

# 带源项浅水波方程的高分辨率熵稳定格式\*

张海军, 封建湖, 程晓晗, 李 雪

(长安大学 理学院, 西安 710064)

**摘要:** 提出了一种求解带源项浅水波方程的熵稳定格式.新格式利用通量限制函数将一阶熵稳定格式和高阶熵守恒格式结合,具有熵守恒格式和熵稳定格式的优点;在解的光滑区域具有高精度,在解的间断区域避免了非物理现象的产生,同时可以准确地捕捉激波,从而达到高分辨率的效果.利用新格式计算了一维和二维的经典算例,数值结果表明,新格式是模拟带源项浅水波方程的理想方法.

**关键词:** 浅水波方程; 熵守恒格式; 熵稳定格式; 高分辨率

**中图分类号:** O354; O241.82      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.380195

## 引 言

浅水波方程是浅水环境下各类流体运动的一种数学描述,它是研究河流、灌溉和海洋等波动问题的一种重要模型.因此,对浅水波方程的数值求解越来越得到人们的重视.含源项浅水波方程具有形式<sup>[1]</sup>:

$$U_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = \mathbf{S}(x, y, \mathbf{U}), \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb_x \\ -ghb_y \end{pmatrix},$$

$h$  为水深,  $u, v$  分别为  $x$  和  $y$  方向的水流速度,  $g$  为重力加速度, 函数  $b = b(x, y)$  为底部地势. 在没有源项的情况下, 浅水波方程是一类非线性的双曲守恒律方程. 非线性双曲守恒律方程有一个显著的特点是: 不管初始条件是否光滑, 其数值解都可能随时间的推移在某一时刻产生间断<sup>[2]</sup>. 这对求解浅水波方程的精确解带来了很大的困难. 1954 年, Lax 针对双曲守恒律方程提出了弱解的概念<sup>[2]</sup>, 在弱意义下允许间断解的存在; 但是弱解并不唯一. 为了确定具有物理意义的唯一弱解, 1973 年 Lax 又提出了熵稳定条件<sup>[3]</sup>. 文献[1]把熵稳定条件推广到了带源项浅水波方程, 即如果弱解  $\mathbf{U}$  在弱意义下满足熵不等式:

\* 收稿日期: 2017-07-13; 修订日期: 2017-12-07

基金项目: 国家自然科学基金(11601037; 11401045; 11171043); 中央高校基本科研业务费(310812171002)

作者简介: 张海军(1992—), 男, 硕士生(E-mail: 2397381704@qq.com);  
封建湖(1960—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: jhfeng@chd.edu.cn).

$$E(\mathbf{U})_t + (H(\mathbf{U}) + J_1)_x + (K(\mathbf{U}) + J_2)_y \leq 0,$$

则称  $\mathbf{U}$  是式(1)的唯一弱解.其中  $E(\mathbf{U})$  是熵函数,且它的 Hesse 矩阵  $E''(\mathbf{U})$  是正定矩阵, $H(\mathbf{U}),K(\mathbf{U})$  和  $\mathbf{J} = [J_1(x,y,\mathbf{U}),J_2(x,y,\mathbf{U})]^T$  是熵通量函数且满足等式:

$$\partial_{\mathbf{v}}H = \langle \mathbf{V}, \partial_{\mathbf{v}}\mathbf{F}(\mathbf{U}) \rangle, \partial_{\mathbf{v}}K = \langle \mathbf{V}, \partial_{\mathbf{v}}\mathbf{G}(\mathbf{U}) \rangle, \partial_x J_1 + \partial_y J_2 = \langle \mathbf{V}, \mathbf{S} \rangle,$$

其中  $\mathbf{V}$  为熵变量,定义为  $\mathbf{V} = \partial_{\mathbf{v}}E$ .

为了满足熵稳定条件,Tadmor 在 1987 年通过引入熵势和熵变量的概念,定义了一类二阶的熵守恒格式,记为 EC(entropy conservation)格式<sup>[4]</sup>.该格式能够很好地捕捉到光滑解,但是由于该格式缺少熵耗散机制,在间断区域对解的捕捉会产生振荡.2006 年,Roe 在文献[5]中提出,在熵守恒格式的基础上加上 Roe 黏性项来获得熵稳定格式,记为 ES(entropy stable)格式.该格式能够对激波的捕捉达到良好的效果,但是该格式是一阶精度格式.2009 年,Ismail 和 Roe<sup>[6]</sup>通过进一步分析熵稳定格式中熵耗散的大小,得到了更稳定的熵相容格式,并应用于 Euler 方程的计算.2013 年,Mohammed 等<sup>[7]</sup>将熵相容格式推广应用于 Navier-Stokes 方程的计算.在 Roe 格式的基础上,Liu(刘友琼)和 Feng(封建湖)等<sup>[8-11]</sup>通过限制器机制的方法构造了一些行之有效的分辨率熵稳定/熵相容格式,并应用于双曲守恒律方程的计算.程晓晗等<sup>[12-13]</sup>、郑素佩等<sup>[14]</sup>通过结合熵稳定格式和重构方法,构造了分辨率的熵稳定格式.

本文针对带源项浅水波方程,对于空间导数的离散,通过对数值通量函数嵌入限制器的方法,提出了一种分辨率的熵稳定数值通量表达式;对源项的离散采用中心差分格式;并将该格式分别应用于一维和二维浅水波方程的数值算例中.将所得结果与熵守恒格式和带 Roe 黏性项的熵稳定格式的数值结果对比,表明该格式具有分辨率和基本无振荡的特点,是模拟带源项浅水波方程的理想方法.本文在时间方向的推进采用文献[15]中提出的三阶 Runge-Kutta 方法:

$$\begin{cases} U_i^* = U_i^k + \Delta t L(U_i^k), \\ U_i^{**} = \frac{3}{4} U_i^k + \frac{1}{4} U_i^* + \frac{\Delta t}{4} L(U_i^*), \\ U_i^{k+1} = \frac{1}{3} U_i^k + \frac{2}{3} U_i^{**} + \frac{2\Delta t}{3} L(U_i^{**}). \end{cases}$$

## 1 一维浅水波方程求解

一维浅水波方程的初值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghb_x \end{pmatrix}.$$

考虑一维情况的高分辨率熵稳定格式.

### 1.1 熵守恒格式

考虑在均匀网格  $\{x_i\}_i$  下浅水波方程的熵守恒格式,熵守恒格式保持总熵不变,此时满足离散熵等式:

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{U}_i(t)) + \frac{1}{\Delta x} (H_{i+1/2} - H_{i-1/2}) = 0, \quad (3)$$

其中  $\mathbf{U}_i$  是  $x_i$  处的值, 取势能与内能的和作为熵函数  $E(\mathbf{U})$ , 即  $E(\mathbf{U}) = (hu^2 + gh^2)/2 + ghb$ , 可得熵通量函数  $H(\mathbf{U}) = guh^2 + hu^3/2$ . 熵守恒半离散格式定义为

$$\frac{d\mathbf{U}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{EC}} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{\text{EC}}) + \hat{\mathbf{S}}_i, \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{EC}} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} \\ \frac{g}{2} (\bar{h}^2)_{i+1/2} + \bar{h}_{i+1/2} (\bar{u}_{i+1/2})^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{g}{2\Delta x} (\bar{h}_{i+1/2} [b]_{i+1/2} + \bar{h}_{i-1/2} [b]_{i-1/2}) \end{bmatrix},$$

$$\bar{a}_{i+1/2} = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}, \quad [a]_{i+1/2} = a_{i+1} - a_i.$$

## 1.2 熵稳定格式

本文推广文献[16]中熵稳定的 ERoe 格式到带源项浅水波方程, 具体形式为

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{ERoe}} = \mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{EC}} - \frac{1}{2} \mathbf{R} |\mathbf{A}| \mathbf{R}^T (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i), \quad (5)$$

其中  $\mathbf{R}$  是  $\mathbf{F}'(\mathbf{U})$  的特征向量矩阵且

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{i+1/2} - \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2}} & 0 \\ 0 & \bar{u}_{i+1/2} + \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \bar{u}_{i+1/2} - \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2}} & \bar{u}_{i+1/2} + \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2}} \end{bmatrix}.$$

综上所述, 带源项浅水波方程熵稳定格式的半离散格式为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_i = -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^{\text{ERoe}} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{\text{ERoe}}) - \frac{g}{2\Delta x} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{h}_{i+1/2} [b]_{i+1/2} + \bar{h}_{i-1/2} [b]_{i-1/2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

## 1.3 基于限制器的熵稳定格式

采用在文献[9]中给出的限制器:

$$\varphi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(1, \theta)).$$

该限制器在 Sweby 给出的限制器的二阶 TVD 区域内<sup>[9]</sup>, 且显然有  $\varphi(1) = 1$ , 即限制器  $\varphi(\theta)$  过(1,1)点, 所以能满足二阶精度的要求. 对于方程(2)而言, 该限制器是一个矩阵形式:

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \text{diag}(\varphi(\theta^1), \varphi(\theta^2)),$$

其中

$$\theta^k = (\theta_{i+1/2}^k)^k = \begin{cases} (\theta^-)^k, & \lambda_{i+1/2}^k > 0, \\ (\theta^+)^k, & \lambda_{i+1/2}^k < 0, \end{cases}$$

$$(\theta^-)^k = \frac{\alpha_{i-1/2}^k}{\alpha_{i+1/2}^k}, \quad (\theta^+)^k = \frac{\alpha_{i+3/2}^k}{\alpha_{i+1/2}^k},$$

其中  $\lambda_{i+1/2}^k (k = 1, 2)$  是方程(2)的 Jacobi 矩阵的第  $k$  个特征值在数值解  $U_{i+1/2}$  处的值,  $\alpha_{i+1/2}^k$  是  $\alpha_{i+1/2}$  的第  $k$  个分量,  $\alpha_{i+1/2} = L_{i+1/2} \Delta_{i+1/2} U, L_{i+1/2}$  是  $U_{i+1/2}$  处对应的左特征向量矩阵. 时间步长  $\Delta t$  满足 CFL 条件  $c(\Delta t/\Delta x) \leq 1$ , 其中  $c = \max_i |\lambda_{i+1/2}|$ .

通过添加限制器来充分运用熵守恒格式和熵稳定格式的优势, 即在解的光滑区域, 新格式自动选用熵守恒格式, 从而保持格式的二阶精度. 在解的间断区域, 新格式自动选用熵稳定格式, 从而避免了伪振荡的发生. 记新格式为 ESL (entropy stable with limiters) 格式, 具体格式如下:

$$F_{i+1/2}^{ESL} = F_{i+1/2}^{EC} - \frac{1}{2} R |A| R^T |I_{2 \times 2} - \psi_1| (V_{i+1} - V_i). \tag{7}$$

## 2 二维浅水波方程求解

考虑二维带源项浅水波方程:

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = S,$$

取总能  $E(U) = (gh^2 + hu^2 + hv^2 + ghb)/2$  作为熵函数, 其中  $g$  为重力加速度. 则熵通量函数

$$H(U) = guh^2 + (hu^3 + huv^2)/2, K(U) = gvh^2 + (hv^3 + hvu^2)/2, J = ghb[u, v]^T.$$

### 2.1 熵守恒格式

把一维熵守恒格式的数值通量推广到二维, 可得二维浅水波方程的半离散熵守恒格式:

$$\frac{dU_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (F_{i+1/2, j}^{EC} - F_{i-1/2, j}^{EC}) - \frac{1}{\Delta y} (G_{i, j+1/2}^{EC} - G_{i, j-1/2}^{EC}) + \hat{S}_{i, j}, \tag{8}$$

其中

$$F_{i+1/2, j}^{EC} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{i+1/2, j} \bar{u}_{i+1/2, j} \\ \bar{h}_{i+1/2, j} (\bar{u}_{i+1/2, j})^2 + \frac{g}{2} (\bar{h}^2)_{i+1/2, j} \\ \bar{h}_{i+1/2, j} \bar{u}_{i+1/2, j} \bar{v}_{i+1/2, j} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$G_{i, j+1/2}^{EC} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{i, j+1/2} \bar{v}_{i, j+1/2} \\ \bar{h}_{i, j+1/2} \bar{u}_{i, j+1/2} \bar{v}_{i, j+1/2} \\ \bar{h}_{i, j+1/2} (\bar{v}_{i, j+1/2})^2 + \frac{g}{2} (\bar{h}^2)_{i, j+1/2} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\hat{S}_{i, j} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2\Delta x} (\bar{h}_{i+1/2, j} [b]_{i+1/2, j} - \bar{h}_{i-1/2, j} [b]_{i-1/2, j}) \\ -\frac{1}{2\Delta y} (\bar{h}_{i, j+1/2} [b]_{i, j+1/2} - \bar{h}_{i, j-1/2} [b]_{i, j-1/2}) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\bar{a}_{i+1/2, j} = \frac{a_{i, j} + a_{i+1, j}}{2}, \bar{a}_{i, j+1/2} = \frac{a_{i, j} + a_{i, j+1}}{2},$$

$$[a]_{i+1/2, j} = a_{i+1, j} - a_{i, j}, [a]_{i, j+1/2} = a_{i, j+1} - a_{i, j}.$$

### 2.2 熵稳定格式

用二维的熵守恒通量(9)和(10)代替式(5)中一维的熵守恒通量, 可得二维的熵稳定格

式.记  $F'(U), G'(U)$  的特征向量和特征值矩阵分别为  $R^x, A^x$  和  $R^y, A^y$ , 则数值通量为

$$\begin{cases} F_{i+1/2,j}^{\text{ERoe}} = F_{i+1/2,j}^{\text{EC}} - \frac{1}{2} R_{i+1/2,j}^x |A_{i+1/2,j}^x| (R_{i+1/2,j}^x)^T (V_{i+1,j} - V_{i,j}), \\ G_{i,j+1/2}^{\text{ERoe}} = G_{i,j+1/2}^{\text{EC}} - \frac{1}{2} R_{i,j+1/2}^y |A_{i,j+1/2}^y| (R_{i,j+1/2}^y)^T (V_{i,j+1} - V_{i,j}), \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$R^x = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{u}_{i+1/2,j} - \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2,j}} & 0 & \bar{u}_{i+1/2,j} + \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2,j}} \\ \bar{v}_{i+1/2,j} & \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2,j}} & \bar{v}_{i+1/2,j} \end{bmatrix},$$

$$R^y = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \bar{u}_{i,j+1/2} & -\sqrt{g\bar{h}_{i,j+1/2}} & \bar{u}_{i,j+1/2} \\ \bar{v}_{i,j+1/2} - \sqrt{g\bar{h}_{i,j+1/2}} & 0 & \bar{v}_{i,j+1/2} + \sqrt{g\bar{h}_{i,j+1/2}} \end{bmatrix},$$

$$A^x = \text{diag}(\bar{u}_{i+1/2,j} - \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2,j}}, \bar{u}_{i+1/2,j}, \bar{u}_{i+1/2,j} + \sqrt{g\bar{h}_{i+1/2,j}}),$$

$$A^y = \text{diag}(\bar{v}_{i,j+1/2} - \sqrt{g\bar{h}_{i,j+1/2}}, \bar{v}_{i,j+1/2}, \bar{v}_{i,j+1/2} + \sqrt{g\bar{h}_{i,j+1/2}}).$$

### 2.3 高分辨率的熵稳定格式

用二维的熵守恒通量(9)和(10)代替式(7)中一维的熵守恒通量,可得二维的高分辨率熵稳定格式,具体格式如下:

$$\begin{cases} F_{i+1/2,j}^{\text{ESL}} = F_{i+1/2,j}^{\text{EC}} - \frac{1}{2} R_{i+1/2,j}^x |A_{i+1/2,j}^x| (R_{i+1/2,j}^x)^T |I_{3 \times 3} - \psi_2| (V_{i+1,j} - V_{i,j}), \\ G_{i,j+1/2}^{\text{ESL}} = G_{i,j+1/2}^{\text{EC}} - \frac{1}{2} R_{i,j+1/2}^y |A_{i,j+1/2}^y| (R_{i,j+1/2}^y)^T |I_{3 \times 3} - \psi_2| (V_{i,j+1} - V_{i,j}), \end{cases} \quad (13)$$

其中限制器  $\psi_2 = \text{diag}(\varphi(\theta^1), \varphi(\theta^2), \varphi(\theta^3)), \varphi(\theta^k) (k=1,2,3)$  取二维情况下的值.

## 3 数值算例

**算例 1** 考虑区间  $[-1,1]$  上连续的底部地势  $b(x) = 1$  上的大型溃坝问题,初始条件取

$$u(x,0) = \begin{cases} 15, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad h(x,0) = 1.$$

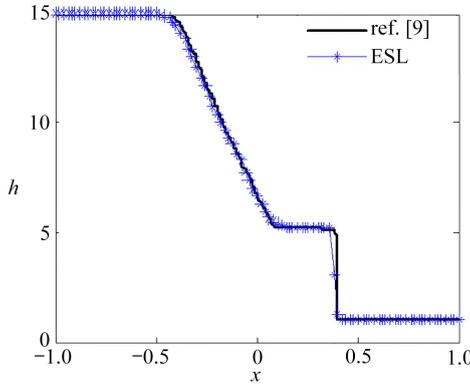
取空间网格数为 100, 计算到  $t = 0.1, g = 1$ , CFL 条件数为 0.1, 采用周期性边界条件.以 1 200 个加密网格点的熵相容格式<sup>[9]</sup>作为参考解,图 1 显示了高度  $h$  的变化情况,可以看出,熵稳定格式(6)和 ESL 格式(7)很好地捕捉到了解的结构,且熵稳定格式相比于 ESL 格式抹平现象严重.熵守恒格式(4)精确捕捉到了稀疏波,但是熵守恒格式在激波过度区域没有熵耗散,故在激波区域出现了强振荡现象.

**算例 2** 考虑区间  $[0,3]$  上的高度接近 0 的溃坝问题,底部地势和初始条件分别为

$$b(x) = \begin{cases} 1 - 0.1 \cos(3.14(x - 1.5)^2), & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{else,} \end{cases}$$

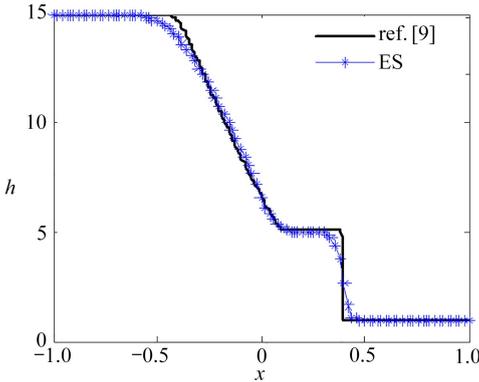
$$u(x,0) = \begin{cases} -2, & \text{if } x \leq 1, \\ 2, & \text{else,} \end{cases} \quad h(x,0) = 1.$$

取空间网格数为 200, 计算到  $t = 0.1$ ,  $g = 1$ , CFL 条件数取 0.1, 采用周期性边界条件. 以 1 200 个加密网格点的熵相容格式<sup>[9]</sup>作为参考解, 图 2 显示了水部表面  $h$  的波动情况. 熵守恒格式(4)的计算结果为 NAN(出现了分母为 0 的情况), 所以不能用于求解该问题. 熵稳定格式(6)和 ESL 格式(7)都能保持波的非负性, 且 ESL 格式相比于熵稳定格式更加精确, 模拟效果更好.



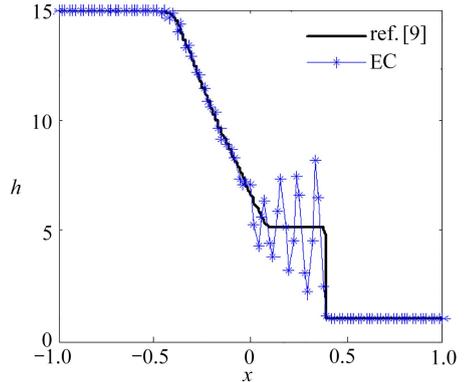
(a) ESL 格式

(a) Results with the ESL scheme



(b) 熵稳定格式

(b) Results with the ES scheme



(c) 熵守恒格式

(c) Results with the EC scheme

图 1 大型溃坝问题计算结果

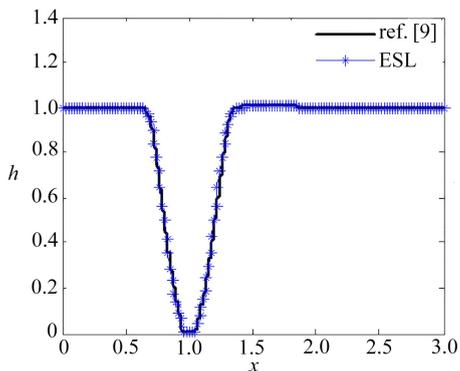
Fig. 1 Numerical results of a large dam break problem

**算例 3** 考虑区间  $[0, 150]$  上的溃坝问题, 底部地势和初始条件分别为

$$b(x) = \begin{cases} 0.8, & \text{if } |x - 75| \leq 18.75, \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$$

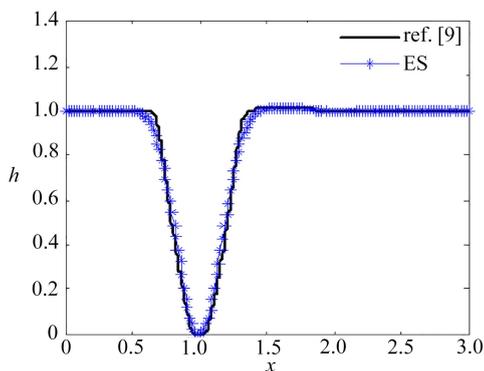
$$h(x, 0) = \begin{cases} 10 - b(x), & \text{if } 0 \leq x \leq 75, \\ 2 - b(x), & \text{else,} \end{cases} \quad u(x, 0) = 0.$$

取空间网格数为 200, 计算到  $t = 4.5$ , CFL 条件数为 0.1, 采用周期性边界条件. 以 1 200 个加密网格点的熵相容格式<sup>[9]</sup>作为参考解, 图 3 显示了  $h + b$  的变化情况. 可以看出, 3 种格式都能精确捕捉到光滑解, 但是熵守恒格式(4)在激波区域跳跃较大, 振荡现象严重. 熵稳定格式(6)在激波过度区域有较强的抹平现象, 而 ESL 格式(7)能够在精确捕捉到激波的同时, 抑制伪振荡的发生.



(a) ESL 格式

(a) Results with the ESL scheme

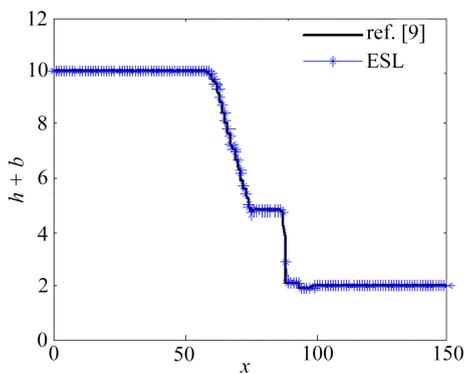


(b) 熵稳定格式

(b) Results with the ES scheme

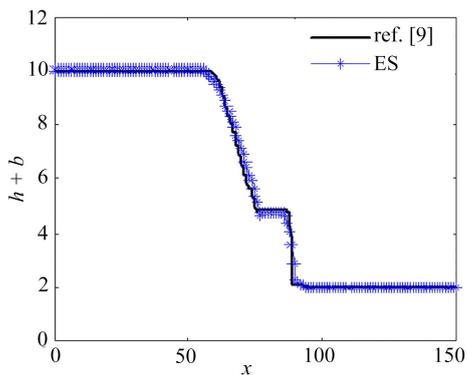
图2 高度接近 0 的溃坝问题的计算结果

Fig. 2 Numerical results of a dam break problem of a near-zero height



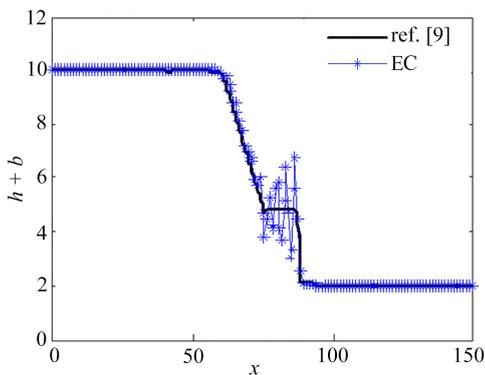
(a) ESL 格式

(a) Results with the ESL scheme



(b) 熵稳定格式

(b) Results with the ES scheme



(c) 熵守恒格式

(c) Results with the EC scheme

图3 一维溃坝问题的计算结果

Fig. 3 Numerical results of the 1D dam break problem

算例4 考虑 $[0, 2] \times [0, 1]$ 上的二维浅水波问题, 其中底部地势和初始条件分别为

$$b(x, y) = 0.8e^{-50(x-0.9)^2 - 50(y-0.5)^2},$$

$$u(x, y, 0) = 0, v(x, y, 0) = 0, h(x, y, 0) = 1 - b(x, y).$$

取空间网格数为  $50 \times 50$ , 计算到  $t = 0.1, g = 1$ , CFL 条件数为 0.25, 采用周期性边界条件. 图 4 显示了 ESL 格式的运算结果, 此时水平面保持稳定. 表 1 和表 2 显示了不同网格下 3 种格式的  $L_1$  误差与  $L_\infty$  误差以及数值精度. 从表中可以看出, 熵守恒格式 (8) 的确是二阶方法, 熵稳定格式 (12) 是一阶方法, 但加入限制器的 ESL 格式 (13) 对于该问题也达到了二阶, 且比熵守恒格式的精度更高; 3 种格式都保持了解的稳定性, 但是熵稳定格式的结果产生的误差比其他两种格式都要大. 其中  $L_1$  误差为  $\Delta x \Delta y \sum_{i,j} |h_{i,j} + b_{i,j} - 1|$ ,  $L_\infty$  误差为  $\max_{i,j} |h_{i,j} + b_{i,j} - 1|$ .

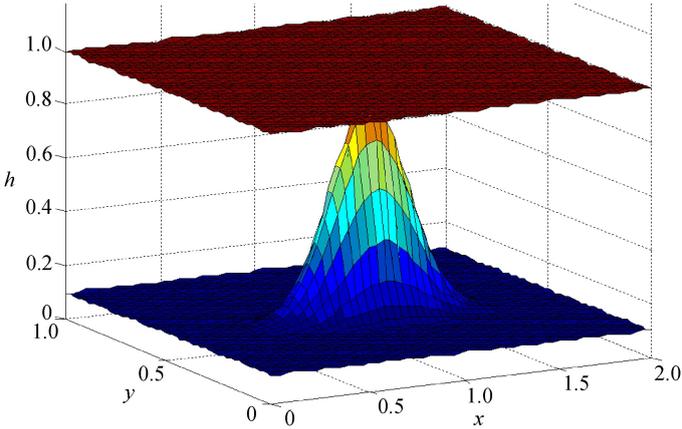


图 4 ESL 格式的计算结果  
Fig. 4 Results with the ESL scheme

表 1  $L_1$  误差与阶  
Table 1  $L_1$  errors and orders

$N \times N$	EC scheme		ES scheme		ESL scheme	
	$L_1$ error	order	$L_1$ error	order	$L_1$ error	order
25×25	8.190 2E-6	-	5.446 3E-4	-	7.302 2E-6	-
50×50	2.055 2E-6	1.994 6	2.641 9E-4	1.043 7	1.573 7E-6	2.214 2
100×100	5.111 0E-7	2.007 7	1.218 8E-4	1.116 1	3.317 0E-7	2.246 3

表 2  $L_\infty$  误差与阶  
Table 2  $L_\infty$  errors and orders

$N \times N$	EC scheme		ES scheme		ESL scheme	
	$L_\infty$ error	order	$L_\infty$ error	order	$L_\infty$ error	order
25×25	3.719 2E-6	-	1.702 0E-3	-	2.194 2E-6	-
50×50	8.969 0E-7	2.051 9	8.571 1E-4	0.989 7	4.724 0E-7	2.215 6
100×100	2.266 3E-7	1.984 6	4.204 6E-4	1.027 5	1.140 9E-7	2.049 8

算例 5 考虑  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  上的二维波动问题, 其中底部地势和初始条件为

$$b(x, y) = 1 + 0.01 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0,$$

$$h(x, y, 0) = 1 + 0.01 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + 0.1 e^{-14R}, R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

取空间网格数为  $40 \times 40$ , 计算到  $t = 0.1, g = 1$ , CFL 条件数为 0.1, 采用周期性边界条件. 图

5 显示了 ESL 格式的计算结果以及 3 种格式计算结果的  $y = x$  剖面图,以熵相容格式<sup>[9]</sup>作为参考解.可以看出,3 种格式的计算结果都成功地模拟了水面的波动的情况,但是一阶的熵稳定格式(12)在波峰的捕捉上有明显的抹平现象,没有 ESL 格式(13)和熵守恒格式(8)计算结果锐利.而 ESL 格式和熵守恒格式都能很好地模拟波峰与波谷的形成,且 ESL 格式在峰值的捕捉上更加锐利,模拟效果相对于熵守恒格式要好.

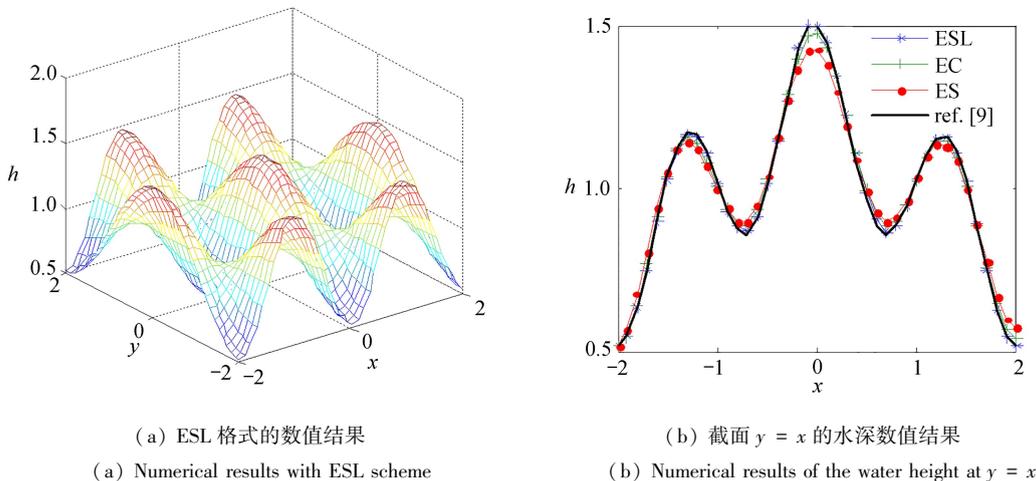


图 5 二维波动问题 ESL 格式和水深  $h$  的数值结果

Fig. 5 Numerical results with the ESL scheme and the water height for the 2D wave equation

## 4 结 论

本文针对带源项浅水波方程,通过添加限制器的方法构造了 ESL 格式.该格式能在解的光滑区域自动选用熵守恒格式,在解的间断区域自动选用熵稳定格式,从而在光滑区域保持二阶精度的同时避免了间断区域伪振荡的发生.利用该格式计算了一维和二维的算例,数值结果表明,ESL 格式明显优于熵守恒格式和熵稳定格式.

### 参考文献 (References):

- [1] FJORDHOLM U S, MISHRA S, TADMOR E. Well-balanced and energy stable schemes for the shallow water equations with discontinuous topography[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **230**(14): 5587-5609.
- [2] LAX P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1954, **7**(1): 159-193.
- [3] LAX P D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves[C]//*SIAM Regional Conference Lectures in Applied Mathematics*. Vol 11. Philadelphia, USA, 1973.
- [4] TADMOR E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. I[J]. *Mathematics of Computation*, 1987, **49**(179): 91-103.
- [5] ROE P L. Entropy conservation schemes for the Euler equations[R]. Talk at HYP 2006, Lyon, France, 2006.
- [6] ISMAIL F, ROE P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: entropy production at shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(15): 5410-5436.

- [7] MOHAMMED A N, ISMAIL F. Study of an entropy-consistent Navier-Stokes flux[J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2013, **27**(1): 1-14.
- [8] LIU Y, FENG J, REN J. High resolution, entropy-consistent scheme using flux limiter for hyperbolic systems of conservation laws[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2015, **64**(3): 914-937.
- [9] 任炯, 封建湖, 刘友琼, 等. 求解双曲守恒律方程的高分辨率熵相容格式[J]. 计算物理, 2014, **31**(5): 539-551.(REN Jiong, FENG Jianhu, LIU Youqiong, et al. High resolution entropy consistent schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2014, **31**(5): 539-551.(in Chinese))
- [10] 刘友琼, 封建湖, 梁楠, 等. 求解浅水波方程的熵相容格式[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(12): 1247-1257.(LIU Youqiong, FENG Jianhu, LIANG Nan, et al. An entropy-consistent flux scheme for shallow water equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(12): 1247-1257.(in Chinese))
- [11] 刘友琼, 封建湖, 任炯, 等. 求解多维 Euler 方程的二阶旋转混合型格式[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(5): 542-553.(LIU Youqiong, FENG Jianhu, REN Jiong, et al. A second-order rotated-hybrid scheme for solving multi-dimensional compressible Euler equations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(5): 542-553.(in Chinese))
- [12] 程晓晗, 聂玉峰, 蔡力. 基于 WENO 重构的熵稳定格式求解浅水方程[J]. 计算物理, 2015, **32**(5): 523-528.(CHENG Xiaohan, NIE Yufeng, CAI Li. WENO based entropy stable scheme for shallow water equations[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2015, **32**(5): 523-528.(in Chinese))
- [13] 程晓晗, 封建湖, 聂玉峰. 求解双曲守恒律方程的 WENO 型熵相容格式[J]. 爆炸与冲击, 2014, **34**(4): 501-507.(CHENG Xiaohan, FENG Jianhu, NIE Yufeng. WENO type entropy consistent scheme for hyperbolic conservation laws [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2014, **34**(4): 501-507.(in Chinese))
- [14] 郑素佩, 封建湖, 刘彩侠. 高分辨率熵相容算法在二维溃坝问题中的应用[J]. 水动力学研究与进展, 2013, **28**(5): 545-551.(ZHENG Supei, FENG Jianhu, LIU Caixia. High-resolution entropy consistent algorithm for the two-dimensional dam-break flows [J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2013, **28**(5): 545-551.(in Chinese))
- [15] GOTTLIEB S, SHU C W. A survey of strong stability preserving high order time discretizations [J]. *SIAM Review*, 2001, **43**(1): 89-112.
- [16] FJORHOLM U S. Structure preserving finite volume methods for the shallow water equations [D]. Master Thesis. Norway: University of Oslo, 2009.

# An Entropy Stable Scheme for Shallow Water Equations With Source Terms

ZHANG Haijun, FENG Jianhu, CHENG Xiaohan, LI Xue  
(School of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China)

**Abstract:** An entropy stable scheme was developed for the shallow water equations with source terms, and a 1st-order entropy stable scheme and a high-order entropy conservation scheme were combined with a flux limiter function. The new entropy scheme preserves advantages of both the entropy conservation scheme and the entropy stable scheme, having higher accuracy in the regions of the smooth solutions and capturing shocks accurately while avoiding non-physical phenomena in the regions of the discontinuous solutions, thus achieves high resolution. The new scheme was successfully applied to calculate the classical 1D and 2D problems. The numerical results show that the new scheme does be an ideal method to simulate the shallow water equations with source terms.

**Key words:** shallow water equations; entropy conservation scheme; entropy stable scheme; high resolution

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (11601037; 11401045; 11171043)

---

引用本文/Cite this paper:

张海军, 封建湖, 程晓晗, 李雪. 带源项浅水波方程的高分辨率熵稳定格式[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(8): 935-945.

ZHANG Haijun, FENG Jianhu, CHENG Xiaohan, LI Xue. An entropy stable scheme for shallow water equations with source terms[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(8): 935-945.