文章编号:1000-0887(2018)04-0462-08

求解病态线性方程组的预处理精细积分法*

富明慧, 李勇息

(中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275)

摘要: 为降低病态线性方程组系数矩阵的条件数,根据矩阵行(列)均衡的思想,提出行(列)的1-范数均衡法,并扩展为范数均衡法.然后,将范数均衡法与精细积分法相结合,给出求解病态线性方程组的范数均衡预处理精细积分法.数值结果表明,经过范数均衡预处理后精细积分法求解病态方程的精度(有效数字增加 5 个以上)和效率(迭代次数降低 15 次左右)均能得到显著提高,适用范围在一定程度上也有所扩展.在上述方法中,以 1-范数均衡预处理精细积分法效果最为显著.

关 键 词: 范数; 均衡; 预处理; 精细积分法; 病态线性方程组

中图分类号: O242 **文献标志码:** A DOI: 10.21656/1000-0887.380206

引 言

病态方程组在科学和工程问题中广泛存在,此类方程的特点是系数矩阵条件数很大,用常规方法不能求得有效解.预处理法[1]是求解病态方程最常见的方法,其目标是降低系数矩阵条件数,即改善方程组病态性,从而可以用常规方法求解.Tikhonov(吉洪诺夫)正则化是常用预处理方法,但正则系数的选取一直是个难题.唐丽等[2]将由 Tikhonov 正则化演化而来的主元加权迭代法应用于病态代数方程的求解,获得了较好解答.Liu(刘进贤)[3]给出另外一种形式的主元加权迭代格式,能更好地降低条件数,提高解精度.胡圣荣等[4]对系数矩阵构造适当的增广形式,再用常规方法求解,此种矩阵增广预处理方法也获得了较为理想的结果.共轭梯度法(CG)是经典迭代算法,预处理共轭梯度法得到广大科学工作者的研究.于春肖等[5]通过改进对称逐次超松弛预处理矩阵提出了对称逐次超松弛-不完全 Cholesky(乔列斯基)共轭梯度(SSOR-ICCG)算法及其改进算法.霍志周等[6]将预处理共轭梯度法用来求解地震数据重建所建立的病态线性方程组,获得合理结果.李秀艳等[7]将改进的预处理共轭梯度法用于 ERT 图像重建,很好地解决了重建中的病态问题.

若矩阵所有行或者列有相同的模,则矩阵条件数会下降,矩阵病态性得到降低[8].以此,Liu(刘进贤)[9]提出一种新的预处理方式称为双边均衡法(TSEM),其核心思想是通过使矩阵行(列)的模相等来降低系数矩阵条件数.Ku(顾承宇)[10]将该预处理法与动态 Jacobi(雅可比)不求逆方法(DJIFM)结合,应用于求解接触面有极端物理反差特性的病态线性系统.胡圣荣等[11]提到的最大元素均衡条件预优,也能改善矩阵病态性.

* **收稿日期:** 2017-07-25; **修订日期:** 2017-11-08

基金项目: 国家自然科学基金(11672338;11502172)

作者简介: 富明慧(1966—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: stsfmh@ mail.sysu.edu.cn).

钟万勰[12]提出的精细积分法是计算指数矩阵的一种高效率、高精度方法.二十多年的研究,让精细积分法在求解微分方程[13]和结构动力学[14]等方面均有了长足发展.富明慧等[15]将精细积分法应用于病态线性方程组的求解,并且取得较为理想的效果.

对应于双边均衡法和最大元素均衡条件预优,本文提出 1-范数均衡法,并将它们统一归结为行(列)范数均衡预处理方法.在此基础上,将此均衡预处理方法与精细积分法相结合,形成一类预处理精细积分法.

与原精细积分解法相比,本文提出的预处理精细积分法不仅提高了求解精度和计算效率,还能求解原精细积分法无法计算的问题,扩大了其适用范围.

1　行(列)范数均衡预处理法

1.1　1-范数均衡预处理

对于线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}_0, \tag{1}$$

将式(1)两边同时乘以矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 同时令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$, 可得

$$\boldsymbol{QAPy}=\boldsymbol{Qb}_0, \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

于是,式(2)变为以 $\boldsymbol{y}$ 为未知量的方程组

$$\boldsymbol{By}=\boldsymbol{b}, \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{QAP},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{Qb}_0.$$

如何求得预处理矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{P}$, 使矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行(列)有相同的 1-范数,是问题的关键所在.

首先,令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} Q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & Q_n \end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & P_n \end{bmatrix}.$$

为了使 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{Q}$ 后,每行的 1-范数相同,则

$$Q_k=\frac{S}{\sum_{j=1}^{n}|A_{kj}|},\qquad k=1,2,3,\cdots,n. \tag{4}$$

于是,令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{QA}$, 为了使 $\boldsymbol{C}$ 右乘 $\boldsymbol{P}$ 后,每列的 1-范数相同,则

$$P_k=\frac{T}{\sum_{i=1}^{n}|C_{ik}|},\qquad k=1,2,3,\cdots,n, \tag{5}$$

式(4)、(5)中的 S,T 为任一常数.因为 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{B})=\mathrm{cond}(\alpha\boldsymbol{B})$, α 为常数, $\boldsymbol{B}$ 为矩阵,理论上选取不同的 S 和 T 不影响系数矩阵的条件数.但是对于系数矩阵高度病态的线性方程,选取不同的值,解的精度将不同.

先计算 $\boldsymbol{Q}$, 后计算 $\boldsymbol{P}$ 称为 $\boldsymbol{QP}$ 法.同理,先计算 $\boldsymbol{P}$, 后计算 $\boldsymbol{Q}$ 称为 $\boldsymbol{PQ}$ 法.行列平衡可以一直

交替进行下去,不过一般经过几次交替后,系数矩阵条件数就不再改变,方程组的病态性不再得到改善.

在此基础上还可以引入参数 γ 和 μ, 使得

$$Q_k = \gamma \frac{S}{\sum_{j=1}^{n} |A_{kj}|}, \qquad k = 1,2,3,\cdots,n, \tag{6}$$

$$P_k = \mu \frac{T}{\sum_{i=1}^{n} |A_{ik}|}, \qquad k = 1,2,3,\cdots,n, \tag{7}$$

这样,调节参数 γ 和 μ 的值, $\boldsymbol{B}$ 将获得不同的条件数,当 γ 和 μ 选取适当值, $\boldsymbol{B}$ 的条件数将变得最小.

1.2 范数均衡预处理

将式(4)、(5)中的分母变为行(列)的 2-范数或者无穷范数,则变为 2-范数均衡、无穷范数均衡,3 种范数均衡统称为范数均衡.于是可以认为 TSEM 为 S 和 T 值取为第一行(列)的 2-范数的 2-范数均衡;最大元素均衡为 S,T,γ 和 μ 均取为 1 的无穷范数均衡.

2 预处理精细积分法

将式(3)用精细积分法进行求解,并由 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 则可以获得原方程组的解,此方法称为预处理精细积分法.此处要求原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定,对于非正定矩阵,可以在式(1)两边同时乘以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 后再进行预处理变为矩阵 $\boldsymbol{B}$.以下对精细积分法求解病态线性代数方程组作简要叙述.

由

$$\int_0^{\infty} \exp(-\boldsymbol{B}t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau} \exp(-\boldsymbol{B}t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}(-\boldsymbol{B})^{-1}\exp(-\boldsymbol{B}\tau)\Big|_0^{\tau} =$$
$$(-\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{0} - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{B}^{-1}$$

可得 $\boldsymbol{y} = \int_0^{\infty} \exp(-\boldsymbol{B}t)\,\mathrm{d}t \cdot \boldsymbol{b}$ 为式(3)的精确解.

显然无穷积分 $\int_0^{\infty} \exp(-\boldsymbol{B}t)\,\mathrm{d}t$ 的计算是本算法的关键.

记

$$\boldsymbol{F}(\tau) = \int_0^{\tau} \exp(-\boldsymbol{B}t)\,\mathrm{d}t, \tag{8}$$

则

$$\boldsymbol{F}(2\tau) = \int_0^{2\tau} \exp(-\boldsymbol{B}t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\tau} \exp(-\boldsymbol{B}t)\,\mathrm{d}t + \int_{\tau}^{2\tau} \exp(-\boldsymbol{B}t)\,\mathrm{d}t =$$
$$(\boldsymbol{I} + \exp(-\boldsymbol{B}\tau))\int_0^{\tau} \exp(-\boldsymbol{B}\tau)\,\mathrm{d}t,$$

即

$$\boldsymbol{F}(2\tau) = (\boldsymbol{I} + \exp(-\boldsymbol{B}\tau))\boldsymbol{F}(\tau). \tag{9}$$

式(9)两边同时乘以 $\boldsymbol{b}$, 得

$$\boldsymbol{y}_1 = (\boldsymbol{I} + \exp(-\boldsymbol{B}\tau))\boldsymbol{y}_0. \tag{10}$$

由式(9)、(10)可推出

$$\boldsymbol{y}_{k+1} = (\boldsymbol{I} + \exp(-2^k \boldsymbol{B}\tau))\boldsymbol{y}_k, \tag{11}$$

式中的矩阵指数 $\exp(-2^k \boldsymbol{B\tau})$ 可以用精细积分来求解.

对 $\exp(-\boldsymbol{B\tau})$ 进行 Taylor(泰勒)展开,因为 $\boldsymbol{\tau}$ 为一个远小于 1 的量,截取前几项,即可保证足够精度,得

$$\exp(-\boldsymbol{B\tau}) \approx \boldsymbol{I} + (-\boldsymbol{B\tau}) + \frac{(-\boldsymbol{B\tau})^2}{2} + \frac{(-\boldsymbol{B\tau})^3}{6}. \tag{12}$$

于是将式(12)代入式(8)并积分,得

$$\boldsymbol{F}(\tau) = \tau\left(\boldsymbol{I} + \frac{(-\boldsymbol{B\tau})}{2} + \frac{(-\boldsymbol{B\tau})^2}{6} + \frac{(-\boldsymbol{B\tau})^3}{24}\right). \tag{13}$$

记 $\boldsymbol{Ta} = (-\boldsymbol{B\tau}) + \frac{(-\boldsymbol{B\tau})^2}{2} + \frac{(-\boldsymbol{B\tau})^3}{6}$, 由式(12)、(13)可以求得 $\boldsymbol{Ta}, \boldsymbol{x}_0$ 的初值.

根据精细积分递推式有

$$\boldsymbol{Ta} = 2\boldsymbol{Ta} + \boldsymbol{Ta}\cdot\boldsymbol{Ta}. \tag{14}$$

式(14)循环 k 次后,即有

$$\exp(-2^k \boldsymbol{B\tau}) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Ta}. \tag{15}$$

将式(11)与式(14)两个递推过程合二为一,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Ta}))\boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{Ta} = 2\boldsymbol{Ta} + \boldsymbol{Ta}\cdot\boldsymbol{Ta}. \end{cases} \tag{16}$$

式(16)经过一定次数的循环迭代,即可获得较为精确的解.

3　算例与分析

本文对 3 个病态方程组进行计算以及分析,其系数分别为:Hilbert(希尔伯特)矩阵,Vandermonde(范德蒙)矩阵,Pascal(帕斯卡)矩阵.此 3 个方程组都具有高度病态性,当阶数不太高时(如 10 阶内)病态程度就已相当严重,并且随阶数的增加,病态程度增长得非常剧烈,常规解法基本无效.在计算过程中发现对于预处理精细积分,参数 γ 和 μ、常数 S 和 T 的取值对解精度影响不大,并且只进行一次行范数均衡或者列范数均衡时,即可获得最优解.于是计算中取值:$\gamma = \mu = S = T = 1, \tau = 10^{-7}$.

3.1　系数矩阵为 Hilbert 矩阵的病态方程组

Hilbert 矩阵是典型的高度病态矩阵,由 Hilbert D(1894)提出.矩阵定义为

$$\boldsymbol{H} = (h_{ij})_{n\times n}, \qquad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1},$$

其构成的线性方程组为

$$\boldsymbol{Hx} = \boldsymbol{b},$$

精确解取为 $\boldsymbol{x}^* = [1,1,1,\cdots,1]$, 于是对应的右端项为 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Hx}^*$.

原精细积分法(PIM)和经 3 种预处理精细积分法的计算结果如表 1 和表 2 所示.其中表 1 数据进行一次行均衡,表 2 数据进行一次列均衡.

从表 1 和表 2 中可看出,3 种预处理精细积分法较原精细积分法解的精度都有提高,其中 1-范数均衡提升效果最为明显,远高于其他两种.对比表中的迭代次数,发现经过预处理后,迭代次数降低,提升了计算效率.最后,对比两个表可知行均衡和列均衡预处理效果大致相同,故

之后的计算只需进行行或者列均衡预处理即可.

表 1 精细积分法和预处理精细积分法结果对比(行均衡)

Table 1 Comparison of relative errors between PIM and PrPIM(row equilibration)

order number	PIM		1-norm equilibration+PIM		2-norm equilibration+PIM		∞ -norm equilibration+PIM	
	relative error	number of iterations	relative error	number of iterations	relative error	number of iterations	relative error	number of iterations
50	1.10E−5	57	3.20E−14	30	1.95E−7	48	7.60E−9	42
100	1.60E−5	57	5.90E−14	30	2.00E−7	48	1.80E−8	42
500	3.50E−5	56	1.60E−13	30	4.40E−7	46	7.10E−8	40
1 000	3.70E−5	55	2.40E−13	30	5.00E−7	46	1.60E−7	40

表 2 预处理前后精细积分法结果对比(列均衡)

Table 2 Comparison of relative errors between PIM and PrPIM(column equilibration)

order number	PIM		1-norm equilibraion+PIM		2-norm equilibration+PIM		∞ -norm equilibration+PIM	
	relative error	number of iterations	relative error	number of iterations	relative error	number of iterations	relative error	number of iterations
50	1.10E−5	57	5.50E−14	30	1.40E−7	49	1.10E−8	43
100	1.60E−5	57	8.30E−14	30	2.20E−7	48	1.30E−8	42
500	3.50E−5	56	9.00E−14	30	4.20E−7	47	7.80E−8	41
1 000	3.70E−5	55	1.60E−13	30	5.40E−7	46	1.20E−7	40

3.2 系数矩阵为 Vandermonde 矩阵的病态方程组

Vandermonde 矩阵(取自文献[9])的具体形式为

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1}\\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}.$$

Vandermonde 矩阵为高度病态矩阵, 阶数较小即有很大的条件数, 并且随 $\boldsymbol{x}$ 向量的不同会呈现不同的形式, 所以 Vandermonde 矩阵一般为非对称矩阵.在构造系数矩阵 $\boldsymbol{V}$ 时, 定义 $\boldsymbol{x}$ 向量为: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{H}\times\mathbf{1}$, 式中, $\boldsymbol{H}$ 为与 Vandermonde 矩阵同阶的 Hilbert 矩阵, $\mathbf{1}$ 为元素全为 1 的列向量, 其构成的线性方程组为 $\boldsymbol{Vy}=\boldsymbol{b}$, 精确解取为 $\boldsymbol{y}^*=[1,1,\cdots,1]$, 于是其对应的右端项为 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Vy}^*$.

对上述方程用原精细积分法与 3 种范数行均衡预处理精细积分法计算,并且与文献[9]中计算结果对比,结果见表 3.

表 3 本文结果与文献[9]结果有效数字的对比

Table 3 Comparison of the number of significant digits between this paper and ref. [9]

order number	ref. [9]	PIM	1-norm equilibraion+PIM	2-norm equilibration+PIM	∞ -norm equilibration+PIM
4	4	13	15	14	14
8	4	9	15	9	10
10	4	8	15	8	8

从表 3 可以看出文献[9]中的精度是最低的，而 3 种预处理精细积分法精度均优于未进行预处理的精细积分法。尤其以 1-范数均衡预处理精细积分法的精度最高，并且其有效数字不随矩阵增加而降低。

3.3　系数矩阵为 Pascal 矩阵的病态方程组

Pascal 矩阵(取自文献[4])定义为

$$\boldsymbol{P} = (P_{ij})_{n\times n},\ \begin{cases} P_{1j} = 1,\ P_{i1} = 1, & i,\ j = 1,2,\cdots,n, \\ P_{ij} = P_{(i-1)j} + P_{i(j-1)}, & i,\ j = 2,3,\cdots,n, \end{cases}$$

其构成的线性方程组为

$$\boldsymbol{Px} = \boldsymbol{b},$$

精确解取为 $\boldsymbol{x}^* = [1,1,1,\cdots,1]$，于是对应的右端项为 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Px}^*$.

对上述方程用原精细积分法与 3 种范数行均衡预处理精细积分法计算，并且与文献[4]中计算结果对比，结果见表 4。

表 4　本文结果与文献[4]结果有效数字的对比

Table 4　Comparison of the number of significant digits between this paper and ref. [4]

order number	ref. [4]	PIM	1-norm equilibraion+PIM	2-norm equilibration+PIM	∞ -norm equilibration+PIM
25	8	–	14	7	6
50	8	–	14	–	–
100	7	–	13	–	–

由于 Pascal 矩阵构成的方程组具有高度病态性，原精细积分法只能求解较为低阶的情况，从表 4 中可以看出，当阶数到 25 时，已经不能求解。经过 3 种范数均衡预处理后精细积分法求解范围在不同程度上得到扩大，其中，2-范数和无穷范数均衡预处理精细积分法只能求解到 25 阶，并且低于文献[4]中方法，但是 1-范数可以求解到 100 阶，并且解的精度远高于文献[4]中方法。

4　结　　论

1）提出行列的 1-范数均衡法，并扩展为范数均衡法。

2）将范数均衡预处理方法与精细积分法相结合，提出范数均衡预处理精细积分法。

3）数值实验表明，相较于精细积分法，范数均衡预处理精细积分法的计算效率和精度均有显著提升，适用范围也有显著扩宽。尤其是 1-范数均衡预处理精细积分法效果最为明显。

参考文献(References)：

[1]　BENZI M. Preconditioning techniques for large linear systems: a survey[J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, **182**(2): 418-477.

[2]　唐丽, 李鹏飞. 主元加权迭代法求解病态线性方程组[J]. 科学技术与工程, 2012, **12**(2): 381-383.(TANG Li, LI Pengfei. A pivot element weighting iterative method for solving ill-conditioned linear equations[J]. *Science Technology and Engineering*, 2012, **12**(2): 381-383.(in Chinese))

[3]　LIU C S. Optimally generalized regularization methods for solving linear inverse problems[J]. *Computers Materials & Continua*, 2012, **29**(2): 103-127.

[4] 胡圣荣，戴纳新. 病态线性方程组新解法：增广方程组法[J]. 华南农业大学学报，2009，**30**(1)：119-121.(HU Shengrong，DAI Naxin. A novel method for solving ill-conditioned linear system：augmented system method[J]. *Journal of South China Agricultural University*，2009，**30**(1)：119-121.(in Chinese))

[5] 于春肖，苑润浩. 预处理ICCG法求解稀疏病态方程组[J]. 河北大学学报(自然科学版)，2014，**34**(1)：1-6.(YU Chunxiao，YUAN Runhao. Preconditioning ICCG method for solving sparse ill-conditioned linear equations[J]. *Journal of Hebei University*(*Natural Science Edition*)，2014，**34**(1)：1-6.(in Chinese))

[6] 霍志周，熊登，张剑锋. 预条件共轭梯度法在地震数据重建方法中的应用[J]. 地球物理学报，2013，**56**(4)：1321-1330.(HUO Zhizhou，XIONG Deng，ZHANG Jianfeng. Application of the preconditioned conjugate gradient method to reconstruction of seismic data[J]. *Chinse Journal of Geophysics*，2013，**56**(4)：1321-1330.(in Chinese))

[7] 李秀艳，韩倩，汪剑鸣，等. 基于改进共轭梯度法的ERT图像重建[J]. 仪器仪表学报，2016，**37**(7)：1673-1679.(LI Xiuyan，HAN Qian，WANG Jianming，et al. ERT image reconstruction based on improved CG method[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*，2016，**37**(7)：1673-1679.(in Chinese))

[8] VAJARGAH B F，MORADI M. Diagonal scaling of ill-conditioned matrixes by genetic algorithm[J]. *Journal of Applied Mathematics Statistics & Informatics*，2012，**8**(1)：49-53.

[9] LIU C S. A two-side equilibration method to reduce the condition number of an ill-posed linear system[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*，2013，**91**(1)：17-42.

[10] KU C Y. A novel method for solving ill-conditioned systems of linear equations with extreme physical property contrasts[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*，2013，**96**(9)：409-434.

[11] 胡圣荣，罗锡文. 病态线性方程组的新解法：误差转移法[J]. 华南农业大学学报，2001，**22**(4)：92-94.(HU Shengrong，LUO Xiwen. A new method for solving ill-conditioned linear systems[J]. *Journal of South China Agricultural University*，2001，**22**(4)：92-94.(in Chinese))

[12] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报，1994，**34**(2)：131-136.(ZHOUG Wanxie. One precise time-integration method for structural dynamic equations[J]. *Journal of Dalian University of Technology*，1994，**34**(2)：131-136.(in Chinese))

[13] 富明慧，刘祚秋，林敬华. 一种广义精细积分法[J]. 力学学报，2007，**39**(5)：672-677.(FU Minghui，LIU Zuoqiu，LIN Jinghua. A generalized precise time step integration method[J]. *Acta Mechanica Sinica*，2007，**39**(5)：672-677.(in Chinese))

[14] 高强，吴锋，张洪武，等. 大规模动力系统改进的快速精细积分方法[J]. 计算力学学报，2011，**28**(4)：493-498.(GAO Qiang，WU Feng，ZHANG Hongwu，et al. A fast precise integration method for large-scale dynamic structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2011，**28**(4)：493-498.(in Chinese))

[15] 富明慧，张文志. 病态代数方程的精细积分解法[J]. 计算力学学报，2011，**28**(4)：530-534.(FU Minghui，ZHANG Wenzhi. Precise integration method for solving ill-conditioned algebraic equations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*，2011，**28**(4)：530-534.(in Chinese))

A Preconditioned Precise Integration Method for Solving Ill-Conditioned Linear Equations

FU Minghui,　LI Yongxi
(*Department of Applied Mechanics and Engineering*, *Sun Yat-sen University*, *Guangzhou* 510275, *P.R.China*)

Abstract: In order to reduce the condition number of the coefficient matrix of ill-conditioned linear equations, according to the equilibration thought for matrices, a 1-norm equilibration method was proposed to properly reduce the condition number of the matrix, and expanded to the norm equilibration methods. Then, the norm equilibration method together with the precise integration method was combined for solving ill-conditioned linear equations. The numerical results confirm that, the accuracy, efficiency and application scope of the preconditioned precise integration method for ill-conditioned linear equations all improve significantly (the number of significant digits increases by more than 5 and the number of iterations decreases by about 15). In these methods, the preconditioned precise integration method of 1-norm equilibration is the best.

Key words: norm; equilibration; preconditioned technology; precise integration method; ill-conditioned linear equations

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11672338;11502172)

引用本文/Cite this paper:

富明慧, 李勇息. 求解病态线性方程组的预处理精细积分法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(4): 462-469.

FU Minghui, LI Yongxi. A preconditioned precise integration method for solving ill-conditioned linear equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 462-469.