical solution. There is a very good consistency between the numerical results and the analytical results, which verifies the accuracy of each other. Compared with those under the uniform load, the dimensionless *T*-stress values under this nonuniform load are closer to the values under the concentrated load when the other condition is the same, and the discrepancy between the stresses under the nonuniform load and the concentrated load is very small. The further calculated results show that it is accurate and reasonable to use the *T*-stress formula for the CCBD subjected to the concentrated forces in actual testing.

**Key words:** nonuniform load; centrally cracked Brazilian disk; *T*-stress; finite element analysis

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11172186)

---

引用本文/Cite this paper:

彭凡, 董世明. 一类非均布载荷下中心裂纹圆盘 *T* 应力分析[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(7): 766-775.

PENG Fan, DONG Shiming. *T*-stress in a centrally cracked Brazilian disk under nonuniform pressure load[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(7): 766-775.