文章编号:1000-0887(2018)09-1091-08　　ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

一类 Lasota-Wazewska 模型伪概周期解的全局吸引性*

王　丽，　梁博强，　刘　金

（西北工业大学 理学院，西安 710072）

摘要： Lasota-Wazewska 模型常被用来描述动物体内红血球的再生情况.基于 Banach 压缩映射原理同时构造合适的 Lyapunov 函数,针对一类带时滞的 Lasota-Wazewska 模型研究了其伪概周期解的存在性、唯一性及全局吸引性.该文结果具有一定的优越性,且能够使关于 Lasota-Wazewska 模型动力学行为的刻画更加丰富.

关　键　词： Lasota-Wazewska 模型；　伪概周期解；　Lyapunov 函数；　全局吸引性

中图分类号： O175　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.380256

引　　言

Lasota-Wazewska 模型常被用来描述动物体内红血球的再生情况,是 Wazewska-Czyzewska 和 Lasota 首先提出并研究的[1].近些年来,许多学者对该模型(及更一般形式的 Lasota-Wazewska 模型)的周期解的存在唯一性[2-3]、分岔[4-5]、概周期解的存在唯一性[6-9]等进行了研究.在实际生活中,由于人类活动和工业的生态效应(比如制造业对于大气、河流、土壤的污染等),物种的实际生存环境总是具有伪周期特征.显然,动物体内的环境与动物的实际生存环境息息相关.因此, 对于 Lasota-Wazewska 模型,本文假设动物体内环境具有伪概周期特征,在此基础上,考虑该模型伪概周期解(即,概周期基础上加遍历项)的存在性等.事实上,对于该类模型已有少量文献研究其伪概周期解的存在性等[10-11].文献[10]考虑了具有分布时滞的 Lasota-Wazewska 模型伪概周期解的存在性.在文献[10]的基础上,Rihani 等在文献[11]中增加常数时滞,研究了带常数及分布时滞的 Lasota-Wazewska 模型伪概周期解的存在唯一性及稳定性.但是,显然易见,各种模型的动力学行为和时滞密切相关[12-13],时滞为常数不随时间改变是一种理想情况.基于此,本文将研究一类时滞依赖时间变化的 Lasota-Wazewska 模型的伪概周期解的存在性、唯一性及全局吸引性.显然,本文的研究内容有别于已有文献的工作,而且在文章的第 3 节也将举例说明本文的结果具有一定的优越性.

1　预 备 知 识

在阐述本文的主要结论前,首先列出所需的一些预备知识及假设.以下关于概周期函数及

* **收稿日期：** 2017-09-14；**修订日期：** 2018-02-01

基金项目： 陕西省自然科学基础研究计划(2017JM5140)

作者简介： 王丽(1982—),女,副教授,博士(通讯作者. E-mail：lwangmath@nwpu.edu.cn).

伪概周期函数的定义及性质可参见文献[14].

定义 1　称连续函数 $f(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是概周期函数是指对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $l(\varepsilon)>0$ 使得在任意长度为 l 的区间内至少存在数 τ 满足 $|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon$, $\forall t\in\mathbf{R}$,全体 τ 组成的集合 $T(f\cdot\varepsilon)$ 被称为函数 f 的 ε 稠密集, 用 $P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R})$ 表示全体概周期函数组成的集合.

定义 2　称连续函数 $f(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是伪概周期函数是指 $f(\cdot)$ 可写成 $f(\cdot)=f_1(\cdot)+f_0(\cdot)$, 其中

$$f_1(\cdot)\in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R}),$$

$$f_0(\cdot)\in P_0(\mathbf{R})=\left\{g(\cdot)\mid g(\cdot)\in C(\mathbf{R}):\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mid g(t)\mid\mathrm{d}t=0\right\},$$

$f_1(\cdot)$ 和 $f_0(\cdot)$ 分别被称为伪概周期函数 $f(\cdot)$ 的概周期分量和遍历扰动,用 $P_{\mathrm{P}}(\mathbf{R})$ 表示全体伪概周期函数组成的集合.

引理 1　如果 $F(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一致连续的, $f(\cdot)\in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R})$, $f(\cdot)$ 的值域被包含在 $F(\cdot)$ 的定义域内,那么, $F(f(\cdot))\in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R})$.

引理 2　假设 $f(\cdot)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负函数,在 $[0,+\infty)$ 上可积且一致连续,则 $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.

2　主要结果

在这一部分,将利用 Banach 压缩映射原理、Lyapunov 函数及一些不等式分析技巧研究 Lasota-Wazewska 模型

$$x'(t)=-\alpha(t)x(t)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)\mathrm{e}^{-\gamma_i(t)x(t-h(t))}\tag{1}$$

的伪概周期解的存在性、唯一性及全局吸引性.为此,本文总是规定以下假设(H)成立:

(H)　$\alpha(\cdot)$ 是概周期函数且满足 $\inf_{t\in\mathbf{R}}\alpha(t)=\alpha^->0$, $\beta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$ 均为正的伪概周期函数, $i=1,2,\cdots,n$, $h(\cdot)$ 是伪概周期函数且存在 $h^*<1$ 使得 $h'\leqslant h^*$.

为了研究方程(1)的伪概周期解的存在性,先考虑方程(1)对应的齐次方程:

$$x'(t)=-\alpha(t)x(t).$$

该方程的解可表示为

$$x(t;t_0,x_0)=X(t,t_0)x_0,\ x(t_0)=x_0,\qquad t_0,\ x_0\in\mathbf{R},$$

其中

$$X(t,s)=\exp\left\{-\int_s^t\alpha(u)\mathrm{d}u\right\}.$$

对于 $X(t,s)$, 有如下引理.

引理 3[15]　对 $\forall\varepsilon>0$ 及 $\tau\in T(\alpha,\varepsilon)$ 均有

$$\mid X(t+\tau,s+\tau)-X(t,s)\mid\leqslant\varepsilon(t-s)\mathrm{e}^{-\alpha^-(t-s)},\qquad\forall t,s\in\mathbf{R},\ t\geqslant s.$$

为表达方便, 对任意正的连续函数 f, 记

$$f^+=\sup_{t\in\mathbf{R}}f(t),\ f^-=\inf_{t\in\mathbf{R}}f(t),$$

则, 本文的主要结论如下.

定理 1　若假设(H)成立且 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i^+\gamma_i^+<\alpha^-$, 则方程(1)存在唯一严格正的伪概周期解,且该解是全局吸引的.

证明　首先基于压缩映射原理证明方程(1)伪概周期解的存在唯一性,令

$$U = \{x(\cdot) \in P_{\mathrm{P}}(\mathbf{R}),\ m \leqslant x(t) \leqslant M\},$$

其中

$$M = \frac{1}{\alpha^-}\sum_{i=1}^n \beta_i^+,\ m = \frac{1}{\alpha^+}\sum_{i=1}^n \beta_i^- \mathrm{e}^{-\gamma_i^+ M}.$$

对 $\forall x \in U$, 定义 $\|x\| = \sup_{t\in\mathbf{R}}|x(t)|$, 则 U 是一个 Banach 空间.定义算子 F:

$$\{\mathrm{F}x\}(t) = \int_{-\infty}^t X(t,s)\sum_{i=1}^n \beta_i(s)\mathrm{e}^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))}\mathrm{d}s.$$

对于 $\forall x,y \in U$,

$$\|\mathrm{F}x - \mathrm{F}y\| = \sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\int_{-\infty}^t X(t,s)\sum_{i=1}^n \beta_i(s)(\mathrm{e}^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \mathrm{e}^{-\gamma_i(s)y(s-h(s))})\mathrm{d}s\right| \leqslant$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^t X(t,s)\sum_{i=1}^n \beta_i^+\gamma_i^+ |x(s-h(s)) - y(s-h(s))|\mathrm{d}s =$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\sum_{i=1}^n \beta_i^+\gamma_i^+\|x-y\|\int_{-\infty}^t X(t,s)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\frac{1}{\alpha^-}\sum_{i=1}^n \beta_i^+\gamma_i^+\|x-y\|.$$

由于

$$\frac{1}{\alpha^-}\sum_{i=1}^n \beta_i^+\gamma_i^+ < 1,$$

故 $\mathrm{F}: U \to U$ 是一个压缩映射.因此,为了说明方程(1)存在唯一的严格正的伪概周期解,只需证明 F 是从 U 映到 U 的算子.首先, $\forall x \in U$, 易知

$$\|\mathrm{F}x\| \leqslant \sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^t \left|X(t,s)\sum_{i=1}^n \beta_i(s)\mathrm{e}^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))}\right|\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\alpha^-(t-s)}\sum_{i=1}^n \beta_i^+\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\frac{1}{\alpha^-}\sum_{i=1}^n \beta_i^+ = M,$$

$$\|\mathrm{F}x\| \geqslant \sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\alpha^+(t-s)}\sum_{i=1}^n \beta_i^-\mathrm{e}^{-\gamma_i^+ M}\mathrm{d}s\right| \geqslant$$

$$\frac{1}{\alpha^+}\sum_{i=1}^n \beta_i^-\mathrm{e}^{-\gamma_i^+ M} = m,$$

即, $m \leqslant \{\mathrm{F}x\}(t) \leqslant M, \forall t \in \mathbf{R}$.接下来, 证明 $\{\mathrm{F}x\}(t)$ 的伪概周期性.因为 $x(\cdot), h(\cdot), \gamma_i(\cdot), \beta_i(\cdot) \in P_{\mathrm{P}}(\mathbf{R})$, 故

$$x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_0(\cdot),\ h(\cdot) = h_1(\cdot) + h_0(\cdot),$$

$$\gamma_i(\cdot) = \gamma_{i1}(\cdot) + \gamma_{i0}(\cdot),\ \beta_i(\cdot) = \beta_{i1}(\cdot) + \beta_{i0}(\cdot),$$

其中

$$x_1(\cdot),\ h_1(\cdot),\ \gamma_{i1}(\cdot),\ \beta_{i1}(\cdot) \in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R}),$$

$$x_0(\cdot),\ h_0(\cdot),\ \gamma_{i0}(\cdot),\ \beta_{i0}(\cdot) \in P_0(\mathbf{R}),$$

式中 $i = 1,2,\cdots,n$.令

$$\{\mathrm{F}_1 x\}(t) = \int_{-\infty}^t X(t,s)\sum_{i=1}^n \beta_{i1}(s)\mathrm{e}^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))}\mathrm{d}s,$$

$$\{F_0x\}(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))}ds-\int_{-\infty}^{t}X(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s)e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))}ds,$$

则

$$\{Fx\}(t)=\{F_1x\}(t)+\{F_0x\}(t).$$

为了证明 $\{Fx\}(t)\in P_{\mathrm{P}}(\mathbf{R})$，只需证明 $\{F_1x\}(t)\in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R})$ 且 $\{F_0x\}(t)\in P_0(\mathbf{R})$.由引理1和 x_1 的一致连续性知 $e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))}\in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R})$，任取

$$\tau\in T(\alpha(\cdot),\varepsilon)\cap T(\beta_{i1}(\cdot),\varepsilon)\cap T(e^{-\gamma_{i1}(\cdot)x_1(\cdot-h_1)},\varepsilon),$$

同时结合引理3,可得

$$\begin{aligned}
&\|F_1x(\cdot+\tau)-F_1x(\cdot)\|=\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\int_{-\infty}^{t+\tau}X(t+\tau,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s)e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))}ds-\right.\\
&\left.\int_{-\infty}^{t}X(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s)e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))}ds\right|=\\
&\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\int_{-\infty}^{t}X(t+\tau,s+\tau)\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s+\tau)e^{-\gamma_{i1}(s+\tau)x_1(s+\tau-h_1(s+\tau))}-\right.\\
&\left.X(t,s)\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s)e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))}ds\right|\leqslant\\
&\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{t}\left|(X(t+\tau,s+\tau)-X(t,s))\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s+\tau)e^{-\gamma_{i1}(s+\tau)x_1(s+\tau-h_1(s+\tau))}\right|ds+\\
&\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{t}\left|X(t,s)\sum_{i=1}^{n}(\beta_{i1}(s+\tau)e^{-\gamma_{i1}(s+\tau)x_1(s+\tau-h_1(s+\tau))}-\right.\\
&\left.\beta_{i1}(s)e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))})\right|ds\leqslant\\
&\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(t-s)e^{-\alpha^-(t-s)}\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}^{+}ds+\\
&\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha^-(t-s)}\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s+\tau)\left[e^{-\gamma_{i1}(s+\tau)x_1(s+\tau-h_1(s+\tau))}-e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))}\right]+\right.\\
&\left.\sum_{i=1}^{n}[\beta_{i1}(s+\tau)-\beta_{i1}(s)]e^{-\gamma_{i1}(s)x(s-h(s))}\right|ds\leqslant\\
&\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_{i1}^{+}}{(\alpha^-)^2}+\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\alpha^-(t-s)}\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}^{+}+n\right)\varepsilon ds\leqslant\\
&\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}^{+}(1+\alpha^-)+n\alpha^-}{(\alpha^-)^2}\varepsilon.
\end{aligned}$$

由此可得 $\{F_1x\}(t)\in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R})$.接下来，证明 $\{F_0x\}(t)\in P_0(\mathbf{R})$，即证明

$$\lim_{2T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|F_0x(t)|dt=0.$$

因为，方程(1)的解 $x(\cdot)$ 导数有界,故其概周期分量 $x_1(\cdot)$ 导数有界.除此之外,由于

$$\beta_i(\cdot),\ \gamma_i(\cdot),\ h_1(\cdot)\in P_{\mathrm{P}}(\mathbf{R}),\ \beta_{i1}(\cdot),\ \gamma_{i1}(\cdot),\ h_1(\cdot)\in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R}),$$
$$\beta_{i0}(\cdot),\gamma_{i0}(\cdot),h_0(\cdot)\in P_0(\mathbf{R}),$$

故存在 $N>0$ 使得对 $\forall s\in\mathbf{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n}|\beta_{i1}(s)x(s-h(s))|<N,\ \sum_{i=1}^{n}|\beta_{i1}(s)\gamma_{i1}(s)|<N,$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\beta_{i1}(s)\gamma_{i1}(s)x'_1(s)|<N,$$

且

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(s)\mathrm{e}^{-\gamma_i x(s-h(s))}-\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s)\mathrm{e}^{-\gamma_{i1}x_1(s-h_1(s))}\right|<N.$$

为了证明 $\{\mathrm{F}_0x\}(t)\in P_0(\mathbf{R})$，首先给出如下事实：

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x_0(s-h(s))|\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{2T}\int_{-T-h(-T)}^{T-h(T)}|x_0(t)|\frac{1}{1-h^*}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{2T}\left(\int_{-T-h(-T)}^{-T}+\int_{-T}^{T}+\int_{T}^{T-h(T)}\right)|x_0(t)|\frac{1}{1-h^*}\mathrm{d}t\to 0,\qquad T\to\infty.$$

基于此，对于 $\{\mathrm{F}_0x\}(t)$ 而言，

$$0\leqslant\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\mathrm{F}_0x(t)|\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{t}\left|X(t,s)\sum_{i=1}^{n}(\beta_i(s)\mathrm{e}^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))}-\beta_{i1}(s)\mathrm{e}^{-\gamma_{i_1}(s)x_1(s-h_1(s))})\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{-T}\int_{-T}^{T}\left|X(t,s)\sum_{i=1}^{n}(\beta_i(s)\mathrm{e}^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))}-\beta_{i1}(s)\mathrm{e}^{-\gamma_{i_1}(s)x_1(s-h_1(s))})\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{s}^{T}\left|X(t,s)\sum_{i=1}^{n}(\beta_i(s)\mathrm{e}^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))}-\beta_{i1}(s)\mathrm{e}^{-\gamma_{i_1}(s)x_1(s-h_1(s))})\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{-T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-\alpha^-(t-s)}N\mathrm{d}t\mathrm{d}s+\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{s}^{T}\mathrm{e}^{-\alpha^-(t-s)}\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_{i0}(s)\mathrm{e}^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))}\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{s}^{T}\mathrm{e}^{-\alpha^-(t-s)}\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s)(\mathrm{e}^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))}-\mathrm{e}^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))})\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{N(1-\mathrm{e}^{-2\alpha^-T})}{2T(\alpha^-)^2}+\frac{1}{\alpha^-}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\beta_{i0}(s)|\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{\alpha^-}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s)\gamma_{i0}(s)x(s-h(s))\right|\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{\alpha^-}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}(s)\gamma_{i1}(s)(x_0(s-h(s))+\|x'_1\|h_0(s))\right|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{N(1-\mathrm{e}^{-2\alpha^-T})}{2T(\alpha^-)^2}+\frac{1}{\alpha^-}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\beta_{i0}(s)|\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{n}\frac{N}{\alpha^-}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\gamma_{i0}(s)|\mathrm{d}s+$$

$$\frac{N}{\alpha^-}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|h_0(s)|\mathrm{d}s+\frac{N}{\alpha^-}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x_0(s-h(s))|\mathrm{d}s\to 0,\qquad T\to\infty.$$

因此，$\{\mathrm{F}_0x\}(t)\in P_0(\mathbf{R})$，从而 $\{\mathrm{F}x\}(t)\in P_{\mathrm{P}}(\mathbf{R})$，这就说明了 F 是从 U 映到 U 的算子.因此，根据压缩映射原理知方程(1)存在唯一的严格正的伪概周期解.接下来证明这个伪概周期解是全局吸引的，设 x 是方程的任意解，x^* 是方程的伪概周期解，令

$$A=\sum_{i=1}^{n}\beta_i^+\gamma_i^+\frac{1}{1-h^*},$$

构造 Lyapunov 函数：

$$V(t)=|x(t)-x^*(t)|+A\int_{t-h(t)}^{t}|x(s)-x^*(s)|\,\mathrm{d}s,$$

则

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^+V(t)=&\operatorname{sgn}|x(t)-x^*(t)|\Big\{-\alpha(t)[x(t)-x^*(t)]+\\
&\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)[\mathrm{e}^{-\gamma_i(t)x(t-h(t))}-\mathrm{e}^{-\gamma_i(t)x^*(t-h(t))}]\Big\}+\\
&A|x(t)-x^*(t)|-A(1-h'(t))|x(t-h(t))-x^*(t-h(t))|\leqslant\\
&\operatorname{sgn}|x(t)-x^*(t)|\Big\{-\alpha(t)[x(t)-x^*(t)]+\\
&\sum_{i=1}^{n}\beta_i(t)\gamma_i(t)|x(t-h(t))-x^*(t-h(t))|\Big\}+\\
&A|x(t)-x^*(t)|-A(1-h'(t))|x(t-h(t))-x^*(t-h(t))|\leqslant\\
&-\alpha^-|x(t)-x^*(t)|+\sum_{i=1}^{n}\beta_i^+\gamma_i^+|x(t-h(t))-x^*(t-h(t))|+\\
&A|x(t)-x^*(t)|-A(1-h'(t))|x(t-h(t))-x^*(t-h(t))|=\\
&-(\alpha^--A)|x(t)-x^*(t)|+\\
&\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i^+\gamma_i^+\left(1-\frac{1-h'(t)}{1-h^*}\right)\right]|x(t-h(t))-x^*(t-h(t))|\leqslant\\
&-(\alpha^--A)|x(t)-x^*(t)|,\qquad\forall t\geqslant t_0.
\end{aligned}$$

因此可得

$$V(t)+(\alpha^--A)\int_{t_0}^{t}|x(s)-x^*(s)|\,\mathrm{d}s<V(t_0)<+\infty,\qquad\forall t\geqslant t_0.$$

进一步地

$$\int_{t_0}^{t}|x(s)-x^*(s)|\,\mathrm{d}s<+\infty,\qquad\forall t\geqslant t_0.$$

另外,由于 $x(t)$ 和 $x^*(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上导数有界,故 $|x(t)-x^*(t)|$ 一致连续,因此,由引理 2 可得, $\lim_{t\to+\infty}x(t)-x^*(t)=0$, 因此方程任意的解均收敛到伪概周期解.证毕.

3 结 论

对于 Lasota-Wazewska 模型,绝大部分文献主要研究其周期解、概周期解的存在性,本文关注该模型的伪概周期解的存在唯一性及全局吸引性.下面的例子说明本文的结果具有一定的优越性.

例 令

$$\alpha(t)=8+\cos^2t,$$

$$\beta_i(t)=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right),\ \gamma_i(t)=\cos^2t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2},\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

$$h(t)=\mathrm{e}^{-t^2},$$

此时,方程(1)转变为

$$x'(t)=-(8+\cos^2t)x(t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{e}^{-(\cos^2t+\mathrm{e}^{-t^2}/2)x(t-\mathrm{e}^{-t^2})}.\tag{2}$$

显然, $\alpha(\cdot)\in P_{\mathrm{A}}(\mathbf{R})$, $\beta_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot)$ 均为正的伪概周期函数, $i=1,2,\cdots,n$; $h(\cdot)$ 是伪概周期

函数且存在 $h^* < 1$ 使得 $h' \leqslant h^*$.除此之外,

$$\alpha^- = 8 > 0,\ \beta_i^+ \leqslant \frac{2}{n},\ \gamma_i^+ \leqslant \frac{3}{2},\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i^+ \gamma_i^+ \leqslant 3 < \alpha^-,$$

因此,定理 1 的条件均满足.由定理 1 知,方程(2)存在唯一严格正的伪概周期解,且该解是全局吸引的.

显然, 时滞 $h(t) = e^{-t^2}$ 是关于 t 的函数,并非常数.因此,利用文献[8]无法判断方程(2)的伪概周期解的存在性.当然,唯一性和全局吸引性也就无从谈起.因此,该例说明本文的研究结果具有一定的优越性.

参考文献(References):

[1] WAZEWSKA-CZYZEWSKA M, LASOTA A. Mathematical problems of the dynamics of a system of red blood cells[J]. *Mat Stos*, 1976, **17**(6): 23-40.

[2] 景冰清, 王丽丽. Lasota-Wazewska 模型的唯一周期正解的存在性[J]. 太原科技大学学报, 2008, **29**(3): 217-219.(JING Bingqing, WANG Lili. Existence of unique positive periodic solution for a Lasota-Wazewska model[J]. *Journal of Taiyuan University of Science and Technology*, 2008, **29**(3): 217-219.(in Chinese))

[3] CHEN L, CHEN F. Positive periodic solution of the discrete Lasota-Wazewska model with impulse[J]. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2014, **20**(3): 406-412.

[4] 马苏奇, 陆启韶. 具有非线性出生率的时滞 Lasota-Wazewska 模型的稳定性分岔[J]. 南京师范大学学报(自然科学版), 2005, **28**(2): 1-5.(MA Suqi, LU Qishao. Stability bifurcations of Lasota-Wazewska-type model with maturation delay and nonlinear birth rate[J]. *Journal of Nanjing Normal University* (*Natural Science*), 2005, **28**(2): 1-5.(in Chinese))

[5] 王爱丽. 具有连续时滞的 Lasota-Wazewska 模型的 Hopf-分支[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2008, **32**(3): 330-334.(WANG Aili. The Hopf-bifurcation in a Lasota-Wazewska-type model with continuous delays[J]. *Journal of Jiangxi Normal University* (*Natural Science*), 2008, **32**(3): 330-334.(in Chinese))

[6] WANG L, YU M, NIU P. Periodic solution and almost periodic solution of impulsive Lasota-Wazewska model with multiple time-varying delays[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2012, **64**(8): 2383-2394.

[7] 柏琼, 冯春华. 具非线性脉冲时滞的 Lasota-Wazewska 模型概周期解的存在性与稳定性[J]. 广西科学, 2011, **18**(4): 329-332.(BAI Qiong, FENG Chunhua. Existence and stability of almost periodic solutions for nonlinear impulsive Lasota-Wazewska model[J]. *Guangxi Sciences*, 2011, **18**(4): 329-332.(in Chinese))

[8] STAMOV G T. On the existence of almost periodic solutions for the impulsive Lasota-Wazewska model[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2009, **22**(4): 516-520.

[9] 陈晓英, 施春玲. 一类具有无穷时滞的 Lasota-Wazewska 模型的概周期解[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2014, **42**(1): 8-11.(CHEN Xiaoying, SHI Chunling. Almost periodic solution for a Lasota-Wazewska model with infinte delay[J]. *Journal of Fuzhou University* (*Natural Science Edition*), 2014, **42**(1): 8-11.(in Chinese))

[10] 龙志文. 几类时滞生物数学模型的全局动力学分析[D]. 博士学位论文. 长沙: 湖南大学, 2016. (LONG Zhiwen. Global dynamics analysis of several biological models with time delays[D]. PhD Thesis. Changsha: Hunan University, 2016.(in Chinese))

[11] RIHANI S, KESSAB A, CHERIF F. Pseudo almost periodic solutions for a Lasota-Wazewska

model[J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016, **2016**(62): 1-17.

[12] 廖书, 杨炜明. 考虑媒体播报效应的双时滞传染病模型[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(12): 1412-1424.(LIAO Shu, YANG Weiming. An epidemic model with dual delays in view of media coverage[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(12): 1412-1424.(in Chinese))

[13] 彭剑, 李禄欣, 胡霞, 等. 时滞影响下受控斜拉索的参数振动稳定性[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(2): 181-188.(PENG Jian, LI Luxin, HU Xia, et al. Parametric vibration stability of controlled stay cables with time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(2): 181-188.(in Chinese))

[14] ZHANG Chuanyi. *Almost Periodic Type Functions and Ergodicity*[M]. Beijing: Science Press, 2003.

[15] SAMOILENKO A M, PERESTYUK N A. *Impulsive Differential Equations*[M]. Singapore: World Scientific, 1995.

Global Attractivity of Pseudo Almost Periodic Solutions to a Class of Lasota-Wazewska Models

WANG Li, LIANG Boqiang, LIU Jin

(*School of Natural and Applied Sciences*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi' an* 710072, *P.R.China*)

Abstract: The Lasota-Wazewska model is often used to describe the regeneration of red blood cells in animals. Based on the Banach contraction mapping principle and through construction of the Lyapunov function, the existence, uniqueness and global attractivity of pseudo almost periodic solutions to a class of Lasota-Wazewska models were studied. The results have some advantages, and can enrich the characterization of the dynamic behavior of the Lasota-Wazewska model.

Key words: Lasota-Wazewska model; pseudo almost periodic solution; Lyapunov function; global attractivity

引用本文/Cite this paper:

王丽, 梁博强, 刘金. 一类 Lasota-Wazewska 模型伪概周期解的全局吸引性[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(9): 1091-1098.

WANG Li, LIANG Boqiang, LIU Jin. Global attractivity of pseudo almost periodic solutions to a class of Lasota-Wazewska models[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(9): 1091-1098.