文章编号:1000-0887(2018)03-0364-07

关于向量值 D-半预不变真拟凸映射的刻画*

黄应全

(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘要: 研究了 D-半预不变真拟凸映射的性质.首先,举例验证了满足条件 E 的 η 是大量存在的.然后,说明了 D-半预不变真拟凸映射的水平集是半不变凸集,并运用 D-上半连续性、$*$-上半连续性和中间点的 D-半预不变真拟凸性,给出了 D-半预不变真拟凸映射的两个等价刻画.最后,在中间点 D-严格半预不变真拟凸性条件下,建立了 D-半严格半预不变真拟凸映射和 D-严格半预不变真拟凸映射的等价关系.

关 键 词: D-半预不变真拟凸映射; 半不变凸集; 条件 E

中图分类号: O221.6 **文献标志码:** A DOI:10.21656/1000-0887.380269

引 言

凸性和广义凸性在数理经济、管理科学和最优化理论中起着非常重要的作用,有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中重要的研究方向之一.1981 年,Hanson[1] 给出了一类重要的可微广义凸函数——不变凸,它是凸函数的推广.1988 年,Weir 和 Mond[2]、Weir 和 Jeyakumar[3] 将可微的不变凸性推广到不可微的情形,并引入了预不变凸函数的概念.随后,Yang(杨新民)和 Li(李端)[4] 在条件 C 下建立了预不变凸函数的一些性质.同年,杨新民和李端[5] 引入了严格预不变凸函数和半严格预不变凸函数,并讨论了它们与预不变凸函数的关系.1992 年,Yang(杨晓琪)和 Chen(陈光亚)[6] 提出了半预不变凸函数的概念(它是预不变凸函数的真推广),并讨论了半预不变凸函数在最优化和变分不等式中的应用.2003 年,彭建文[7] 引入了向量值 D-η-预不变真拟凸映射等概念,得到了 D-η-预不变真拟凸映射的等价命题,讨论了 3 种 D-η-预不变真拟凸映射的关系,并得到了一些最优性结果.2014 年,彭再云等[8] 提出了向量值的 D-η-半预不变凸映射,建立了 D-η-半预不变凸映射与 D-η-严格半预不变凸映射和 D-η-半严格半预不变凸映射的关系,并讨论了它们在最优化中的应用.同年,彭再云等[9] 在文献[7-8]的基础上提出了向量值 D-半预不变真拟凸映射,在一定条件下给出了它的判定,建立了 D-半预不变真拟凸映射与 D-严格半预不变真拟凸映射和 D-半严格半预不变真拟凸映射的关系,并讨论了 D-半严格(严格)半预不变真拟凸映射在向量优化中的一个应用.2015 年,唐莉萍和杨新民[10] 在前面的基础上结合稠密性,分别利用 3 种 D-半预不变真拟凸映射建立了 D-η-半预不变凸映射

* **收稿日期:** 2017-10-11; **修订日期:** 2017-11-07

基金项目: 国家自然科学基金(11471059;11626048;11701057);重庆市基础科学与前沿技术研究计划(cstc2014jcyjA00033;cstc2015jcyjB00001;cstc2016jcyjA0178);重庆市高校创新团队建设计划(CXTDX201601026);重庆市教委科技计划(KJ1600613;KJ1400630)

作者简介: 黄应全(1973—),男,讲师,硕士(E-mail: huangyq1110@ctbu.edu.cn).

的刻画.

受文献[4-5,7-12]的启发,本文对 D-半预不变真拟凸性进行了刻画.首先举例验证了满足条件 E 的 η 是大量存在的,且比文献[9]中例 4 的 η 范围广;然后说明了 D-半预不变真拟凸映射的水平集是半不变凸集,并运用 D-上半连续性、$*$-上半连续性和中间点的 D-半预不变真拟凸性给出了 D-半预不变真拟凸映射的两个等价刻画;最后在中间点 D-严格半预不变真拟凸性条件下,建立了 D-半严格半预不变真拟凸映射和 D-严格半预不变真拟凸映射的等价关系,所得结论推广了文献[7-8]中的相关结论.

1　预 备 知 识

本文通篇假设:非空集合 K 和点闭凸锥 D 都是欧氏空间 R^n 的子集,且 D 有非空内部, $D^* = \{f \in R^{n*} = R^n \mid f(y) \geqslant 0, \forall y \in D\}$ 是 D 的对偶锥, $f:K \to R^n$ 和 $\eta:R^n \times R^n \times [0,1] \to R^n$ 都是向量值映射.

定义 1[8]　如果对于 $\forall x,y \in K,\alpha \in [0,1],\lambda \in [0,1]$, 有 $y + \alpha\eta(x,y,\lambda) \in K$, 则称集合 K 是关于 η 的半不变凸集.

注 1　由以上定义可以看出半不变凸集是不变凸集的推广.

定义 2[9]　设 K 是关于 η 的半不变凸集,称 f 关于 η 是 D-半预不变真拟凸映射,若对于 $\forall x,y \in K,\alpha \in [0,1],\lambda \in [0,1]$, 有

$$f(y + \alpha\eta(x,y,\lambda)) \in f(x) - D \quad \text{or} \quad f(y + \alpha\eta(x,y,\lambda)) \in f(y) - D,$$

其中 $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \alpha\eta(x,y,\lambda) = 0.$

定义 3[9]　设 K 是关于 η 的半不变凸集,称 f 关于 η 是 D-半严格(严格)半预不变真拟凸映射,若对于 $\forall x,y \in K,f(x) \neq f(y)(x \neq y)$, $\forall \alpha \in (0,1),\lambda \in (0,1)$, 有

$$f(y + \alpha\eta(x,y,\lambda)) \in f(x) - \operatorname{int} D \quad \text{or} \quad f(y + \alpha\eta(x,y,\lambda)) \in f(y) - \operatorname{int} D,$$

其中

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \alpha\eta(x,y,\lambda) = 0.$$

注 2　由注 1、定义 2 和定义 3 可知, D-半预不变真拟凸映射、D-半严格(严格)半预不变真拟凸映射分别是文献[7]中的 D-η-预不变真拟凸映射、D-η-半严格(严格)预不变真拟凸映射的推广.

定义 4[8]　称 η 满足条件 E, 若对于 $\forall x,y \in K,\alpha \in [0,1],\lambda \in [0,1]$, 有

$$(E_1):\ \eta(y,\ y + \alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda) = -\alpha\eta(x,y,\lambda);$$

$$(E_2):\ \eta(x,\ y + \alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda) = (1 - \alpha)\eta(x,y,\lambda).$$

定义 5[7]　称 f 是 D-上半连续的,若对于 $\forall y \in R^n$, 集合 $\{x \in K \mid f(x) \in y + D\}$ 是闭集.

定义 6[12]　称 f 是 $*$-上半连续的,若对于 $\forall q \in D^*,q(f)(\cdot)$ 在 K 上是上半连续的.

引理 1[12]　$\forall q \in D^*,q(d) \geqslant 0 \Leftrightarrow d \in D$.

2　主 要 结 果

首先举例验证满足条件 E 的 η 是大量存在的,且比文献[9]中例 4 的 η 范围广.

例 1　设

$$K = \mathbf{R}, \forall \lambda \in [0,1],$$

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases} x-y, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ x-y, & x<0,\ y<0,\\ -\dfrac{1}{2}-y, & x>0,\ y<0,\\ \dfrac{1}{2}-y, & x<0,\ y\geqslant 0,\\ -1-y+a\lambda, & x=0,\ y<0,\end{cases}$$

此处 λ 的系数 $a<1$, 容易验证 η 此时满足条件 E.

其次,对于 D-半预不变真拟凸映射来说,可以证明水平集是关于 η 的半不变凸集.

定理 1 设集合 K 是关于 η 的半不变凸集, f 是 D-半预不变真拟凸映射,则对于 $\forall y\in R^n$, $S(f,y)=\{x\in K: f(x)\in y-D\}$ 是关于 η 的半不变凸集.

证明 任取 $x_1,x_2\in S(f,y)=\{x\in K: f(x)\in y-D\}$, 则 $x_1\in K, x_2\in K$, 且

$$f(x_1)\in y-D,\ f(x_2)\in y-D. \tag{1}$$

因 f 是 D-半预不变真拟凸映射,故对于 $\forall\alpha\in[0,1],\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(x_2+\alpha\eta(x_1,x_2,\lambda))\in f(x_1)-D \quad \text{or} \quad f(x_2+\alpha\eta(x_1,x_2,\lambda))\in f(x_2)-D. \tag{2}$$

由式(1)和(2),可知,对于 $\forall\alpha\in[0,1],\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(x_2+\alpha\eta(x_1,x_2,\lambda))\in f(x_1)-D\subseteq y-D-D=y-D$$

或

$$f(x_2+\alpha\eta(x_1,x_2,\lambda))\in f(x_2)-D\subseteq y-D-D=y-D,$$

即

$$f(x_2+\alpha\eta(x_1,x_2,\lambda))\in y-D. \tag{3}$$

因集合 K 是关于 η 的半不变凸集,故对于 $\forall\alpha\in[0,1],\lambda\in[0,1]$, $x_2+\alpha\eta(x_1,x_2,\lambda)\in K$, 从而由式(3),即得

$$\forall\alpha\in[0,1],\ \lambda\in[0,1],\quad x_2+\alpha\eta(x_1,x_2,\lambda)\in S(f,y).$$

所以

$$S(f,y)=\{x\in K: f(x)\in y-D\}$$

是关于 η 的半不变凸集,证毕.

引理 2[9] 设 K 是关于 η 的半不变凸集,其中 η 满足条件 E.若 f 满足对于 $\forall x,y\in K$, 有 $f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$, 且 $\exists\alpha\in(0,1)$, 使得对于 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$$

或

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D,$$

则集合

$$A=\{\gamma\in[0,1]\mid f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D \quad \text{or} \quad f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D,\ \forall x,y\in K,\ \lambda\in[0,1]\}$$

在 $[0,1]$ 中稠密.

接下来,在稠密性引理 2 的基础上,利用 D-上半连续性和中间点的 D-半预不变真拟凸性给出了判定 D-半预不变真拟凸性的等价性刻画.

定理 2 设 η 满足条件 E, 集合 K 是关于 η 的开半不变凸集, f 是 D-上半连续的,且对于 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$, 有 $f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$, 则 f 是 D-半预不变真拟凸映射当且

仅当 $\exists\alpha\in(0,1)$，使得对于 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$$

或

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D.$$

证明 由 D-半预不变真拟凸映射的定义知必要性成立.下面用反证法证充分性,若结论不真,则 $\exists x,y\in K,\bar{\lambda}\in(0,1)$ 以及 $\bar{\alpha}\in(0,1)$，使得

$$f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\bar{\lambda}))\notin f(x)-D\quad\text{and}\quad f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\bar{\lambda}))\notin f(y)-D.\tag{4}$$

令 $z=y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\bar{\lambda})$，由稠密性引理 2 知,存在序列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $\alpha_n\in A$(A 见引理 2),使得 $\alpha_n<\bar{\alpha}$ 且 $\alpha_n\to\bar{\alpha}(n\to\infty)$.

令

$$y_n=y+\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y,\bar{\lambda}),$$

则 $y_n\to y(n\to\infty)$.因 K 是开半不变凸的,于是当 n 充分大时有 $y_n\in K$.由条件 E 有

$$\begin{aligned}
&y_n+\alpha_n\eta(x,y_n,\bar{\lambda})=\\
&\quad y+\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y,\bar{\lambda})+\alpha_n\eta\left(x,y+\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y,\bar{\lambda}),\bar{\lambda}\right)=\\
&\quad y+\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y,\bar{\lambda})+\alpha_n\left(1-\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)\eta(x,y,\bar{\lambda})=\\
&\quad y+\frac{\bar{\alpha}-\alpha_n+\alpha_n(1-\bar{\alpha})}{1-\alpha_n}\eta(x,y,\bar{\lambda})=y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\bar{\lambda})=z,
\end{aligned}$$

且

$$f(z)=f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\bar{\lambda}))=f(y_n+\alpha_n\eta(x,y_n,\bar{\lambda})).$$

因 $\alpha_n\in A$，故

$$f(z)\in f(x)-D\quad\text{or}\quad f(z)\in f(y_n)-D,$$

即

$$f(x)\in f(z)+D\quad\text{or}\quad f(y_n)\in f(z)+D.$$

因为 f 是 D-上半连续的,所以 $G=\{y_n\in K\mid f(y_n)\in f(z)+D\}$ 是闭集.又 $y_n\to y(n\to\infty)$，故 $y\in G$，因而 $f(x)\in f(z)+D$ 或 $f(y)\in f(z)+D$，即

$$f(z)\in f(x)-D\quad\text{or}\quad f(z)\in f(y)-D,$$

与式(4)矛盾,所以 f 是 D-半预不变真拟凸映射,证毕.

注 3 定理 2 把文献[7]中的定理 2.2 关于 D-η-预不变真拟凸映射的情形推广到了 D-半预不变真拟凸映射的情形.

由前面 D-上半连续、$*$-上半连续定义和引理 1 易知，若 f 是 $*$-上半连续的，则 f 是 D-上半连续的.故在 $*$-上半连续性和中间点的 D-半预不变真拟凸性条件下，同样获得定理 2 中 D-半预不变真拟凸映射的等价性刻画.

定理 3 设 η 满足条件 E，集合 K 是关于 η 的开半不变凸集,f 是 $*$-上半连续的,且对于 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，有 $f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$,则 f 是 D-半预不变真拟凸映射,当且仅当 $\exists\alpha\in(0,1)$，使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$，有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D\quad \text{or}\quad f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-D.$$

注 4 定理 3 把文献[8]中的定理 1 关于 D-η-半预不变凸映射的情形推广到了 D-半预不变真拟凸映射的情形.

由定义可知:D-严格半预不变真拟凸映射一定是 D-半严格半预不变真拟凸映射,反之不一定成立,文献[9]中已有反例说明.下面定理说明在中间点 D-严格半预不变真拟凸性的条件下, D-半严格半预不变真拟凸映射可以是 D-严格半预不变真拟凸映射.

定理 4 设 η 满足条件 E, 集合 K 是关于 η 的半不变凸集, f 满足:

(a) f 是 D-半严格半预不变真拟凸的;

(b) $\exists\bar{\alpha}\in(0,1)$,对于 $\forall x,y\in K,x\neq y,\lambda\in(0,1)$, 有

$$f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-\operatorname{int}D\quad \text{or}\quad f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(y)-\operatorname{int}D,\tag{5}$$

则 f 在 K 上是 D-严格半预不变真拟凸的.

证明 因 f 是 D-半严格半预不变真拟凸的,故只需证明当 $x\neq y$ 且 $f(x)=f(y)$ 时,对于 $\forall\alpha\in(0,1),\lambda\in(0,1)$, 有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-\operatorname{int}D=f(y)-\operatorname{int}D\tag{6}$$

即可.

对于上述 x,y, 令 $\bar{x}=y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)$, 对于 $\forall x,y\in K,x\neq y$, 由式(5)有

$$f(\bar{x})=f(y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-\operatorname{int}D=f(y)-\operatorname{int}D.\tag{7}$$

下面分两种情况讨论.

(i) 对于 $\forall\alpha\in(0,\bar{\alpha})$, 令 $u=\dfrac{\bar{\alpha}-\alpha}{\bar{\alpha}}$,则 $u\in(0,1)$,由条件 E, 对于 $\forall\lambda\in(0,1)$, 有

$$\bar{x}+u\eta(y,\bar{x},\lambda)=y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)+\frac{\bar{\alpha}-\alpha}{\bar{\alpha}}\eta(y,y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$
$$y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)-(\bar{\alpha}-\alpha)\eta(x,y,\lambda)=y+\alpha\eta(x,y,\lambda).$$

因 D 是点锥,则由式(7)可知 $f(\bar{x})\neq f(y)$, 结合 f 的 D-半严格半预不变真拟凸性和式(7),有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))=f(\bar{x}+u\eta(y,\bar{x},\lambda))\in f(y)-\operatorname{int}D$$

或

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))=f(\bar{x}+u\eta(y,\bar{x},\lambda))\in$$
$$f(\bar{x})-\operatorname{int}D\subseteq f(y)-\operatorname{int}D-\operatorname{int}D=f(y)-\operatorname{int}D.$$

即,对于 $\forall\alpha\in(0,\bar{\alpha}),\lambda\in(0,1)$,

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-\operatorname{int}D=f(y)-\operatorname{int}D.$$

(ii) 对于 $\forall\alpha\in(\bar{\alpha},1)$, 令 $v=\dfrac{\alpha-\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}$, 则 $v\in(0,1)$, 由条件 E, 对于 $\forall\lambda\in(0,1)$, 有

$$\bar{x}+v\eta(x,\bar{x},\lambda)=y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)+\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}\eta(x,y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda),\lambda)=$$
$$y+\bar{\alpha}\eta(x,y,\lambda)+(\alpha-\bar{\alpha})\eta(x,y,\lambda)=y+\alpha\eta(x,y,\lambda).$$

因 D 是点锥,则由式(7)可知 $f(\bar{x})\neq f(x)$, 结合 f 的 D-半严格半预不变真拟凸性和式(7),有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))=f(\bar{x}+v\eta(x,\bar{x},\lambda))\in f(x)-\operatorname{int}D$$

或

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))=f(\bar{x}+v\eta(x,\bar{x},\lambda))\in$$

$$f(\bar{x}) - \mathrm{int}\,D \subseteq f(y) - \mathrm{int}\,D - \mathrm{int}\,D = f(y) - \mathrm{int}\,D,$$

即,对于 $\forall \alpha \in (\bar{\alpha},1), \lambda \in (0,1)$,

$$f(y + \alpha\eta(x,y,\lambda)) \in f(x) - \mathrm{int}\,D = f(y) - \mathrm{int}\,D.$$

结合(i)和(ii)两种情形,式(6)成立,证毕.

注 5　定理 4 把文献[7]中的定理 4.1 关于 D-η-半严格预不变真拟凸映射和 D-η-严格预不变真拟凸映射的关系推广到了 D-半严格半预不变真拟凸映射和 D-严格半预不变真拟凸映射的关系的情形.

3　结　　语

本文对 D-半预不变真拟凸映射的性质进行了研究.举例验证了满足条件 E 的 η 是大量存在的,说明了 D-半预不变真拟凸映射的水平集是半不变凸集,得出了 3 种 D-半预不变真拟凸映射的一些等价刻画,所得结论推广了文献[7-8]中的相关结论.对于文献[13]中提出的 D-$\boldsymbol{\eta}$-E 半预不变凸映射,由 D-半预不变真拟凸映射提出 D-$\boldsymbol{\eta}$-E 半预不变真拟凸映射并研究其在优化中的应用,这将是有待研究的后续课题.

致谢　本文作者衷心感谢在本文的撰写和修改过程中, 导师杨新民教授的严格审核, 以及几位同门的宝贵意见和建议.本文作者衷心感谢重庆工商大学校级项目(1552005)对本文的资助.

参考文献(References):

[1]　HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, **80**(2): 545-550.

[2]　WEIR T, MOND B. Pre-invex functions in multiple objective optimization[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, **136**(1): 29-38.

[3]　WEIR T, JEYAKUMAR V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1988, **38**(2): 177-189.

[4]　YANG Xinmin, LI Duan. On properties of preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **256**(1): 229-241.

[5]　YANG Xinmin, LI Duan. Semistrictly preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **258**(1): 287-308.

[6]　YANG Xiaoqi, CHEN Guangya. A class of nonconvex functions and pre-variational inequalities [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, **169**(2): 359-373.

[7]　彭建文. 向量值映射 D-η-预不变真拟凸的性质[J]. 系统科学与数学, 2003, **23**(3): 306-314. (PENG Jianwen. Properties of D-η-properly prequasiinvex function[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2003, **23**(3): 306-314.(in Chinese))

[8]　彭再云, 王堃颖, 赵勇, 等. D-η-半预不变凸映射的性质与应用[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(2): 202-211.(PENG Zaiyun, WANG Kunying, ZHAO Yong, et al. Characterizations and applications of D-η-semipreinvex mappings[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(2): 202-211.(in Chinese))

[9]　彭再云, 李科科, 唐平, 等. 向量值 D-半预不变真拟凸映射的判定和性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2014, **31**(5): 18-25.(PENG Zaiyun, LI Keke, TANG Ping, et al. Characterizations and criterions of D-semiprequasi-invex mappings[J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2014, **31**(5): 18-25.(in Chinese))

[10] 唐莉萍，杨新民. 关于 D-半预不变凸性的某些新性质[J]. 应用数学和力学，2015，**36**(3)：325-331.(TANG Liping, YANG Xinmin. A note on some new characterizations of D-semi-preinvexity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(3): 325-331.(in Chinese))

[11] 杨新民，戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京：科学出版社，2016.(YANG Xinmin, RONG Weidong. *Generalized Convexity and Its Applications*[M]. Beijing: Science Press, 2016.(in Chinese))

[12] 彭建文. 广义凸性及其在最优化问题中的应用[D]. 博士学位论文. 呼和浩特：内蒙古大学，2005.(PENG Jianwen. Generalized convexity with applications in optimization problems[D]. PhD Thesis. Hohhot: Inner Mongolia University, 2005.(in Chinese))

[13] 彭再云，李科科，张石生. D-$\boldsymbol{\eta}$-E-半预不变凸映射与向量优化[J]. 应用数学和力学，2014，**35**(9)：1020-1032.(PENG Zaiyun, LI Keke, ZHANG Shisheng. D-$\boldsymbol{\eta}$-E-semipreinvex vector mappings and vector optimization[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1020-1032.(in Chinese))

Characterizations of D-Properly Semi-Prequasi-Invex Mappings

HUANG Yingquan

(*College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Technology and Business University*, *Chongqing* 400067, *P.R.China*)

Abstract: The properties of D-properly semi-prequasi-invex mappings were studied. Firstly, it was verified that the η values satisfying condition E exist massively. Secondly, the level set of the D-properly semi-prequasi-invex mapping was proved to be a semi-invex set, and two equivalent propositions of the D-properly semi-prequasi-invex mapping were given with D-upper semi-continuity, $*$-upper semi-continuity and intermediate-point D-properly semi-prequasi-invexity. Finally, the equivalent relation between the D-properly semi-strict semi-prequasi-invex mapping and the D-properly strict semi-prequasi-invex mapping was established under the condition of the intermediate-point D-properly strict semi-prequasi-invexity.

Key words: D-properly semi-prequasi-invex mapping; semi-invex set; condition E

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11471059; 11626048; 11701057)

引用本文/Cite this paper：

黄应全. 关于向量值 D-半预不变真拟凸映射的刻画[J]. 应用数学和力学，2018，**39**(3)：364-370.

HUANG Yingquan. Characterizations of D-properly semi-prequasi-invex mappings[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 364-370.