文章编号:1000-0887(2018)07-0841-14

分数阶反向累加非等间距 GM(1,1)模型及应用*

曾　亮

(广东理工学院 基础教学部, 广东 肇庆 526100)

摘要: 针对非等间距递减序列的预测问题,首先构建了一阶反向累加非等间距 GM(1,1)模型(简称为非等间距 GOM(1,1)模型),并给出了模型参数的最小二乘解和可用于预测的离散时间响应式.为进一步提高模拟预测精度,利用分数阶累加思想,提出了分数阶非等间距 GOM(1,1)模型.以平均模拟相对误差最小化为目标,建立非线性规划模型可求解得到最优阶数.最后,以数值模拟和钛合金疲劳强度随温度变化预测为例,证实了该文提出模型的有效性和实用性.

关 键 词: 灰色预测模型; 反向累加; 非等间距; GOM(1,1)模型; 分数阶

中图分类号: O29　**文献标志码:** A　DOI:10.21656/1000-0887.380252

引　言

针对贫信息的小样本预测问题,Deng(邓聚龙)教授提出了灰色预测模型[1],其核心代表 GM(1,1)模型已被广泛应用于各个领域[2-5].GM(1,1)模型是一种基于一阶累加生成后建立的灰色模型,现有研究中主要针对的是非负递增序列的建模.对于现实中存在着的非负递减序列,如果将这些序列进行一阶累加,则生成序列为递增序列,建立模型后得到的拟合值也是递增的.此时对拟合值进行累减还原得到原始序列的模拟值时,就会产生不合理的误差[6-7].

为避免出现一些不合理误差,针对非负递减序列,宋中民等[6]首次给出了反向累加生成的定义,构建了反向累加 GM(1,1)模型(简记为 GOM(1,1)模型),并将其应用于害虫在某农药作用下单位面积内的数量变化预测.在此基础上,部分学者对模型的优化和拓展进行了深入研究.杨知等[8]通过改进传统 GOM(1,1)模型的背景值,构建了一种优化的 GOM(1,1)模型,通过实例表明优化后模型提高了模拟精度.何霞等[9]在文献[8]所提模型的基础上对初值进行修正,得到了两种不同形式的初值修正 GOM(1,1)模型,经数值模拟证实了两种模型都具有较高的模拟精度,比较适合高速递减序列的建模.练郑伟等[10]给出了反向累加生成序列的灰建模条件,并在假设反向累加后序列具有非齐次指数形式的前提下,推导得到了 GOM(1,1)模型的最优背景值.

近年来,分数阶系统受到了越来越多学者的关注,已成为了研究的热点问题[11-12].为减小模型的扰动界,增强模型的稳定性,Wu(吴利丰)等[13-14]借用分数阶蕴含着的“in between”思

* **收稿日期:** 2017-09-07; **修订日期:** 2017-11-09
基金项目: 国家自然科学基金(61472089);广东省普通高校特色创新项目(2016KTSCX164)
作者简介: 曾亮(1982—),男,副教授(E-mail: zengliang19820809@126.com).

想,将一阶和整数阶累加生成算子进行拓展,提出了分数阶累加生成算子,并将其应用到传统 GM(1,1)模型和离散 GM(1,1)模型中,取得了较好的效果.刘解放等[15]利用分数阶累加生成算子,将反向累加方式拓展到离散 GM(1,1)模型,提出了分数阶反向累加离散 GM(1,1)模型;在文献[16]中将反向累加方式拓展到针对近似非齐次指数序列的 NHGM(1,1,k)模型[17],分别提出了一阶和分数阶反向累加 NHGM(1,1,k)模型.

以上研究都是基于等间距情形下的优化和拓展,关于非等间距情形的研究文献并不多见.于丽亚等[18]将反向累加推广到非等间距的情形,建立了非等间距 GOM(1,1)模型,并将其应用于全国经济林面积的模拟中,取得了一定的效果.但由于该文中的应用实例是等间距的,而且没有进行预测研究,所以并不能较好地反映非等间距 GOM(1,1)模型的优势.本文以文献[18]为参考,根据灰色模型的建模机理,重新对由反向累加序列构建的白化微分方程进行推导,得到了一种非等间距 GOM(1,1)模型的新形式,并给出了模型参数的最小二乘解和可用于预测的离散时间响应式.为进一步提高模拟预测精度,结合分数阶累加思想,构建了分数阶非等间距 GOM(1,1)模型.最后,通过数值模拟和一个应用实例来验证本文提出模型的有效性和实用性.

1 分数阶反向累加生成的基本理论

假设非负原始数据序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$.若假定

$$\begin{cases}x_{(1)}(n)=x^{(0)}(n),\\ x_{(1)}(k)=x_{(1)}(k+1)+x^{(0)}(k), \qquad k=1,2,\cdots,n-1,\end{cases} \tag{1}$$

则称序列 $\boldsymbol{X}_{(1)}=\{x_{(1)}(1),x_{(1)}(2),\cdots,x_{(1)}(n)\}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的一阶反向累加生成序列.

式(1)采用矩阵形式可表示为

$$\boldsymbol{X}_{(1)}=\boldsymbol{X}^{(0)}\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为一阶反向累加生成矩阵,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 中的第 k 项可表示为

$$x_{(1)}(k)=\sum_{i=k}^{n}x^{(0)}(i). \tag{2}$$

若再对 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 进行一阶反向累加生成,则可得到原始序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的二阶反向累加生成序列:

$$\boldsymbol{X}_{(2)}=\boldsymbol{X}_{(1)}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}^{(0)}\boldsymbol{A}^2.$$

依此进行下去,则可得到原始序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的 M(M 为正整数)阶反向累加生成序列:

$$\boldsymbol{X}_{(M)}=\boldsymbol{X}^{(0)}\boldsymbol{A}^M,$$

式中 $\boldsymbol{A}^M$ 为 M 阶反向累加生成矩阵,容易得到 $\boldsymbol{A}^M=(a_{ik}^M)_{n\times n}$,其中

$$a_{ik}^M=\begin{cases}C_{i-k+M-1}^{i-k}=\dfrac{(i-k+M-1)(i-k+M-2)\cdots(M+1)M}{(i-k)!}, & i\geqslant k,\\ 0, & i<k,\end{cases}$$

即

$$A^M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_M^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{M+1}^2 & C_M^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{M+n-2}^{n-1} & C_{M+n-3}^{n-2} & C_{M+n-4}^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

根据组合数的广义定义[19],对 $\boldsymbol{A}^M$ 进行推广,可得分数阶反向累加生成矩阵 $\boldsymbol{A}^r(r \geqslant 0)$,即

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_r^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{r+1}^2 & C_r^1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{r+n-2}^{n-1} & C_{r+n-3}^{n-2} & C_{r+n-4}^{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

于是 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的 r 阶反向累加生成序列 $\boldsymbol{X}_{(r)} = \{x_{(r)}(1), x_{(r)}(2), \cdots, x_{(r)}(n)\}$ 用矩阵形式表示为

$$\boldsymbol{X}_{(r)} = \boldsymbol{X}^{(0)}\boldsymbol{A}^r,$$

其中 $\boldsymbol{X}_{(r)}$ 的第 k 项可表示为

$$x_{(r)}(k) = \sum_{i=k}^{n} C_{i-k+r-1}^{i-k} x^{(0)}(i). \tag{5}$$

由式(2)和式(5)可看出一阶反向累加生成和 r 阶反向累加生成的不同, $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 中的每个值可视为是权值都为 1 的原始数据的总和,而 $\boldsymbol{X}_{(r)}$ 中的每个值可视为是不同权值下的原始数据的总和.若取 $r = 1.2, n = 4$, 则可计算得

$$\boldsymbol{A}^{1.2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2 & 1 & 0 & 0 \\ 1.32 & 1.2 & 1 & 0 \\ 1.408 & 1.32 & 1.2 & 1 \end{bmatrix}.$$

从矩阵 $\boldsymbol{A}^{1.2}$ 中数据可看出,随着 $x^{(0)}(k)$ 中 k 值的增大,其对应的权值也越大,体现了充分利用系统新信息的思想.

2 一阶非等间距 GOM(1,1)模型

定义 1 设时间序列 $\boldsymbol{K} = \{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$, 其对应的系统行为观察值序列 $\boldsymbol{X}^{(0)} = \{x^{(0)}(k_1), x^{(0)}(k_2), \cdots, x^{(0)}(k_n)\}$, 记间距

$$\Delta k_i = \begin{cases} k_{i+1} - k_i, & i = 1,2,\cdots,n-1, \\ 1, & i = n. \end{cases}$$

若 $\Delta k_i = k_{i+1} - k_i (i = 1,2,\cdots,n-1)$ 不为恒定常数,则称序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为非等间距序列.

参照式(2)的累加方式,将间距作为权值进行累加,得到非等间距序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的一阶反向累加生成序列 $\boldsymbol{X}_{(1)} = \{x_{(1)}(k_1), x_{(1)}(k_2), \cdots, x_{(1)}(k_n)\}$, 其中

$$x_{(1)}(k_i) = \sum_{j=i}^{n} x^{(0)}(k_j)\Delta k_j, \qquad i = 1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

序列 $\boldsymbol{Z}_{(1)} = \{z_{(1)}(k_2), z_{(1)}(k_3), \cdots, z_{(1)}(k_n)\}$ 为 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 的紧邻均值生成序列,其中

$$z_{(1)}(k_i) = \frac{1}{2}[x_{(1)}(k_i) + x_{(1)}(k_{i-1})], \qquad i = 2,3,\cdots,n.$$

对序列 $\boldsymbol{X}_{(1)}$ 构建如下形式的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x_{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax_{(1)}(t)=b. \tag{7}$$

在区间 $[k_{i-1},k_i]$ 上对方程(7)两边积分,得

$$\int_{k_{i-1}}^{k_i}\mathrm{d}x_{(1)}(t)+\int_{k_{i-1}}^{k_i}ax_{(1)}(t)\mathrm{d}t=\int_{k_{i-1}}^{k_i}b\mathrm{d}t,$$

即

$$x_{(1)}(k_i)-x_{(1)}(k_{i-1})+a\int_{k_{i-1}}^{k_i}x_{(1)}(t)\mathrm{d}t=b\Delta k_{i-1}.$$

由于

$$\begin{aligned}x_{(1)}(k_{i-1})=\sum_{j=i-1}^{n}x^{(0)}(k_j)\Delta k_j=\\ x^{(0)}(k_{i-1})\Delta k_{i-1}+\sum_{j=i}^{n}x^{(0)}(k_j)\Delta k_j=\\ x^{(0)}(k_{i-1})\Delta k_{i-1}+x_{(1)}(k_i),\end{aligned}$$

则

$$-x^{(0)}(k_{i-1})\Delta k_{i-1}+a\int_{k_{i-1}}^{k_i}x^{(1)}(t)\mathrm{d}t=b\Delta k_{i-1}.$$

若在 $[k_{i-1},k_i]$ 上用梯形面积 $z_{(1)}(k_i)\Delta k_{i-1}$ 代替曲边梯形面积 $\int_{k_{i-1}}^{k_i}x_{(1)}(t)\mathrm{d}t$，则

$$-x^{(0)}(k_{i-1})\Delta k_{i-1}+az_{(1)}(k_i)\Delta k_{i-1}=b\Delta k_{i-1},$$

即

$$-x^{(0)}(k_{i-1})+az_{(1)}(k_i)=b,\qquad i=2,3,\cdots,n.$$

定义 2　称

$$-x^{(0)}(k_{i-1})+az_{(1)}(k_i)=b,\qquad i=2,3,\cdots,n \tag{8}$$

为一阶非等间距 GOM(1,1)模型,并称式(1)为该模型的白化形式.

定理 1　令

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z_{(1)}(k_2) & 1\\ -z_{(1)}(k_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z_{(1)}(k_n) & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(k_1)\\ -x^{(0)}(k_2)\\ \vdots\\ -x^{(0)}(k_{n-1})\end{bmatrix},$$

则非等间距 GOM(1,1)模型中的辨识参数 a,b 的最小二乘估计值为

$$\begin{cases}\hat{a}=\dfrac{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)x^{(0)}(k_{i-1})-\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\sum\limits_{i=1}^{n-1}x^{(0)}(k_i)}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}^2(k_i)-\left[\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\right]^2},\\ \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)x^{(0)}(k_{i-1})-\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}^2(k_i)\sum\limits_{i=1}^{n-1}x^{(0)}(k_i)}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}^2(k_i)-\left[\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\right]^2}.\end{cases} \tag{9}$$

证明 由最小二乘计算式可得

$$(\hat{a},\hat{b})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}. \tag{10}$$

由于

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z_{(1)}(k_2) & -z_{(1)}(k_3) & \cdots & -z_{(1)}(k_n)\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-z_{(1)}(k_2) & 1\\ -z_{(1)}(k_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z_{(1)}(k_n) & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}^{2}(k_i) & -\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\\ -\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i) & n-1\end{bmatrix},$$

则当 $|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|\neq 0$ 时,

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{*}=$$

$$\frac{1}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}^{2}(k_i)-\left[\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\right]^{2}}\begin{bmatrix}n-1 & \sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\\ \sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i) & \sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}^{2}(k_i)\end{bmatrix}.$$

又

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}-z_{(1)}(k_2) & -z_{(1)}(k_3) & \cdots & -z_{(1)}(k_n)\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-x^{(0)}(k_1)\\ -x^{(0)}(k_2)\\ \vdots\\ -x^{(0)}(k_{n-1})\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)x^{(0)}(k_{i-1})\\ -\sum\limits_{i=1}^{n-1}x^{(0)}(k_i)\end{bmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\frac{1}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}^{2}(k_i)-\left[\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\right]^{2}}\times$$

$$\begin{bmatrix}n-1 & \sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)\\ \sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i) & \sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}^{2}(k_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(1)}(k_i)x^{(0)}(k_{i-1})\\ -\sum\limits_{i=1}^{n-1}x^{(0)}(k_i)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(n-1)\sum_{i=2}^{n} z_{(1)}(k_i)x^{(0)}(k_{i-1}) - \sum_{i=2}^{n} z_{(1)}(k_i)\sum_{i=1}^{n-1} x^{(0)}(k_i)}{(n-1)\sum_{i=2}^{n} z_{(1)}^2(k_i) - \left[\sum_{i=2}^{n} z_{(1)}(k_i)\right]^2} \\ \dfrac{\sum_{i=2}^{n} z_{(1)}(k_i)\sum_{i=2}^{n} z_{(1)}(k_i)x^{(0)}(k_{i-1}) - \sum_{i=2}^{n} z_{(1)}^2(k_i)\sum_{i=1}^{n-1} x^{(0)}(k_i)}{(n-1)\sum_{i=2}^{n} z_{(1)}^2(k_i) - \left[\sum_{i=2}^{n} z_{(1)}(k_i)\right]^2} \end{bmatrix}.$$

定理 2　设 $\hat{a},\hat{b}$ 满足定理 1 所述条件.若规定 $t=k_n$ 时,

$$\hat{x}_{(1)}(k_n)=x_{(1)}(k_n)=x^{(0)}(k_n),$$

则非等间距 GOM(1,1)模型的时间响应函数为

$$\hat{x}_{(1)}(k_i)=\left[x^{(0)}(k_n)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}(k_i-k_n)}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}},\qquad i=1,2,\cdots. \tag{11}$$

证明　由式(7)可解得

$$x_{(1)}(t)=C_0e^{-\hat{a}t}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}},$$

则模型的时间响应函数为

$$\hat{x}_{(1)}(k_i)=C_0e^{-\hat{a}k_i}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}},\qquad i=1,2,\cdots. \tag{12}$$

令 $\hat{x}_{(1)}(k_n)=x_{(1)}(k_n)=x^{(0)}(k_n)$, 得

$$C_0=\left[x^{(0)}(k_n)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{\hat{a}k_n}.$$

将 C_0 代入式(12),得

$$\hat{x}_{(1)}(k_i)=\left[x^{(0)}(k_n)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}(k_i-k_n)}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}},\qquad i=1,2,\cdots.$$

利用非等间距 GOM(1,1)模型进行外推预测时,根据反向累加的定义,在累减还原过程中,最后外推时点还原值的计算需要扩充一步间距信息,即需要多给出一个外推时点值.考虑到间距差异过大,易导致模型模拟预测精度不高[20],所以本文取扩充间距为已知原始序列间距的平均,即

$$\Delta k_{n+\tau}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta k_i,$$

其中 n 为原始序列个数, τ 为预测的时点个数.于是第 $n+\tau+1$ 个时点值(即扩充的外推时点值)可设定为

$$k_{n+\tau+1}=k_{n+\tau}+\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta k_i.$$

基于以上分析,综合考虑反向累加生成的定义以及定理 2 中模型初值的确定方式,可得非等间距 GOM(1,1)模型的还原式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_i)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta k_i}[\hat{x}_{(1)}(k_i)-\hat{x}_{(1)}(k_{i+1})], & i=1,2,\cdots,n-1,\\ x^{(0)}(k_n), & i=n,\\ \frac{1}{\Delta k_i}[\hat{x}_{(1)}(k_i)-\hat{x}_{(1)}(k_{i+1})], & i=n+1,n+2,\cdots,n+\tau,\end{cases} \tag{13}$$

其中 $$k_{n+\tau+1}=k_{n+\tau}+\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Delta k_i.$$

3 分数阶非等间距 GOM(1,1)模型

若 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为定义 1 所述,现借用分数阶累加思想,参照式(5)和式(6)的累加方式,可构造得到 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 的 r 阶反向累加生成序列 $\boldsymbol{X}_{(r)}=\{x_{(r)}(k_1),x_{(r)}(k_2),\cdots,x_{(r)}(k_n)\}$, 其中

$$x_{(r)}(k_i)=\sum_{j=i}^{n}C_{j-i+r-1}^{j-i}x^{(0)}(k_j)\Delta k_j,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{14}$$

且规定

$$C_{j-i+r-1}^{j-i}=\frac{(j-i+r-1)(j-i+r-2)\cdots(r+1)r}{(j-i)!},\ C_{r-1}^{0}=1,\ C_{k-1}^{k}=0,\quad k=1,2,\cdots.$$

$\boldsymbol{X}_{(r)}$ 的紧邻均值生成序列 $\boldsymbol{Z}_{(r)}=\{z_{(r)}(k_2),z_{(r)}(k_3),\cdots,z_{(r)}(k_n)\}$, 其中

$$z_{(r)}(k_i)=\frac{1}{2}[x_{(r)}(k_i)+x_{(r)}(k_{i-1})],\qquad i=2,3,\cdots,n.$$

对序列 $\boldsymbol{X}_{(r)}$ 构建如下形式的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}x_{(r)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax_{(r)}(t)=b. \tag{15}$$

在区间 $[k_{i-1},k_i]$ 上对方程(15)两边积分,得

$$\int_{k_{i-1}}^{k_i}\mathrm{d}x_{(r)}(t)+\int_{k_{i-1}}^{k_i}ax_{(r)}(t)\mathrm{d}t=\int_{k_{i-1}}^{k_i}b\mathrm{d}t,$$

即

$$x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})+a\int_{k_{i-1}}^{k_i}x_{(r)}(t)\mathrm{d}t=b\Delta k_{i-1}.$$

若在 $[k_{i-1},k_i]$ 上用梯形面积 $z_{(r)}(k_i)\Delta k_{i-1}$ 代替曲边梯形面积 $\int_{k_{i-1}}^{k_i}x_{(r)}(t)\mathrm{d}t$, 则

$$x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})+az_{(r)}(k_i)\Delta k_{i-1}=b\Delta k_{i-1},$$

即

$$\frac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}+az_{(r)}(k_i)=b,\qquad i=2,3,\cdots,n.$$

定义 3 称

$$\frac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}+az_{(r)}(k_i)=b,\qquad i=2,3,\cdots,n \tag{16}$$

为 r 阶非等间距 GOM(1,1)模型(简称为非等间距 $\mathrm{GOM}^r(1,1)$ 模型),并称式(15)为该模型的白化形式.

定理 3 令

$$\boldsymbol{B}_r=\begin{bmatrix}-z_{(r)}(k_2) & 1\\ -z_{(r)}(k_3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z_{(r)}(k_n) & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{Y}_r=\begin{bmatrix}\dfrac{x_{(r)}(k_2)-x_{(r)}(k_1)}{\Delta k_1}\\ \dfrac{x_{(r)}(k_3)-x_{(r)}(k_2)}{\Delta k_2}\\ \vdots\\ \dfrac{x_{(r)}(k_n)-x_{(r)}(k_{n-1})}{\Delta k_{n-1}}\end{bmatrix},$$

则非等间距 $GOM^r(1,1)$ 模型中的辨识参数 a,b 的最小二乘估计值为

$$\begin{cases}\hat{a}=\dfrac{-(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\dfrac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}+\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}^2(k_i)-\left[\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\right]^2},\\ \hat{b}=\dfrac{-\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\dfrac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}+\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}^2(k_i)\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}}{(n-1)\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}^2(k_i)-\left[\sum\limits_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\right]^2}.\end{cases}\tag{17}$$

定理 3 的证明方法同定理 1,此略.

定理 4 设 $\hat{a},\hat{b}$ 满足定理 3 所述条件,若规定 $t=k_n$ 时, $\hat{x}_{(r)}(k_n)=x_{(r)}(k_n)=x^{(0)}(k_n)$, 则非等间距 $GOM^r(1,1)$ 模型的时间响应函数为

$$\hat{x}_{(r)}(k_i)=\left[x^{(0)}(k_n)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}(k_i-k_n)}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}},\qquad i=1,2,\cdots.\tag{18}$$

定理 4 的证明方法同定理 2,此略.

参照非等间距 GOM(1,1)模型还原式的计算原理,下面给出非等间距 $GOM^r(1,1)$ 模型的还原式:

$$\hat{x}^{(0)}(k_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta k_i}\left[\sum\limits_{j=i}^{n}C_{j-i+1-r-1}^{j-i}\hat{x}_{(r)}(k_j)-\sum\limits_{j=i+1}^{n}C_{j-i-1+1-r-1}^{j-i-1}\hat{x}_{(r)}(k_j)\right], & i=1,2,\cdots,n-1,\\ x^{(0)}(k_n), & i=n,\\ \dfrac{1}{\Delta k_i}\left[\sum\limits_{j=i}^{n+\tau+1}C_{j-i+1-r-1}^{j-i}\hat{x}_{(r)}(k_j)-\sum\limits_{j=i+1}^{n+\tau+1}C_{j-i-1+1-r-1}^{j-i-1}\hat{x}_{(r)}(k_j)\right], & i=n+1,n+2,\cdots,n+\tau,\end{cases}$$

其中 τ 为预测的时点个数, $k_{n+\tau+1}=k_{n+\tau}+\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\Delta k_i$.

4 最优阶数的确定

平均模拟相对误差常被用来衡量一个模型的模拟效果.一般认为,平均模拟相对误差越小说明模型的模拟效果越好,反之亦然.下面给出非等间距灰色模型的平均模拟相对误差的一般

定义.

定义 4 若 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 如定义 1 所述, $\hat{\boldsymbol{X}}^{(0)}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 相对应的模型模拟值,则称

$$\varepsilon_{\mathrm{ARPE}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(k_i)-x^{(0)}(k_i)}{x^{(0)}(k_i)}\right|\times 100\% \tag{19}$$

为模型的平均模拟相对误差.

对于非等间距 GOM^r(1,1) 模型,其模拟预测效果与分数阶阶数 r 相关.为达到最优的模拟预测效果,本文以平均模拟相对误差最小化为目标,分数阶阶数 r 和参数 a,b 之间满足的关系为约束条件,建立如下非线性规划模型[21]:

$$\min_{r}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(k_i)-x^{(0)}(k_i)}{x^{(0)}(k_i)}\right|\times 100\%,$$

$$\text{s.t.}\quad r\geqslant 0,$$

$$\Delta k_i=\begin{cases}k_{i+1}-k_i, & i=1,2,\cdots,n-1,\\ 1, & i=n,\end{cases}$$

$$x_{(r)}(k_i)=\sum_{j=i}^{n}\frac{(j-i+r-1)(j-i+r-2)\cdots(r+1)r}{(j-i)!}x^{(0)}(k_j)\Delta k_j,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$z_{(r)}(k_i)=\frac{1}{2}[x_{(r)}(k_i)+x_{(r)}(k_{i-1})],\quad i=2,3,\cdots,n,$$

$$\hat{a}=\frac{-(n-1)\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\frac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}+\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\sum_{i=2}^{n}\frac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}}{(n-1)\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}^2(k_i)-\left[\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\right]^2},$$

$$\hat{b}=\frac{-\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\frac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}+\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}^2(k_i)\sum_{i=2}^{n}\frac{x_{(r)}(k_i)-x_{(r)}(k_{i-1})}{\Delta k_{i-1}}}{(n-1)\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}^2(k_i)-\left[\sum_{i=2}^{n}z_{(r)}(k_i)\right]^2},$$

$$\hat{x}_{(r)}(k_i)=\left[x^{(0)}(k_n)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]\mathrm{e}^{-\hat{a}(k_i-k_n)}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\hat{x}^{(0)}(k_i)=\frac{1}{\Delta k_i}\left[\sum_{j=i}^{n}C_{j-i+1-r-1}^{j-i}\hat{x}_{(r)}(k_j)-\sum_{j=i+1}^{n}C_{j-i-1+1-r-1}^{j-i-1}\hat{x}_{(r)}(k_j)\right],\quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

$$\hat{x}^{(0)}(k_n)=x^{(0)}(k_n).$$

该规划模型可借助数值软件编程求解,得出最优的阶数 r 和参数 a,b 的值.将获得的参数值代入模型的时间响应式和还原式中,便可得到模型在最优模拟精度下的模拟预测结果.

5 应 用

5.1 数值模拟

为验证本文提出模型的有效性,现构造一非等间距递减序列进行数值模拟.取 $y=10\mathrm{e}^{-0.08x}+2$, 令 $x=1,3,4,7,9,11$, 得数据序列:

$$\boldsymbol{X}=\{11.231\,163,\ 9.866\,279,\ 9.261\,490,\ 7.712\,091,\ 6.867\,523,\ 6.147\,829\}.$$

用前 5 个数据建立模型,第 6 个数据用来检验模型的预测效果,即取原始数据序列:

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=\{11.231\ 163,\ 9.866\ 279,\ 9.261\ 490,\ 7.712\ 091,\ 6.867\ 523\}.$$

对 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 分别建立非等间距 GM(1,1)模型、非等间距 GOM(1,1)模型和非等间距 GOM^r(1,1) 模型.3 种模型的时间响应函数分别为

① 非等间距 GM(1,1)模型:

$$\hat{x}^{(1)}(k_i)=-164.261\ 097\mathrm{e}^{-0.064\ 419(k_i-1)}+175.492\ 260,\qquad i=1,2,\cdots;$$

② 非等间距 GOM(1,1)模型 ($\hat{a}=0.059\ 082$, $\hat{b}=-6.904\ 162$):

$$\hat{x}_{(1)}(k_i)=123.724\ 577\mathrm{e}^{-0.059\ 082(k_i-9)}-116.857\ 054,\qquad i=1,2,\cdots;$$

③ 非等间距 GOM^r(1,1) 模型 ($r=1.014\ 5$, $\hat{a}=0.063\ 310$, $\hat{b}=-6.913\ 166$):

$$\hat{x}_{(r)}(k_i)=116.063\ 541\mathrm{e}^{-0.063\ 310(k_i-9)}-109.196\ 018,\qquad i=1,2,\cdots.$$

以上 3 种模型对原始序列的模拟预测结果和相对误差比较如表 1 所示.

表 1 3 种灰色模型的模拟预测相对误差比较

Table 1 Comparison of the relative fitting errors and relative predictive errors of the 3 models

time point	actual value	non-equidistant GM(1,1) model: model value $\hat{x}^{(1)}(k_i)$	error ε /%	non-equidistant GOM(1,1) model: model value $\hat{x}_{(1)}(k_i)$	error ε /%	non-equidistant GOM^r(1,1) model ($r=1.014\ 5$): model value $\hat{x}_{(r)}(k_i)$	error ε /%
1	11.231 163	11.231 163	0.00	11.060 581	1.52	11.229 990	0.01
3	9.866 279	9.928 193	0.63	10.118 122	2.55	9.866 319	0.00
4	9.261 490	9.009 070	2.73	9.000 923	2.81	9.092 331	1.83
7	7.712 091	7.930 985	2.84	7.759 321	0.61	7.783 625	0.93
9	6.867 523	6.745 438	1.78	6.867 523	0.00	6.867 523	0.00
average relative fitting error			1.59		1.50		0.55
11	6.147 829	5.930 028	3.54	6.126 149	0.35	6.219 403	1.16

从表 1 可以看出,非等间距 GM(1,1)模型的平均模拟相对误差为 1.59%,而非等间距 GOM(1,1)模型和非等间距 GOM^r(1,1) 模型的平均模拟相对误差分别为 1.50%和 0.55%,均低于前者.从一步预测误差来看,非等间距 GM(1,1)模型的预测误差为 3.54%,非等间距 GOM(1,1)模型和非等间距 GOM^r(1,1) 模型的预测误差分别为 0.35%和 1.16%.综合分析可知,非等间距 GOM(1,1)模型和非等间距 GOM^r(1,1) 模型的模拟预测精度都高于非等间距 GM(1,1)模型,从而表明了本文提出的模型比较适合对非等间距递减序列的建模,同时也证实了本文提出模型的有效性.

5.2 实际应用

文献[22]中给出了钛合金疲劳强度随温度变化关系数据,具体见表 2.此数据列为非等间距递减序列,适合于本文所提模型.

表 2 钛合金疲劳强度随温度变化表

Table 2 Variation of the fatigue strength of Ti alloy with temperature

temperature T/℃	100	130	170	210	240	270	310	340	380
fatigue strength σ/MPa	560	557.54	536.10	516.10	505.60	486.10	467.40	453.80	436.40

现对前 7 个数据分别建立非等间距 GM(1,1)模型、非等间距 GOM(1,1)模型和非等间距 GOM^r(1,1) 模型,最后 1 个数据用来检验模型的预测效果.3 种模型的时间响应函数分别为

① 非等间距 GM(1,1)模型:

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = -580\,302.596\,626e^{-0.000\,973(k_i-100)} + 580\,862.596\,626, \quad i=1,2,\cdots;$$

② 非等间距 GOM(1,1)模型 ($\hat{a}=0.000\,885$, $\hat{b}=-465.412\,227$):

$$\hat{x}_{(1)}(k_i) = 526\,359.599\,482e^{-0.000\,885(k_i-340)} - 525\,905.799\,482, \quad i=1,2,\cdots;$$

③ 非等间距 $GOM^r(1,1)$ 模型 ($r=0.998\,3$, $\hat{a}=0.000\,867$, $\hat{b}=-465.195\,119$):

$$\hat{x}_{(r)}(k_i) = 536\,990.328\,109e^{-0.000\,867(k_i-340)} - 536\,536.528\,109, \quad i=1,2,\cdots.$$

以上 3 种模型得到的模拟预测值及相对误差的比较结果见表 3.

表 3 3 种灰色模型对钛合金疲劳强度的模拟预测结果

Table 3 Simulation and prediction results of the fatigue strength of Ti alloy with the 3 models

time point	actual value	non-equidistant GM(1,1) model		non-equidistant GOM(1,1) model		non-equidistant $GOM^r(1,1)$ model ($r=0.998\,3$)	
		model value $\hat{x}^{(1)}(k_i)$	error ε/%	model value $\hat{x}_{(1)}(k_i)$	error ε/%	model value $\hat{x}_{(r)}(k_i)$	error ε/%
100	560	560.00	0.00	568.46	1.51	568.61	1.54
130	557.54	556.81	0.13	551.14	1.15	550.77	1.21
170	536.10	538.17	0.39	531.97	0.77	531.69	0.82
210	516.10	517.62	0.29	515.73	0.07	516.10	0.00
240	505.60	500.26	1.06	502.22	0.67	502.72	0.57
270	486.10	485.86	0.05	486.91	0.17	486.85	0.15
310	467.40	469.60	0.47	472.05	1.00	471.72	0.92
340	453.80	453.85	0.01	453.80	0.00	453.80	0.00
average relative fitting error			0.30		0.67		0.65
380	436.40	438.66	0.52	442.86	1.48	441.46	1.16

从表 3 可以看出,非等间距 GOM(1,1)模型的平均模拟相对误差和一步预测误差分别为 0.67%和 1.48%,而非等间距 $GOM^r(1,1)$ 模型相对应于 0.65%和 1.16%,提高了模拟预测精度.虽然本文提出模型的平均模拟相对误差和一步预测误差都分别大于传统非等间距 GM(1,1)模型的 0.30%和 0.52%,相应精度并没有得到提高(这与原始数据的特点和预测扩充间距的取法有一定的关系),但它们的模拟精度都高于 99.3%,预测精度都高于 98.5%,模型的精度等级高[22],说明其适用于对钛合金疲劳强度的模拟预测,由此证实了本文提出的模型具有一定的实用性.

6 结　　论

对于现实中存在的非等间距递减序列的预测问题,本文利用反向累加思想,提出了非等间距 GOM(1,1)模型,它是非等间距 GM(1,1)模型的一类拓展.为进一步提高模拟预测精度,结合分数阶累加思想,充分利用系统新信息,构建了分数阶非等间距 GOM(1,1)模型.通过数值模拟和应用实例表明本文提出的模型具有可行性和实用性,而且相对于一阶反向累加,分数阶反向累加能进一步提高建模精度.由此说明本文提出的模型是对灰色预测理论的有效扩展和补充.在外推预测时,本文选取的扩充间距为已知间距的平均值,但通过模拟实验及研究发现,预测精度与扩充间距有关联,取平均间距并不一定使得预测精度达到最优.因此,如何选取合理的扩充间距使预测精度达到最优,是值得进一步研究的问题.

致谢 本文作者衷心感谢广东理工学院科研项目(GKJ2016002)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] DENG Julong. Control problem of grey systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1982, **1**(5): 288-294.

[2] ZHAO Huiru, GUO Sen. An optimized grey model for annual power load forecasting[J]. *Energy*, 2016, **107**: 272-286.

[3] LIU Li, WANG Qianru, WANG Jianzhou, et al. A rolling grey model optimized by particle swarm optimization in economic prediction[J]. *Computational Intelligence*, 2016, **32**(3): 391-419.

[4] WU Chengmau, WEN Jetchau, CHANG Kouchiang. Evaluation of the gray model GM(1,1) applied to soil particle distribution[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 2009, **73**(6): 1775-1785.

[5] LI Cuiping, QIN Jiexuan, LI Jiajie, et al. The accident early warning system for iron and steel enterprises based on combination weighting and grey prediction model GM(1,1)[J]. *Safety Science*, 2016, **89**: 19-27.

[6] 宋中民, 肖新平. 反向累加生成及灰色 GOM(1,1)模型[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2002, **26**(4): 531-533.(SONG Zhongmin, XIAO Xinping. The accumulated generating operation in opposite direction and its use in grey model GOM(1,1)[J]. *Journal of Wuhan University of Technology*(*Transportation Science & Engineering*), 2002, **26**(4): 531-533.(in Chinese))

[7] 关叶青, 刘桦. 递减序列的灰色建模方法[J]. 系统工程, 2015, **33**(4): 154-158.(GUAN Yeqing, LIU Hua. Grey model based on descending sequence[J]. *Systems Engineering*, 2015, **33**(4): 154-158.(in Chinese))

[8] 杨知, 任鹏, 党耀国. 反向累加生成与灰色 GOM(1,1)模型的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2009, **29**(8): 160-164.(YANG Zhi, REN Peng, DANG Yaoguo. Grey opposite-direction accumulated generating and optimization of GOM(1,1) model[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2009, **29**(8):160-164.(in Chinese))

[9] 何霞, 刘卫锋. 两个初值修正灰色 GOM(1,1)模型及其等价性研究[J]. 杭州师范大学学报(自然科学版), 2011, **10**(3): 217-222.(HE Xia, LIU Weifeng. Two grey GOM(1,1) models based on modified initial value and its equivalence[J]. *Journal of Hangzhou Normal University*(*Natural Science Edition*), 2011, **10**(3): 217-222.(in Chinese))

[10] 练郑伟, 党耀国, 王正新. 反向累加生成的特性及 GOM(1,1)模型的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, **33**(9): 2306-2312.(LIAN Zhengwei, DANG Yaoguo, WANG Zhengxin. Properties of accumulated generating operation in opposite-direction and optimization of GOM(1,1) model[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2013, **33**(9): 2306-2312.(in Chinese))

[11] MONJE C A, CHEN Y Q, VINAGRE B M, et al. *Fractional-Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*[M]. London: Springer, 2010.

[12] 张玮玮, 吴然超. 基于线性控制的分数阶混沌系统的对偶投影同步[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(7): 710-717.(ZHANG Weiwei, WU Ranchao. Dual projective synchronization of fractional-order chaotic systems with a linear controller[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(7): 710-717.(in Chinese))

[13] WU Lifeng, LIU Sifeng, YAO Ligen, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**

(7): 1775-1785.

[14] 吴利丰, 刘思峰, 姚立根. 基于分数阶累加的离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2014, **34**(7): 1822-1827.(WU Lifeng, LIU Sifeng, YAO Ligen. Discrete grey model based on fractional order accumulate[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2014, **34**(7): 1822-1827.(in Chinese))

[15] 刘解放, 刘思峰, 吴利丰, 等. 分数阶反向累加离散灰色模型及其应用研究[J]. 系统工程与电子技术, 2016, **38**(3): 719-724.(LIU Jiefang, LIU Sifeng, WU Lifeng, et al. Fractional order reverse accumulative discrete grey model and its application[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, **38**(3): 719-724.(in Chinese))

[16] 刘解放, 刘思峰, 吴利丰, 等. 分数阶反向累加 NHGM(1,1,k)模型及其应用研究[J]. 系统工程理论与实践, 2016, **36**(4): 1033-1041.(LIU Jiefang, LIU Sifeng, WU Lifeng, et al. Research on fractional order reverse accumulative NHGM(1,1,k) model and its application[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2016, **36**(4): 1033-1041.(in Chinese))

[17] 战立青, 施化吉. 近似非齐次指数数据的灰色建模方法与模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, **33**(3): 689-694.(ZHAN Liqing, SHI Huaji. Methods and model of grey modeling for approximation non-homogenous exponential data[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2013, **33**(3): 689-694.(in Chinese))

[18] 于丽亚, 王丰效. 基于粒子群算法的非等距 GOM(1,1)模型[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, **27**(4): 472-476.(YU Liya, WANG Fengxiao. Non-equidistant GOM(1,1) model based on particle swarm optimization algorithm[J]. *Pure and Applied Mathematics*, 2011, **27**(4): 472-476.(in Chinese))

[19] 屈婉玲. 组合数学[M]. 北京: 北京大学出版社, 1989: 48-51.(QU Wanling. *Combinatorial Mathematics*[M]. Beijing: Peking University Press, 1989: 48-51.(in Chinese))

[20] 罗佑新, 周继荣. 非等间距 GM(1,1)模型及其在疲劳试验数据处理和疲劳试验在线监测中的应用[J]. 机械强度, 1996, **18**(3): 60-63.(LUO Youxin, ZHOU Jirong. Nonequidistance GM(1,1) model and its application in fatigue experimental data processing and on-line control[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 1996, **18**(3): 60-63.(in Chinese))

[21] 王正新, 党耀国, 赵洁珏. 优化的 GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, **32**(9): 1973-1978.(WANG Zhengxin, DANG Yaoguo, ZHAO Jiejue. Optimized GM(1,1) power model and its application[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2012, **32**(9): 1973-1978.(in Chinese))

[22] 韩晋, 杨岳, 陈峰, 等. 基于非等时距加权灰色模型与神经网络的组合预测算法[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(4): 408-419.(HAN Jin, YANG Yue, CHEN Feng, et al. Combination forecasting algorithm based on non-equal interval weighted grey model and neural network[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(4): 408-419.(in Chinese))

Non-Equidistant GM(1,1) Models Based on Fractional-Order Reverse Accumulation and the Application

ZENG Liang

(*Department of Basic Courses*, *Guangdong Polytechnic College*, *Zhaoqing*, *Guangdong* 526100, *P.R.China*)

Abstract: For the prediction of non-equidistant decreasing series, a non-equidistant GM(1,1) model based on the 1st-order reverse accumulation was constructed, and the least square solutions of the model parameters and the discrete time response functions applicable to prediction were given. In order to further improve the prediction accuracy, a fractional-order reverse accumulation non-equidistant GM(1,1) model was proposed. With the objective of minimizing the average relative error of simulation, a nonlinear programming model was established to obtain the optimal order. Finally, numerical simulation and an example of the prediction of the fatigue strength of Ti alloy were given to verify the validity and practicability of the proposed model.

Key words: grey prediction model; reverse accumulation; non-equidistant; GOM(1,1) model; fractional order

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61472089)

引用本文/Cite this paper:

曾亮. 分数阶反向累加非等间距 GM(1,1)模型及应用[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(7): 841-854.

ZENG Liang. Non-equidistant GM(1,1) models based on fractional-order reverse accumulation and the application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(7): 841-854.