

一种避开大转动奇异点的 角速度数值积分方法*

张志刚¹, 侯俊剑¹, 齐朝晖²

(1. 郑州轻工业学院 机电工程学院, 郑州 450003;
2. 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116023)

摘要: 采用三参数描述有限转动会不可避免地遇到奇异性问题, 这给由角速度积分求解转动参数带来了数值困难. 系统地研究了采用转动矢量描述空间大转动的奇异性问题, 在此基础上提出了一种避开转动矢量奇异点的数值积分方法. 利用方向相同、模相差 2π 的两个转动矢量对应同一有限转动这一性质, 在数值积分过程中将靠近奇异点的转动矢量切换到与之对应但远离奇异点的数值稳定区, 从而避开了转动矢量奇异性给角速度数值积分带来的困难. 数值算例表明所提方法简单、稳定、有效.

关键词: 有限转动; 转动矢量; 奇异性; 角速度矢量; 数值积分

中图分类号: O302

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380222

引 言

转动角速度矢量定义了空间大转动时刚体姿态随时间的变化速率, 由转动角速度矢量进行积分进而得到刚体运动的转动参数是工程应用与仿真计算中一个不可避免的条件. 如在捷联惯性导航系统中, 采用陀螺仪实时探测飞行器的转动角速度参数, 为了获得系统姿态参数就需要对角速度积分. 这一过程被称为姿态解算, 是捷联式惯性导航系统的关键技术^[1]; 在刚体动力学仿真分析中, 初始时刻物体的姿态和转动角速度已知, 物体的角加速度由 Euler(欧拉)方程确定. 为得到刚体姿态的演化规律需要分别对角加速度和角速度在时间维度上进行积分^[2-3]; 在经典梁理论中, 通过平截面假设将三维连续介质力学问题简化为沿梁轴线的一维问题, 所以梁也看作由无数个刚截面沿轴线分布的特殊多刚体系统. 因此表征梁的运动变形需要对刚截面的转动进行描述, 这与刚体运动学相通. 此外, 在由 Simo 等^[4-5]针对空间大变形梁所提出的几何精确梁理论中, 用于度量梁弯曲扭转变形大小的曲率矢量与描述刚体转动快慢的角速度矢量具有比拟关系. 在一类采用曲率矢量作为节点参数的梁单元中, 也需要对曲率矢量沿梁弧长积分以得到完整的梁单元截面转动场^[6-9].

相较于描述定轴转动只需一个转角参数而言, 对空间有限转动的描述要来的更为复杂. 表征有限转动的转动矩阵是单位正交阵, 其 9 个元素满足 6 个约束方程, 因此独立参数只有 3 个. 在航天器姿态控制和捷联惯性导航系统中, 较多采用 Euler 角来描述系统姿态. 这种描述方

* 收稿日期: 2017-08-04; 修订日期: 2017-10-06

基金项目: 国家自然科学基金(11602228; 51505433)

作者简介: 张志刚(1984—), 男, 讲师, 博士(通讯作者). E-mail: zhigangzhang@foxmail.com).

式将有限转动分解为绕特定次序的三次定轴转动,与之对应的3个转角即为 Euler 角.然而采用 Euler 角描述空间大转动时会遇到奇异性问题,即在特定方位3个 Euler 角不能由转动矩阵反解唯一确定.Euler 角的奇异性直接导致了在奇异点附近由转动角速度积分转动参数的数值性态变差,因而导致数值积分效率降低甚至失败.

为了克服 Euler 角奇异性给角速度积分带来的数值困难,黄雪樵^[10]提出了“双欧法”.该方法采用两套转动次序不同的 Euler 角系统对同一空间转动进行描述,在数值积分过程中如果发现一组 Euler 角接近奇异点时便将转动参数切换为另一组 Euler 角.如此反复在这两组 Euler 角间进行切换,避免了 Euler 角奇异性所引起的数值困难^[11-13].然而采用 Euler 角表示转动矩阵涉及大量三角函数运算,且在奇异点附近进行 Euler 角切换时需要由转动矩阵反解 Euler 角,因此采用双欧方法的运算量偏大,这给实时计算带来了困难.

由于采用三参数描述有限转动必然会引起奇异性问题,于是 Euler 四元数方法被提出并应用于姿态解算^[14-15].Euler 四元数采用4个参数描述空间转动,其优点是不存在奇异点;但是相较于三参数方法会使描述参数维度增加,且需要满足四元数模为1的约束条件.这使由角速度积分得到转动参数时需要求解微分代数方程组,无疑增加了数值求解难度,降低了求解效率.

另一种用于描述有限转动的三参数方法是转动矢量方法^[16].转动矢量描述将任意大转动等效为一次定轴转动,其中转动矢量方向代表转轴方向,矢量的模代表转动角度,因而具有描述参数少、物理概念直观等优点.Zupan 和 Saje^[17]对比了不同微分方程数值算法在角速度数值积分过程时分别采用转动矢量、Euler 四元数等参数的数值稳定性问题,从数值上证明了转动参数奇异性问题对仿真计算的影响不可忽略.

本文系统地阐述了采用转动矢量描述有限转动的奇异性问题,并充分利用转动矢量描述大转动的周期性,提出了一种能简单有效避开转动矢量奇异点的数值积分策略.

1 有限转动的参数化描述与奇异性

转动概念的引入和研究刚体运动密不可分.在连续介质力学中,质点的运动可由相对于惯性坐标系的3个线位移描述.而对于包含无数质点且任意两质点间距离保持不变的刚体,为了采用较少参数描述其运动,通常在刚体上建立与之固接的连体坐标系,从而将刚体运动分解为随连体坐标系原点的平动和绕连体坐标系原点的转动描述,如图1所示.

在图1中,记惯性坐标系基矢量为 $g_i, i = 1, 2, 3$; 刚体连体坐标系基矢量为 $e_i, i = 1, 2, 3$; 刚体连体坐标系圆点 O' 相对于惯性坐标系圆点 O 的位置矢径为 r ; 惯性坐标系基矢量 g_i 与连体坐标系基矢量 e_i 满足如下关系:

$$e_i = Rg_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

其中矩阵 R 被称为转动矩阵.这里所定义的转动矩阵 R 描述了刚体连体基坐标相对于惯性坐标系的方位,即,可将当前时刻刚体连体坐标系方位看作是由初始时刻与整体惯性坐标系一致情况下施加一个有限转动得到.转动矩阵 R 是单位正交矩阵,满足如下关系式:

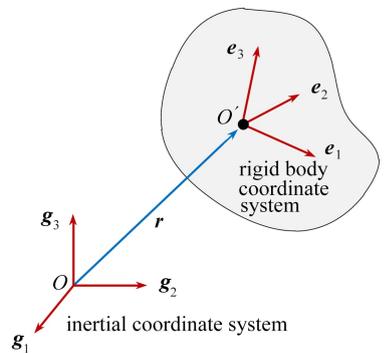


图1 刚体运动描述

Fig. 1 Description of the rigid body motion

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}. \quad (2)$$

上式为转动矩阵的 9 个元素提供了 6 个约束方程,因而最少可以采用 3 个独立参数来表示转动矩阵.这其中应用最广泛的有限转动三参数描述方法有 Euler 角和转动矢量等.

Euler 角描述方法把空间有限转动看成是 3 次连续定轴转动形成的.如图 1 中,刚体连体坐标系 $\{\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3\}$ 可以看作由整体坐标系 $\{\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3\}$ 先绕第 1 根轴转动 α 角度;然后绕新形成的中间坐标系第 2 根轴转动 β 角度;最后绕新的第 3 根轴转动 γ 角度得到.这里规定三次定轴转动对应角度 $\alpha\beta\gamma$ 满足右手法则为正、反之为负,这组转动次序可以简记为 1,2,3.据此,转动矩阵 \mathbf{R} 可以由 Euler 角表示为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\gamma\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

这组 Euler 角被航空器姿态控制、捷联惯性导航等领域所广泛采用,这 3 个 Euler 角 α, β, γ 也被依次称作翻滚角、俯仰角和偏航角.按照类似方法,根据转动轴线及其顺序选择的不同,一共可以定义 12 组不同的 Euler 角参数.

由 Euler 转动定理可知,任何一个空间转动都可以由一次定轴转动得到.据此可以引入有限转动的转动矢量描述,其矢量方向代表转轴方向,矢量的模代表绕转轴的转动角度.转动矩阵 \mathbf{R} 可以由转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 表示为^[18]

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1 - \cos\vartheta}{\vartheta^2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 = \exp \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4)$$

其中 $\vartheta = |\boldsymbol{\theta}|$ 为转动矢量的模,矩阵 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ 为与转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 对应的反对称矩阵,即

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

空间有限转动的描述具有特殊性:转动描述与转动次序息息相关,不具有可交换性.因此,描述有限转动的转动矢量虽然被称为矢量,但其并不满足矢量加法准则,即 $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2) \neq \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_2)\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_1)$, 在这个意义上转动矢量被称之为“伪矢量”.

此外定轴转动具有周期性,即转角相差 $2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 所对应的两个转动方位是相同的.因此当采用转动矢量描述时,如果保持转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 的方向不变,其模增加 $2k\pi$, 则根据式(4)有

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{R}\left(\boldsymbol{\theta} + 2k\pi \frac{\boldsymbol{\theta}}{\vartheta}\right), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (6)$$

包括 Euler 角和转动矢量在内的有限转动参数描述了刚体相对于惯性坐标系的方位;刚体姿态随时间的变化速率可以由转动角速度矢量来描述.根据刚体连体基与整体惯性坐标系的关系式(1),对方程两边求一阶时间导数可得

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{g}_i = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{g}_i = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{e}_i = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i, \quad (7)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T. \quad (8)$$

由转动矩阵 \mathbf{R} 的单位正交性式(2)易知 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ 为反对称矩阵,其轴矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 即为刚体转动角速度矢量.需要明确的是,这里的角速度矢量是参考惯性坐标系定义的.当采用转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 表示有限转动时,根据式(4)和(8),角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 可以由转动矢量的一阶导数 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}_\theta \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{T}_\theta = \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2. \quad (10)$$

在实际应用和工程计算中常会出现这样的问题:角速度矢量是时间的已知函数,要对象速度积分得到转动参数从而确定方位.如捷联惯性导航系统的姿态解算、刚体和梁的动力学仿真等,都需要对象速度矢量积分来确定转动参数.此外,在几何精确梁理论中,描述梁弯曲扭转变形大小的曲率矢量与描述刚体转动快慢的角速度矢量具有比拟关系^[4-5].角速度矢量是刚体姿态在时间维度上的变化速率,而曲率矢量可以描述梁刚性截面的方位在弧长维度上的变化速率.因此,只需要将角速度矢量表达式(9)中转动矢量的一阶时间导数 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 替换为对梁弧长的导数 $\boldsymbol{\theta}'$,就可以得到曲率矢量 $\boldsymbol{\kappa}$ 的表达式,即 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{T}_\theta \boldsymbol{\theta}'$.在采用曲率矢量作为节点参数构造梁单元的研究中,也需要对曲率矢量沿弧长积分以得到完整的梁截面转动场.

根据方程(9),转动矢量的一阶时间导数 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 可以由转动角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}_\theta^{-1} \boldsymbol{\omega}, \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{T}_\theta^{-1} = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{\vartheta^2} \left(1 - \frac{\vartheta}{2 \tan(\vartheta/2)} \right) \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2. \quad (12)$$

所以,只需对方程(11)进行积分便可以得到转动矢量,进而得到转动矩阵,确定刚体姿态.对逆矩阵 \mathbf{T}_θ^{-1} 表达式(12)进行分析不难得出:当转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$ 的模 ϑ 接近 2π 及其整数倍,即 $\vartheta \rightarrow 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ 时,矩阵 \mathbf{T}_θ^{-1} 表达式中 $2k\pi / (2 \tan(k\pi))$ 将趋近于无穷大,这意味着此时矩阵 \mathbf{T}_θ^{-1} 的数值性态非常差;而当 $\vartheta = 2k\pi$ 时,矩阵 \mathbf{T}_θ 将不可逆,所以 $\vartheta = 2k\pi$ 就是采用转动矢量表示有限转动的奇异点.在奇异点附近,转动矢量的一阶时间导数 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 将不能根据式(11)由角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 唯一确定.已经证明,这是采用三参数描述有限转动时必然会出现的奇异性问题.如当采用 Euler 角描述有限转动时,根据 Euler 角与转动矩阵的关系式(3)和角速度矢量定义式(8),刚体转动角速度矢量相对于惯性坐标系的坐标列阵可以表示为

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

由式(13)进行反解,可将3个 Euler 角的时间变化率用角速度矢量表达为

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos \beta} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & 0 \\ \cos \gamma \sin \beta & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

从式(14)可以看出,这组 Euler 角参数中的第二个转角 $\beta = \pi/2 + 2k\pi$ 即为奇异点.

由于在奇异点附近由转动角速度矢量积分得到转动参数的数值性态非常差,将会引起数值积分失败等问题.在航天器姿态控制和捷联惯性导航领域,针对 Euler 参数的奇异性问题提出了双欧法^[10].为了越过 Euler 角的奇异点,该方法采用两套转动次序不同的 Euler 角对同一有限转动进行描述.在角速度积分过程中,当发现一组 Euler 角接近奇异时就将转动参数切换为另一组 Euler 角,如此反复切换直至积分完成,从而避免了 Euler 角奇异性问题带来的数值困难.由于采用 Euler 角计算转动矩阵涉及到大量的三角函数运算,并且在奇异点附近进行

Euler 角切换时又涉及到由转动矩阵反解 Euler 角等操作,因此双欧法的数值运算量较大,不利于实时计算。

本文采用转动矢量作为空间大转动的描述参数,针对转动矢量奇异性问题提出了一种避开大转动奇异点的简单且稳定地进行角速度矢量数值积分的策略。

2 避开转动矢量奇异点的角速度积分策略

采用转动矢量描述空间大转动具有参数最少,不含冗余参数,物理概念明确,计算量小等优点,被多体系统动力学、大变形柔性梁动力学等研究领域所采用.因此,研究避开转动矢量奇异点的角速度积分方法具有十分重要的意义。

根据转动矢量描述的周期性可知,转动矢量的模 ϑ 在 $[0, 2\pi]$ 范围内就能够完整表述任意空间大转动,其中 $\vartheta = 2\pi$ 为奇异点,当 ϑ 在奇异点 2π 附近一个小区间范围内 $\vartheta \in [2\pi - \xi, 2\pi]$, 矩阵 \mathbf{T}_θ^{-1} 的数值性态会变的非常差.此时若继续利用式(11)积分求解转动矢量,将无法得到可信的数值结果.利用转动矢量含义:转动矢量的模代表绕转轴方向的转角.此时保持转动矢量方向不变而将转动矢量的模 ϑ 减去 2π , 便可以得到新的转动矢量 $\theta^* = \theta - 2\pi\theta/\vartheta$, 其对应转角应为 $\vartheta^* = \vartheta - 2\pi$.根据转动矢量与转动矩阵关系式(6)易知转动矢量 θ 和 θ^* 对应同一转动矩阵,即有

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta^*). \quad (15)$$

于是可以发现,转动矢量 θ 和新生成的转动矢量 θ^* 描述的是同一个有限转动,而新得到的转动 θ^* 的模满足 $\vartheta^* \in [-\xi, 0]$, 远离奇异点 $\pm 2\pi$.利用这一点可以将转动矢量的一个完整转动周期 $[0, 2\pi]$ 划分为 3 部分:稳定区(stable region)、缓冲区(buffer region)和奇异区(singular region),如图 2 所示。

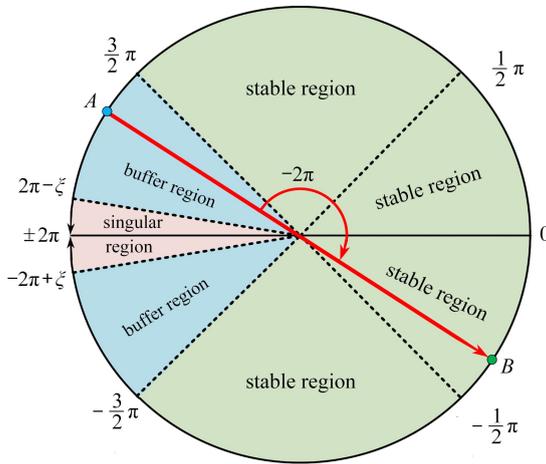


图 2 转动矢量区域划分

Fig. 2 Division of the rotation vector

在图 2 中,逆时针从 0 到 2π 表示一个完整的描述周期,其中区间 $[0, 3\pi/2]$ 远离奇异点,在此区间内矩阵 \mathbf{T}_θ^{-1} 数值性态良好,由转动角速度矢量积分反解转动矢量不存在奇异性问题,这里称之为稳定区;区间 $[2\pi - \xi, 2\pi]$ 靠近奇异点,矩阵 \mathbf{T}_θ^{-1} 在此区间的数值性态极差,这里称之为奇异区;区间 $[3\pi/2, 2\pi - \xi]$ 为在稳定区与奇异区之间设置的一个缓冲区,可以用于判断转动矢量是否接近转动奇异区.同样的,在转动矢量另一个完整的转动周期 $[-2\pi, 0]$ 也

可以类似地划分。

由转动角速度矢量进行数值积分得到转动矢量过程中, 为了避开转动矢量奇异点, 可以采用如下积分策略: 在每一个成功的积分步, 检验转动矢量的模 ϑ 在哪个区间. 如果 $\vartheta > 3\pi/2$, 则转动矢量 θ 落在缓冲区, 其对应矩阵 T_θ^{-1} 的数值特性有变差的趋势. 此时保持转动矢量方向不变, 只需将其模减去 2π 便可得到与 θ 表示相同转动的新的转动矢量 $\theta^* = \theta - 2\pi\theta/\vartheta$. 由图 2 可以直观地看出, 上述变换就相当于把落在缓冲区 A 点的转动矢量 θ 拉回到稳定区 B 点所对应的新转动矢量 θ^* , 而这两个转动矢量所对应的有限转动是完全等价的. 下一积分步中, 只需用 θ^* 代替 θ 进行迭代, 直到完成整个积分过程. 上述积分策略可以用流程图表示, 如图 3 所示.

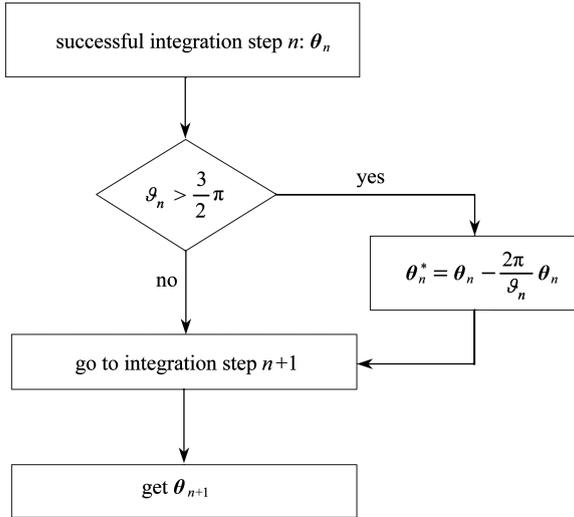


图 3 避开转动矢量奇异点的积分策略流程图

Fig. 3 A flowchart avoiding the singularity of the rotation vector

在本文提出的避开大转动奇异点的积分策略中, 采用转动矢量作为空间大转动的描述参数, 保持了三参数描述有限转动参数最少的优势; 在角速度矢量积分过程中, 仅需在奇异点附近进行一次矢量减法运算便可以对转动参数进行切换, 因此极大地减小了计算量. 最后给出具体数值算例, 来验证该方法的有效性.

3 数值算例

为了检验本文提出避开转动矢量奇异点的数值积分方法的有效性, 本节将给出具体数值算例. 这里构造数值算例的思路是: 首先定义转动矢量随时间变化的解析函数 $\theta(t)$; 然后利用转动角速度矢量与转动矢量一阶导数关系式(9)生成一个角速度矢量函数 $\omega(t)$; 从而依据式(11), 将转动矢量一阶时间导数由角速度矢量表达出来, 并根据初始条件得到一阶常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = T_\theta^{-1}\omega, \\ \theta|_{t=0} = \theta(0). \end{cases} \quad (16)$$

对于初值问题(16), 可以采用标准的常微分方程数值方法积分得到转动参数的数值解, 这里记作 $\tilde{\theta}(t)$ 以示与解析解 $\theta(t)$ 区别.

由于采用转动矢量描述空间大转动时的周期性,即方向相同而模相差 2π 的两个转动矢量其实表达的是同一个转动,因此,单纯从两个转动矢量分量大小上不足以说明两者的接近程度.这里给出一种表示两个转动矢量近似程度的度量,定义转动矢量数值解 $\bar{\theta}(t)$ 与解析函数 $\theta(t)$ 所对应的偏差转动矩阵:

$$\mathbf{R}_{\alpha_{\text{err}}} = \mathbf{R}_{\bar{\theta}}^{-1} \mathbf{R}_{\theta}, \quad (17)$$

其中 \mathbf{R}_{θ} 为转动矢量解析函数 θ 生成的转动矩阵, $\mathbf{R}_{\bar{\theta}}$ 为转动矢量数值解 $\bar{\theta}$ 生成的转动矩阵, α_{err} 为偏差矩阵 $\mathbf{R}_{\alpha_{\text{err}}}$ 对应的转动矢量.由式(17)可知,当 \mathbf{R}_{θ} 与 $\mathbf{R}_{\bar{\theta}}$ 相等时, $\mathbf{R}_{\alpha_{\text{err}}} = \mathbf{I}$, 此时其对应转动矢量 $\alpha_{\text{err}} = \mathbf{0}$.因此,可以用转动矢量 α_{err} 的模表示数值积分得到的转动矢量 $\bar{\theta}(t)$ 与解析解 $\theta(t)$ 之间的近似程度.

在本算例中,设转动矢量的解析函数 $\theta(t)$ 为

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \sin^2(20t) + 10\sin(t) \\ 5t \\ \sin(t) + 0.08(\cos(100t) - 1) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

上式给出的转动矢量的3个分量都是随时间变化的已知函数,其代表的是一个任意的空间大转动.据此转动角速度矢量可以表达为 $\omega(t) = \mathbf{T}_{\theta} \dot{\theta}(t)$, 将其代入式(16),通过求解初值问题解出由转动角速度矢量数值积分得到的转动矢量参数.

为了说明转动矢量奇异性产生的数值问题,并对比文中给出的避开奇异点数值积分方法的有效性,这里采用以下两种计算方案:

方案1 不考虑奇异性问题,直接对转动角速度进行积分求解;

方案2 采用文中提出的避开转动矢量奇异点的积分策略进行求解.

本算例是在 MATLAB 环境中编程,并采用基于显式四五阶变步长 Runge-Kutta 法的 Ode45 求解器进行数值积分求解.设定仿真计算时间为 2 s,绝对误差限和相对误差限均为 10^{-10} ,数值仿真结果如图 4~7 所示.

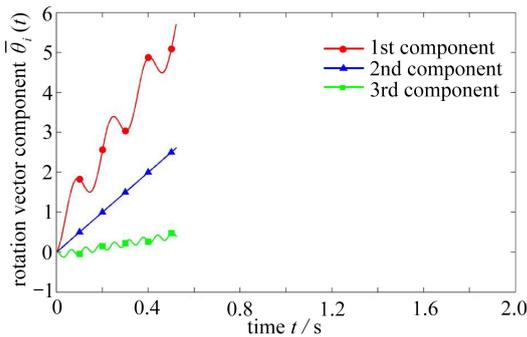


图 4 方案 1 所得转动矢量各分量的时间曲线

Fig. 4 Time evolutions of the rotation vector components in method 1

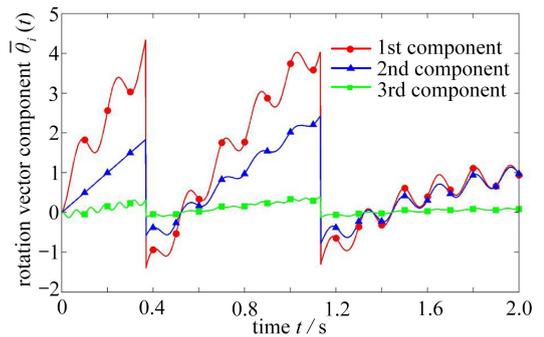


图 5 方案 2 所得转动矢量各分量的时间曲线

Fig. 5 Time evolutions of the rotation vector components in method 2

图 4 给出了采用方案 1 中由角速度矢量积分所得转动矢量 3 个分量的时间变化曲线.由于方案 1 在积分过程中没有对转动矢量奇异点做任何处理,正如本文所分析,因奇异点附近奇异区矩阵 \mathbf{T}_{θ}^{-1} 数值性态非常差,从而积分迭代无法满足积分精度要求,最终导致积分失败.

方案 2 采用了本文提出的避开转动矢量奇异点的积分策略,由于在数值积分到达积分奇异区之前就将转动矢量 θ 切换到了与之表示同一转动的稳定区所对应的转动矢量 θ^* ,从而

有效避免了在奇异区产生的数值困难.图 5 给出了采用方案 2 积分得到的转动矢量 3 个分量的时间变化曲线,从中可以看出数值积分顺利完成,初步验证方法达到了预期效果.

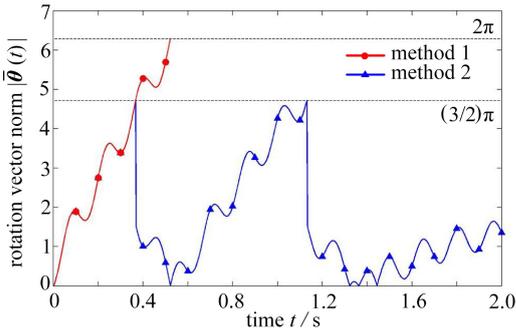


图 6 两种积分方案所得转动矢量模的时间曲线

Fig. 6 Time evolutions of the rotation vector norm in the two methods

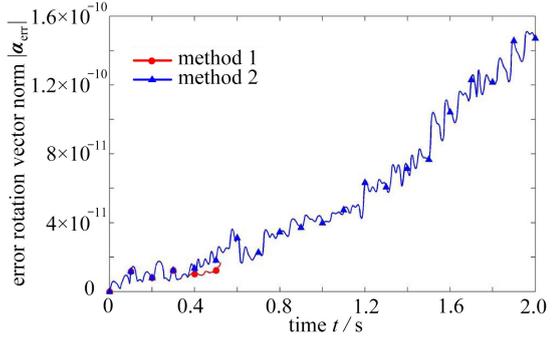


图 7 偏差转动矢量模的时间曲线

Fig. 7 Time evolutions of the magnitude of error rotation vector

图 6 给出了采用上述两种积分方案所得到的转动矢量模的时间变化曲线.从图中更能清晰地反映出:采用积分方案 1 时,当转动矢量的模在远离奇异点 2π 时,由转动角速度矢量积分得到转动参数可以顺利进行;当转动矢量模到达 2π 时,数值积分始终无法通过奇异点,最终数值积分失败.而采用积分方案 2 时,由于在转动矢量奇异点之前 $3\pi/2$ 处设置了缓冲区,使进入缓冲区的积分点都被重新拉回到了与之表述转动等价的稳定区,从而有效避免了数值积分在奇异区的数值困难,因而数值积分能够顺利完成.

图 7 进一步给出了由角速度矢量数值积分得到的转动矢量与转动矢量解析函数所描述转动的精度对比曲线.

分析图 7 可以看出:积分方案 1 在奇异点前可以得到满足精度的数值解,但无法通过奇异点;积分方案 2 所得转动矢量数值解与解析解所描述的空间大转动误差在 10^{-10} 左右,满足给定的精度要求.这个数值算例充分证明了本文方法能够有效地克服由转动角速度矢量积分得到转动矢量过程中的奇异性问题.

4 结 论

本文系统阐述了采用 3 参数描述空间大转动所遇到的奇异性问题及其给角速度矢量积分得到转动姿态带来的数值困难.采用转动矢量作为描述空间转动的参数,提出了可以有效避开转动矢量奇异点的角速度矢量数值积分方法.该方法利用了方向相同、模相差 2π 的两个转动矢量表示的转动矩阵等价这一性质,将转动矢量的模在 $0 \sim 2\pi$ 范围内划分为远离奇异点的稳定区、靠近奇异点的奇异区和将二者隔离开的缓冲区.通过在积分过程中对积分点所处区域进行判断,并在此基础上将落入缓冲区的积分点拉回稳定区,从而使积分过程有效避开了转动矢量奇异点.数值算例表明本文所提角速度矢量积分方法简单、稳定、有效,为相关领域转动参数积分计算提供了一种可行方案.

参考文献 (References):

- [1] 王德春, 芮健, 张杰. 捷联惯性导航系统姿态算法综述[J]. 战术导弹控制技术, 2009, 31(2): 41-44. (WANG Dechun, RUI Jian, ZHANG Jie. A review of attitude algorithms of strapdown inertial navigation system[J]. *Control Technology of Tactical Missile*, 2009, 31(2): 41-44. (in

- Chinese))
- [2] 刘延柱, 洪嘉振, 杨海兴. 多刚体系统动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989. (LIU Yanzhu, HONG Jiazhen, YANG Haixing. *Rigid Multibody System Dynamics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1989. (in Chinese))
- [3] 洪嘉振. 计算多体系统动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999. (HONG Jiazhen. *Computational Dynamics of Multibody Systems*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1999. (in Chinese))
- [4] SIMO J C. A finite strain beam formulation, the three-dimensional dynamic problem: part I [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985, **49**(1): 55-70.
- [5] SIMO J C, VU-QUOC L. A three-dimensional finite-strain rod model, part II: computational aspects[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, **58**(1): 79-116.
- [6] ZUPAN D, SAJE M. Finite-element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, **192**(49/50): 5209-5248.
- [7] ZUPAN D, SAJE M. The three-dimensional beam theory: finite element formulation based on curvature[J]. *Computers & Structures*, 2003, **81**(18/19): 1875-1888.
- [8] 张志刚, 齐朝晖, 吴志刚. 基于曲率插值的大变形梁单元[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(6): 620-629. (ZHANG Zhigang, QI Zhaohui, WU Zhigang. Large deformation beam element based on curvature interpolation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(6): 620-629. (in Chinese))
- [9] 张志刚, 齐朝晖, 吴志刚. 一种基于应变插值大变形梁单元的刚-柔耦合动力学分析[J]. 振动工程学报, 2015, **28**(3): 337-344. (ZHANG Zhigang, QI Zhaohui, WU Zhigang. Rigid-flexible dynamics analysis of a large deformation beam element based on interpolation of strains[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2015, **28**(3): 337-344. (in Chinese))
- [10] 黄雪樵. 克服欧拉方程奇异性的双欧法[J]. 飞行力学, 1994, **12**(4): 28-37. (HUANG Xueqiao. The dual-Euler method for overcoming the singularity of Euler equation[J]. *Flight Dynamics*, 1994, **12**(4): 28-37. (in Chinese))
- [11] 周伟, 张晓今, 寇保华, 等. 双欧法在克服伞-弹系统欧拉方程奇异性中的应用[J]. 航天返回与遥感, 2003, **24**(3): 4-8. (ZHOU Wei, ZHANG Xiaojin, KOU Baohua, et al. The application of the dual-Euler method for overcoming the singularity of Euler equation in parachute-missile system[J]. *Spacecraft Recovery & Remote Sensing*, 2003, **24**(3): 4-8. (in Chinese))
- [12] 孙丽, 秦永元. 捷联惯导系统姿态算法比较[J]. 中国惯性技术学报, 2006, **14**(3): 6-10. (SUN Li, QIN Yongyuan. Comparison of attitude algorithms of SINS[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2006, **14**(3): 6-10. (in Chinese))
- [13] 李跃军, 阎超. 飞行器姿态角解算的全角度双欧法[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, **33**(5): 505-508. (LI Yuejun, YAN Chao. Improvement of dual-Euler method for full scale Eulerian angles solution of aircraft[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2007, **33**(5): 505-508. (in Chinese))
- [14] 王勇军, 秦永元, 杨波. 四元数、Rodrigues 参数在卫星姿态解算上的对比研究[J]. 中国空间科学技术, 2007, **27**(3): 18-23. (WANG Yongjun, QIN Yongyuan, YANG Bo. Comparison of quaternion and Rodrigues parameters on attitude algorithm of secondary planet [J]. *Chinese Space Science and Technology*, 2007, **27**(3): 18-23. (in Chinese))
- [15] 张荣辉, 贾宏光, 陈涛, 等. 基于四元数法的捷联式惯性导航系统的姿态解算[J]. 光学精密工

- 程, 2008, **16**(10): 1963-1970.(ZHANG Ronghui, JIA Hongguang, CHEN Tao, et al. Attitude solution for strapdown inertial navigation system based on quaternion algorithm[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2008, **16**(10): 1963-1970.(in Chinese))
- [16] BAUCHAU O A, TRAINELLI L. The vectorial parameterization of rotation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2003, **32**(1): 71-92.
- [17] ZUPAN E, SAJE M. Integrating rotation from angular velocity[J]. *Advances in Engineering Software*, 2011, **42**(9): 723-733.
- [18] 齐朝晖. 多体系统动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2008.(QI Zhaohui. *Dynamics of Multibody Systems*[M]. Beijing: Science Press, 2008.(in Chinese))

A Numerical Integration Method for Angular Velocity Vectors to Avoid Singularity of Large Rotation

ZHANG Zhigang¹, HOU Junjian¹, QI Zhaohui²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450003, P.R.China;

2. School of State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116023, P.R.China)

Abstract: Using 3 parameters to describe finite rotations will inevitably have the singularity problem, which leads to numerical difficulties in solving the rotational parameters from the integration of the angular velocity. Based on systematical studies of the singularity of the rotation vector, a new numerical integration method, which can overcome singular points of the rotation vector, was proposed. With the property that the 2 rotation vectors with the same direction but different norms correspond to the same finite rotation, the rotation vector near the singular point was switched to its corresponding one far away from the singular point and in the numerical stability region, during the numerical integration. This method can avoid the difficulties in the numerical integration caused by the singularity of rotation vectors for the angular velocity vectors. Numerical examples show that the proposed method is simple, stable and effective.

Key words: finite rotation; rotation vector; singularity; angular velocity vector; numerical integration

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11602228;51505433)

引用本文/Cite this paper:

张志刚, 侯俊剑, 齐朝晖. 一种避开大转动奇异点的角速度数值积分方法[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(4): 452-461.

ZHANG Zhigang, HOU Junjian, QI Zhaohui. A numerical integration method for angular velocity vectors to avoid singularity of large rotation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 452-461.